

Dans cet exercice, vous allez observer concrètement, sur divers exemples d'images, la représentation des spectres en fréquences spatiales.

Avant de commencer, chargez et décompressez le fichier archive «*fft.zip*» qui contient les scripts nécessaires tout au long de cet exercice.

Transformée de Fourier Discrète

1 – Après avoir mis à jour la liste des chemins dans le path browser, ouvrez et analysez le script *fft2d_sinus.m*. N'hésitez pas à consulter l'aide (*helpwin*) pour obtenir plus d'informations sur les différentes fonctions Matlab utilisées. Quel est le type du signal 2-D d'entrée ?

2 – Jouez sur la période en essayant les valeurs 4, 8 et 16 (orientation 0). Relevez, pour ces différentes périodes, l'amplitude et la fréquence normalisées des raies. Jouez également sur l'amplitude et la valeur moyenne du signal 2-D. Commentez les résultats obtenus. Essayez ensuite la valeur 17 pour la période. Commentez à nouveau.

3 – Pour augmenter la résolution fréquentielle, utilisez le script *fft2d_resolution.m*. Faites varier maintenant l'orientation du signal 2-D : essayez $\pi/2$, et $\pi/4$ (période 16 et $16*\sqrt{2}$).

4 – Lancez les scripts *fft2d_carre.m* et *fft2d_damier.m*. Jouez avec les paramètres et interprétez les résultats.

5 – À partir du script *fft2d_sinus.m*, écrivez un script qui affiche une image naturelle et son module de FFT2D. Lancez ce script sur plusieurs images.

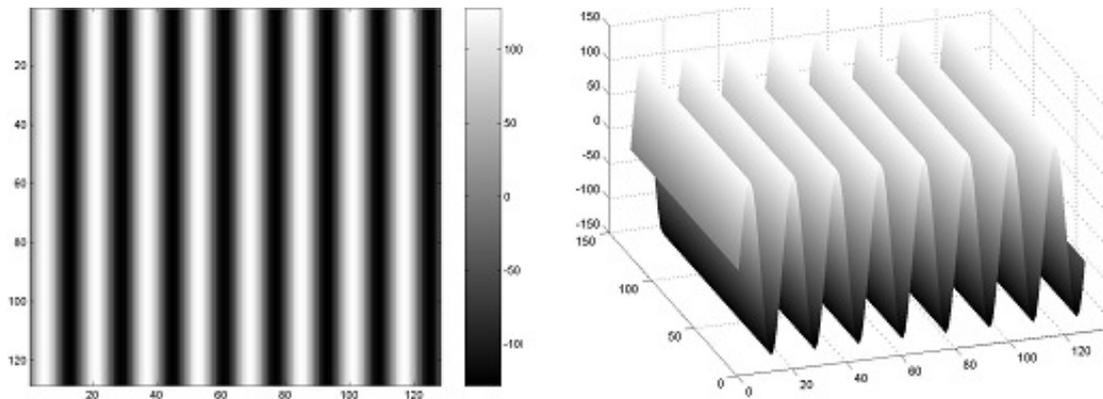
Correction de l'exercice : FFT

1 - Le fichier `fft2d_sinus.m` permet d'observer la transformée de Fourier discrète d'un signal 2-D sinusoïdal.

Dans un premier temps, on définit les caractéristiques du signal 2-D sinusoïdal que l'on veut utiliser : taille de l'image, période, orientation, amplitude, et valeur moyenne. Puis, la fonction `generation_sinus`, qui vous est fournie ici, permet de générer un signal 2-D sinusoïdal à partir de ces caractéristiques.

```
taille = 128
periode = 16
orientation = 0
amplitude = 128
val_moy = 0
im1 = generation_sinus(taille,periode,orientation,amplitude,val_moy);
```

L'image de la sinusoïde peut être ensuite visualisée de deux façons : en vue de dessus (vision 2-D avec la fonction `imagesc`) et en perspective (vision 3-D avec la fonction `surf`) :



On remarque que la direction horizontale de la sinusoïde entraîne l'apparition de bandes verticales sur l'image. Une fois que l'image de la sinusoïde est générée et stockée dans `im1`, on calcule sa transformée de Fourier discrète rapide (FFT) avec la fonction `fft2` de Matlab.

```
spectrel = fft2(im1)/(taille*taille);
```

Puis, on utilise la fonction `fftshift` pour que la composante fréquentielle spatiale (0,0) soit déplacée au centre du support du spectre.

```
spectrel = fftshift(spectrel);
```

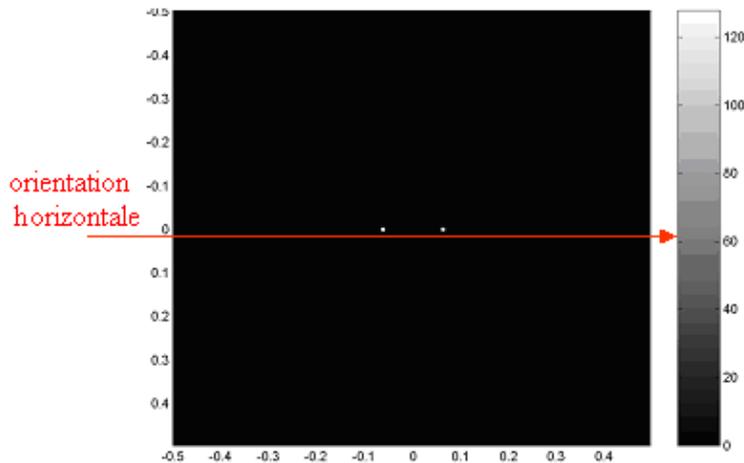
Enfin, les vecteurs normalisés représentent les fréquences spatiales horizontales et verticales. Ici, ces vecteurs possèdent la même taille et les mêmes composantes donc :

```
vt = (-taille/2:1:(taille/2-1))/taille;
```

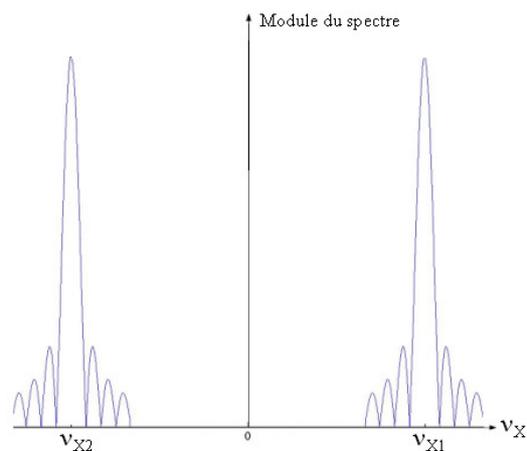
Le module du spectre peut s'afficher avec la commande :

```
imagesc(vt,vt,(abs(spectre1)));
```

L'image du module du spectre est la suivante (image aussi appelée « **Plan de Fourier** ») :



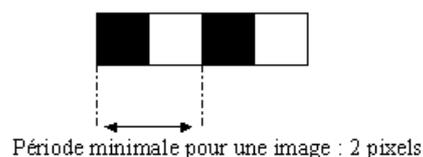
On aperçoit au centre deux points blancs. Dans la suite de l'exercice, on montrera qu'il ne s'agit pas de deux impulsions, mais des deux lobes principaux de sinus cardinaux, obtenus par transformation de Fourier rapide (FFT, pour *Fast Fourier Transform*) de la **sinusoïde sur un support fini** :



Enfin, on note que l'orientation définie par ces deux points est horizontale (elle est donc orthogonale aux orientations verticales des bandes que l'on observait sur l'image de la sinusoïde).

Remarque :

La période pour un signal d'image correspond au nombre de pixels minimal qui sépare deux motifs identiques dans l'image. La période minimale pour un motif dans une image est donc de deux pixels :



La fréquence spatiale normalisée maximale v_{\max} est donc égale à :

$$v_{\max} = \frac{1}{\text{période minimale}} = \frac{1}{2}$$

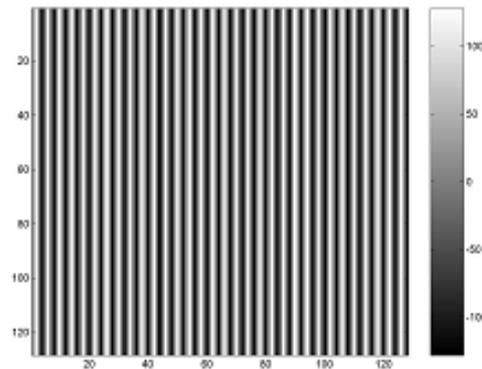
En traitement d'images numériques, le module du spectre d'une image peut être représenté selon les **fréquences spatiales normalisées** qui varient donc sur l'intervalle $[-0.5, 0.5]$.

Soit T la période en pixel, on définit alors la fréquence normalisée v_{norm} correspondante par : $v_{\text{norm}} = 1/T$.

2 -

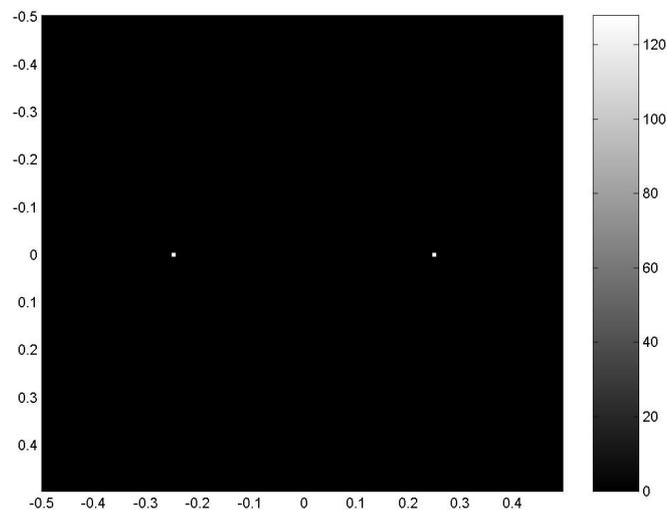
▪ Modification de la période :

En diminuant la période spatiale de la sinusoïde (valeur 4), on obtient les images suivantes :



Sur l'image, on peut voir une raie tous les quatre pixels.

L'image du module du spectre est donnée ci-dessous :



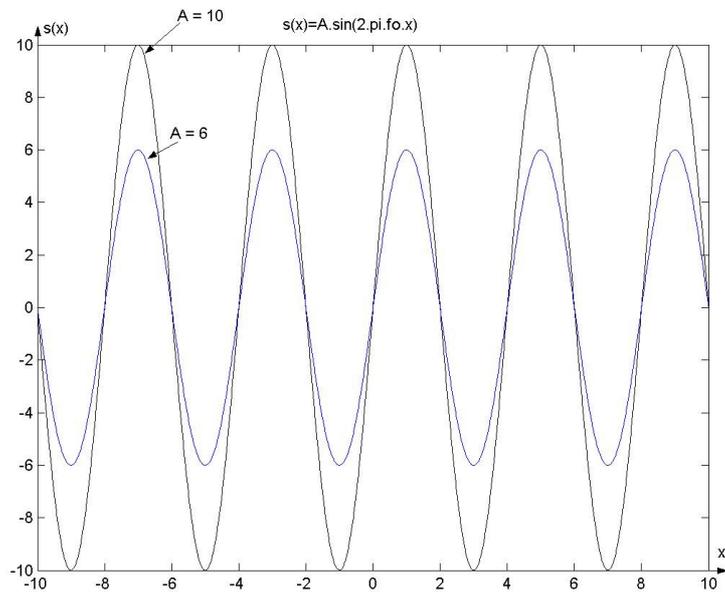
Les deux points sont aux fréquences normalisées :

$$\{v_{1x} = -0.25, v_{1y} = 0\} \text{ et } \{v_{2x} = 0.25, v_{2y} = 0\}$$

Dans cette configuration particulière où l'orientation de la sinusoïde 2-D est à 0° , il est possible de représenter une ligne de ce signal 2-D par une sinusoïde 1-D qui se propage selon l'axe horizontal (Ox). Les fréquences spatiales horizontales v_{1x} , et v_{2x} sont donc égales, au signe près, à l'inverse de la période spatiale : $v_{1x} = -1/T$ et $v_{2x} = 1/T$.

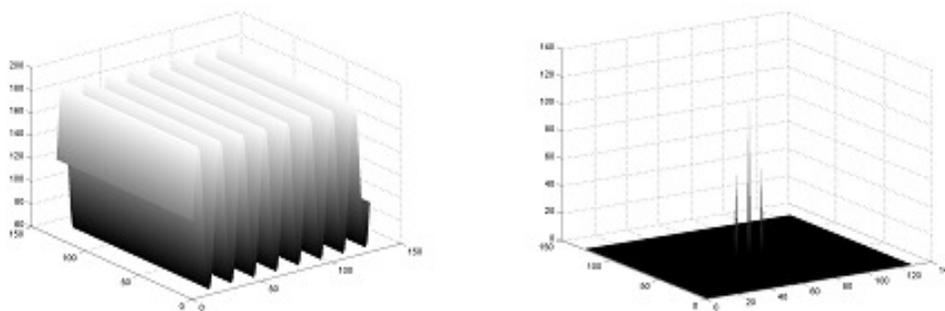
▪ Modification de l'amplitude

La sinusoïde évolue sur l'intervalle $[-A, A]$, où A est l'amplitude de la sinusoïde. L'augmentation de l'amplitude A modifie l'amplitude des deux pics déjà observés.



▪ Modification de la valeur moyenne :

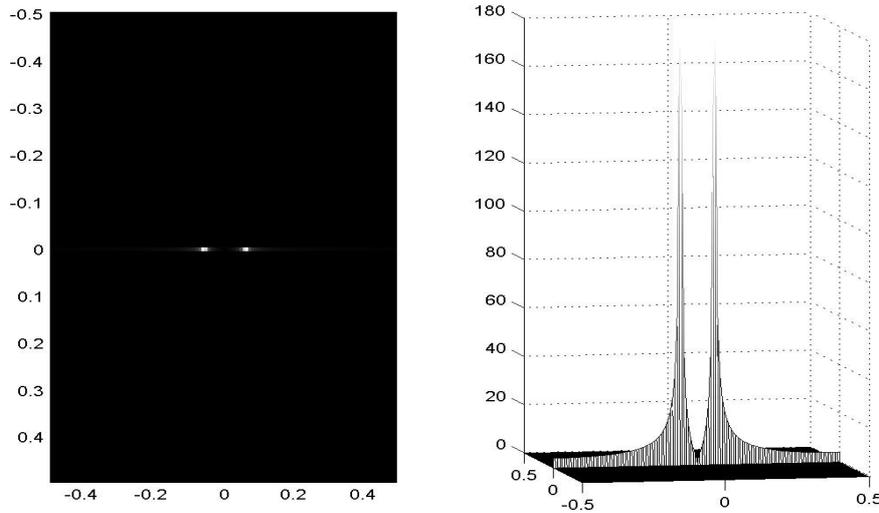
En augmentant la valeur moyenne V_M , on obtient les résultats suivants :



Le module du spectre, sur la figure de droite, présente en son centre une nouvelle composante en plus des deux composantes précédentes. Il s'agit en fait de la composante continue du spectre située aux fréquences spatiales $\{v_x = 0, v_y = 0\}$ qui résulte de la valeur moyenne de la sinusoïde.

▪ Période T = 17 :

Pour une période T = 17, le module du spectre obtenu est le suivant :



Sur le plan de Fourier (à gauche), les deux points blancs sont « étalés ». Pour obtenir une meilleure visualisation, on affiche le module du spectre en vision 3-D (à droite). On observe alors que le module du spectre n'est plus composé de deux impulsions, et qu'il ressemble d'avantage à l'enveloppe d'un sinus cardinal.

Pour expliquer ce phénomène, on considère une sinusoïde 1-D, notée f(x) et définie par :

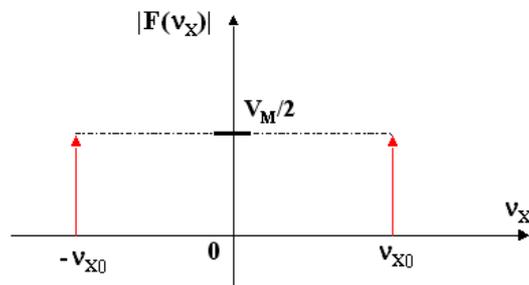
$$f(x) = V_M \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot x)$$

Le spectre F(v_x) de cette sinusoïde est donc défini par :

$$F(v_x) = V_M \cdot \left(\frac{1}{2j} \cdot \delta(v_x - v_{x0}) + \frac{j}{2} \cdot \delta(v_x + v_{x0}) \right)$$

où « j » désigne le nombre complexe tel que j² = -1, et v_{x0} = 1/T.

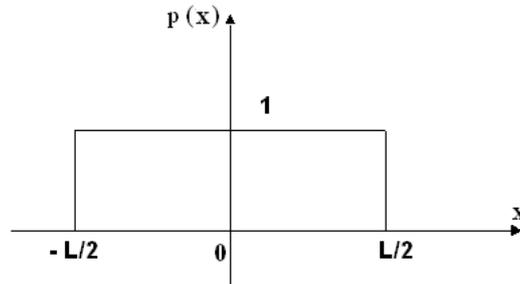
Le module de spectre |F(v_x)| est représenté sur la figure ci-dessous :



Ce spectre est défini pour une sinusoïde de **support infini** (x variant de -∞ à +∞). En pratique une image n'est jamais représentée sur un support infini, on effectue donc un fenêtrage de la sinusoïde par une fonction porte notée p(x). La fonction p(x) est définie par :

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-L/2; L/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Représentation de $p(x)$:



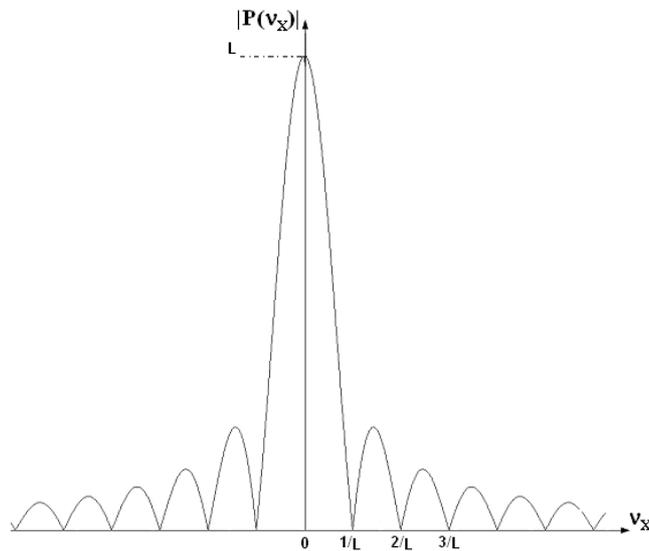
Le spectre $P(v_x)$ de cette fonction porte est défini par :

$$P(v_x) = L \cdot \text{sinc}(L \cdot \pi \cdot v_x)$$

Où « sinc » exprime un sinus cardinal : $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$.

Dans le script `fft2d_sinus.m`, la taille de l'image est de 128 x 128 pixels. La sinusoïde se déplace selon (0x), on a donc $L = 128$.

Le module du spectre $|P(v_x)|$ est représenté sur la figure ci-dessous :



On remarque sur cette figure que la largeur d'un lobe secondaire du sinus cardinal vaut $1/L$.

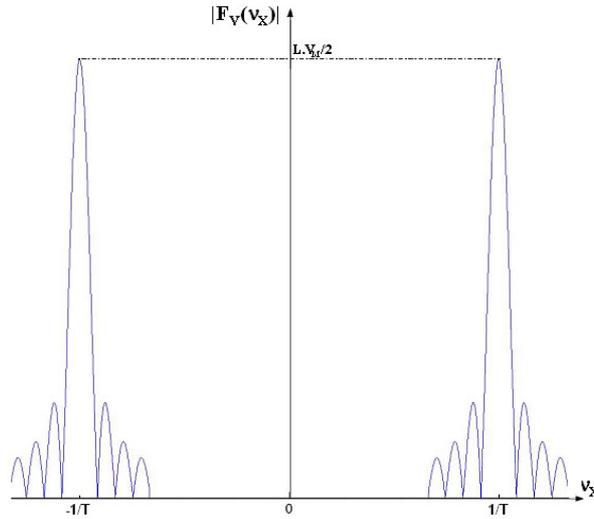
Ainsi, la sinusoïde $f_v(x)$ visualisée est, en réalité, une fonction de la forme :

$$f_v(x) = f(x) \cdot p(x)$$

Donc le spectre $F_v(v_x)$ est donnée par la relation :

$$F_v(v_x) = F(v_x) \otimes P(v_x) = \frac{1}{2} \cdot v_m \cdot \left(\frac{1}{j} \cdot P(v_x - v_{x0}) + j \cdot P(v_x + v_{x0}) \right)$$

Le module du spectre $|F_V(v_x)|$ de la sinusoïde $f_v(x)$ de période T et d'amplitude V_M , sur un support fini de taille L , est représenté sur la figure ci-dessous :

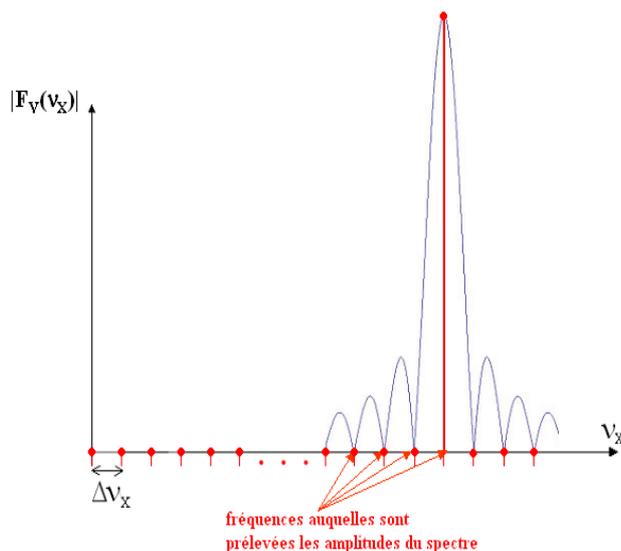


En outre, pour représenter le spectre de cette sinusoïde, on calcule une Transformée de Fourier rapide (donc **numérique**). Le spectre est donc représenté par un nombre fini de ses points. Par défaut, avec la fonction **fft2**, ce nombre de point est égal au nombre de pixels dans chacune des directions (horizontales et verticale).

Dans notre configuration, le nombre de pixels est le même selon les deux directions. Après calcul de la FFT, on a donc un module du spectre $|F_{Vs}|$ représenté par 128 points du module du spectre $|F_V|$ pour les fréquences spatiales horizontales. On a alors une résolution fréquentielle Δv_x en horizontal définie par : $\Delta v_x = 1/128$.

On remarque que $1/L = \Delta v_x$: sur le spectre de la sinusoïde a support fini, la largeur d'un lobe secondaire du sinus cardinal est égale à la résolution fréquentielle en horizontal.

Ainsi, si la période T de la sinusoïde est inversement proportionnelle à la résolution fréquentielle horizontale (i.e. $1/T = k.\Delta v_x$, où « k » est un entier naturel non nul), le module du spectre $|F_{Vs}|$ ne représente que les valeurs maximales des sinus cardinaux du module du spectre $|F_V|$ (les lobes secondaires disparaissent) :

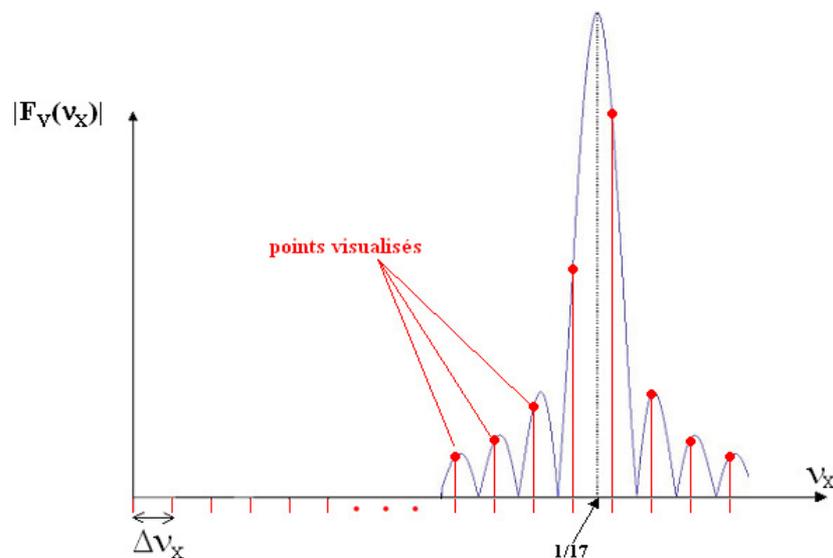


Ainsi pour les périodes :

- $T = 4, \frac{1}{4} = 32 \times \frac{1}{128} ;$
- $T = 8, \frac{1}{8} = 16 \times \frac{1}{128} ;$
- $T = 16, \frac{1}{16} = 8 \times \frac{1}{128} ;$

Pour ces trois périodes, la condition $1/T = k \cdot \Delta v_x$ est vérifiée. On visualise donc uniquement la valeur maximale des sinus cardinaux. Les autres composantes du spectre étant nulles, le module du spectre ressemble à deux impulsions (cf. 1).

Pour une période $T = 17$, la condition $1/T = k \cdot \Delta v_x$ n'est pas vérifiée. On visualise donc des échantillons des lobes secondaires des sinus cardinaux :



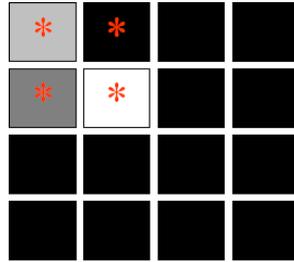
Pour pouvoir visualiser les lobes secondaires, quelle que soit la période, il faut augmenter la résolution fréquentielle pour satisfaire à la condition : $\Delta v_x < 1/L$.

3 - Le script **fft2d-resolution.m** permet d'augmenter la **résolution fréquentielle** de l'image. On choisit pour une dimension (horizontale puis verticale, ou inversement) un nombre de points N_2 pour calculer la FFT. Ce nombre de points doit être supérieur au nombre de points N_1 de l'image sur la même dimension (horizontale ou verticale). Les points introduits ont la valeur zéro (*zero-padding*).

Prenons le cas simple d'une image monochrome de taille 2×2 ($N_1=2$) :

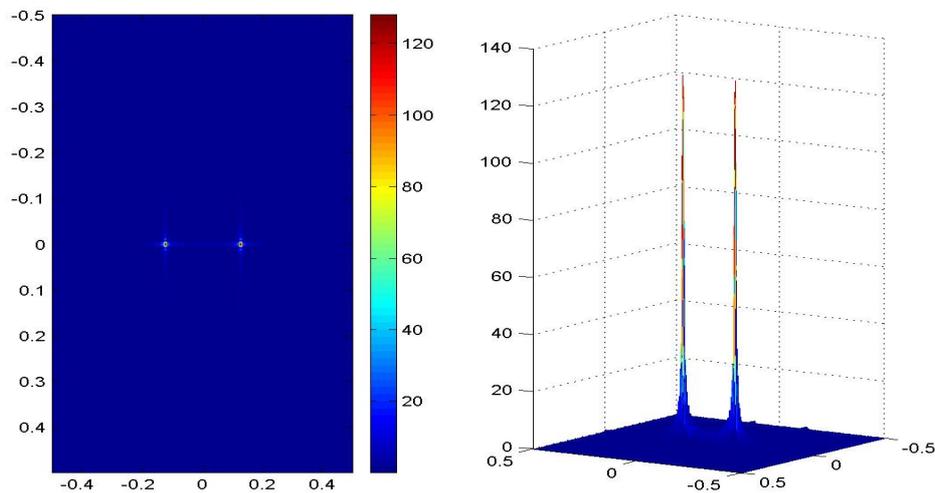


On choisit d'augmenter la résolution fréquentielle en calculant la FFT avec non plus 2, mais 4 points pour chaque dimension. La FFT sera donc calculée sur l'image suivante ($N_2=4$) :

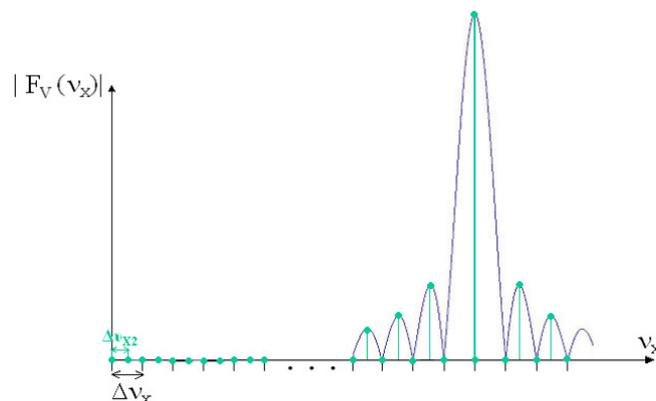


Les quatre pixels de l'image de référence 2x2 sont marqués d'une étoile rouge. Les autres pixels noirs (valeur 0) ont été ajoutés pour obtenir une image de taille 4x4.

Pour calculer, sous Matlab, la FFT avec une plus grande résolution fréquentielle, il suffit de passer le nombre de points N_2 en paramètre de la fonction `fft2` : `fft2(im1,N2,N2)`. Voici les résultats obtenus pour une période $T = 8$ et la sinusoïde 2-D :



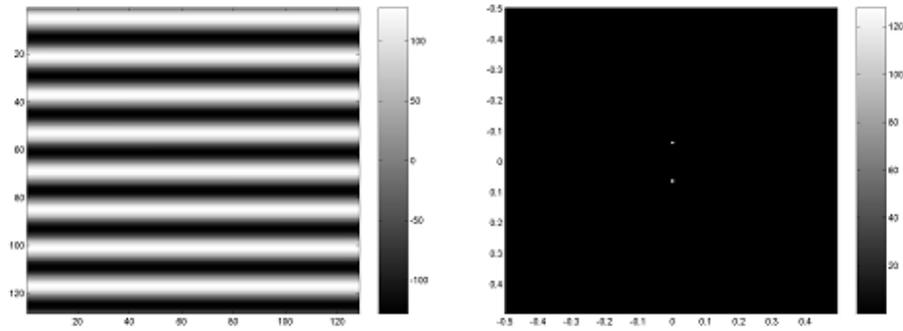
En augmentant la résolution fréquentielle, les lobes secondaires des sinus cardinaux du spectre apparaissent même pour les signaux dont la période vérifie $1/T = k \cdot \Delta v_x$. En effet, considérons, par exemple, une résolution fréquentielle doublée : $\Delta v_{x2} = 2 \cdot \Delta v_x$:



Les lobes secondaires du spectre sont maintenant représentés par des valeurs non nulles (valeurs maximales dans le cas présent).

Modification de l'orientation :

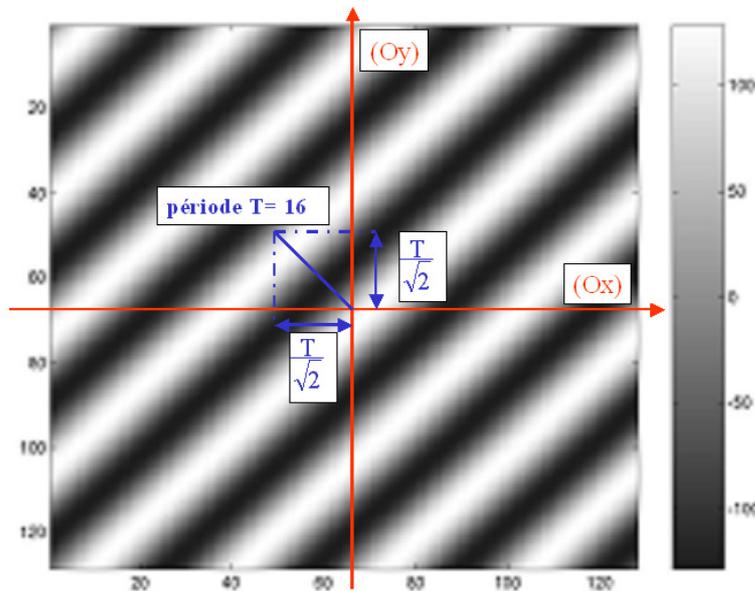
En prenant une orientation de $\pi/2$ (période = 16 pixels), on obtient les résultats suivants :



Il était prévisible qu'en ajoutant à l'orientation de la sinusoïde un angle de $\pi/2$:

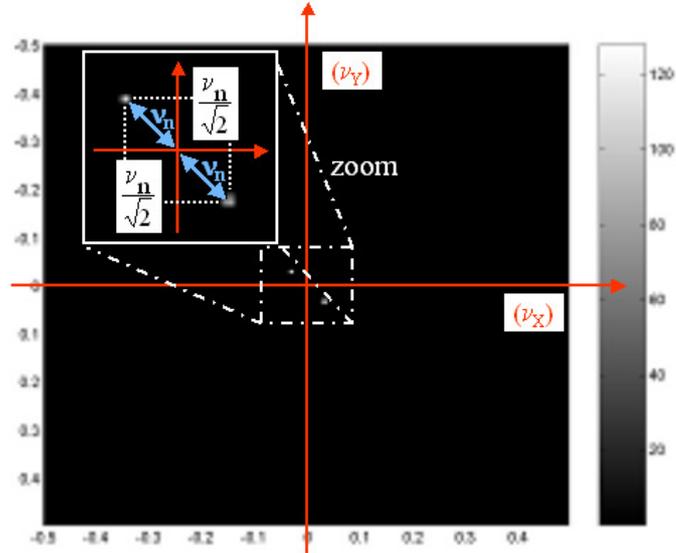
- la propagation soit perpendiculaire à celle de la sinusoïde de référence (les bandes sont maintenant horizontales dans l'image de gauche) ;
- la direction définie par les deux points du module du spectre soit perpendiculaire, à la fois, aux bandes de l'image qu'il représente et à la direction définie sur le spectre d'origine (image de droite).

De même en prenant une orientation de $\pi/4$ (période = 16 pixels), l'orientation de la propagation de la sinusoïde a été modifiée d'un angle de $-\pi/4$. On observe des structures périodiques horizontalement et verticalement. Ces structures contribuent à créer une structure périodique en diagonale de période $T = 16$. Les périodes horizontales et verticales sont donc égales à $\frac{T}{\sqrt{2}}$ pixels :

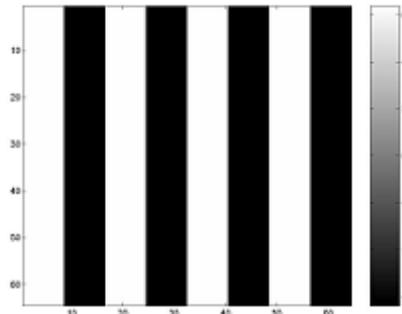


Sur l'image ci-dessous, le module du spectre est représenté par deux points situés respectivement aux coordonnées : $\left(-\frac{v_n}{\sqrt{2}}; \frac{v_n}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(\frac{v_n}{\sqrt{2}}; -\frac{v_n}{\sqrt{2}}\right)$, avec $v_n = \frac{1}{T}$.

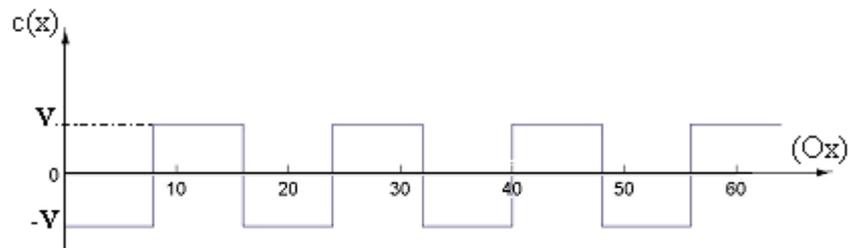
Ces points définissent une direction perpendiculaire aux bandes observées sur l'image précédente. L'analyse de Fourier 2-D fournit donc une indication sur l'orientation spatiale du signal.



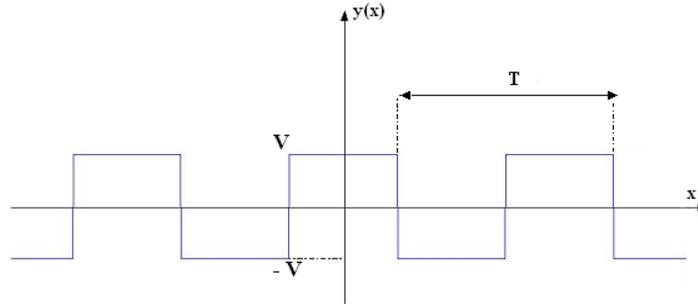
4 - Après avoir lancé le script `ff2d_carre.m`, on obtient l'image suivante :



Le signal 2-D est un signal carré qui évolue selon l'axe horizontal (Ox). Il est possible de représenter une ligne de cette image par un signal carré 1-D selon l'axe (Ox) :

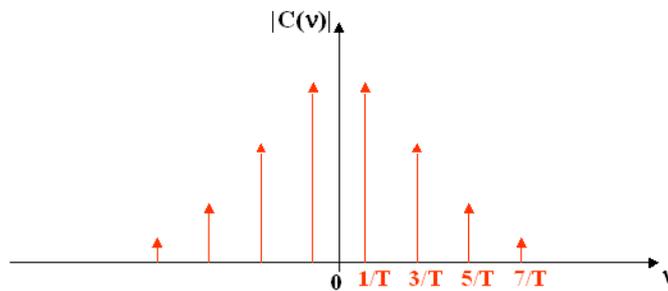


On sait que pour une onde carrée de la forme :



La transformée de Fourier est : $Y(v) = \sum_n V \cdot \text{sinc}(n/2) \cdot \delta(v - n/T)$. Si on note T_1 la période de $c(x)$, on a donc : $c(x) = y(x + T_1/4) = y(x) \otimes \delta(x + T_1/4)$.

Ainsi : $C(v) = Y(v) \cdot \exp(2j\pi v \cdot T_1/4)$, en module les spectre $C(v)$ et $Y(v)$ sont donc identiques et représentés par :

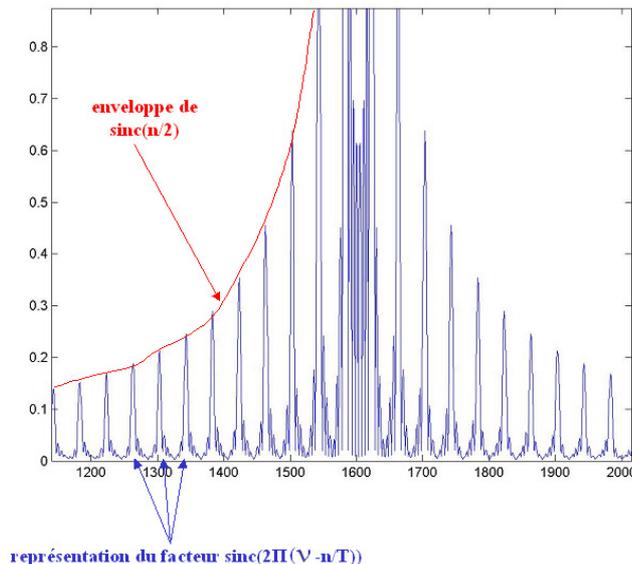


Ici, le signal est considéré infini. Ce n'est pas le cas dans la réalité pour une image, il faut donc - comme pour la sinusoïde - effectuer une multiplication par la fonction porte $p(t)$ utilisée précédemment. On a donc :

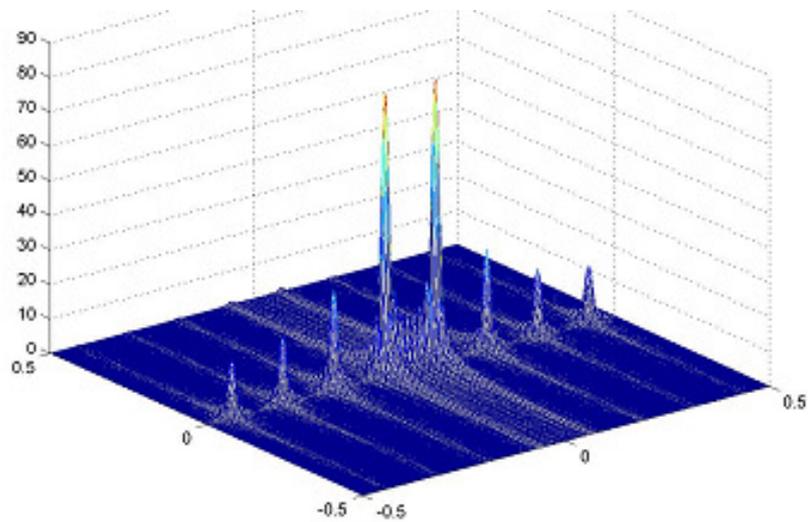
$$|C(v)| = \left| \sum_n V \cdot \text{sinc}(n/2) \cdot \delta(v - n/T) \otimes L \cdot \text{sinc}(2\pi v) \right|$$

$$D'où : |C(v)| = V \cdot L \cdot \sum_n |\text{sinc}(n/2) \cdot \text{sinc}(2\pi(v - n/T))|$$

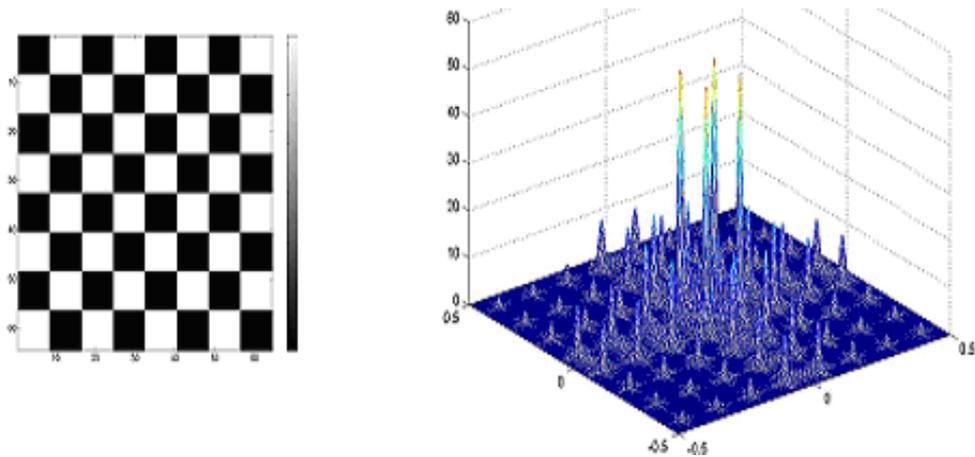
Le module du spectre $C(v)$ est donc obtenu par la multiplication de deux sinus cardinaux : un propre au support fini du signal, l'autre propre au signal carré proprement dit. Le module du spectre est donc obtenu en remplaçant, sur la figure précédente, les impulsions de Dirac par des sinus cardinaux. Notons que la valeur moyenne du signal est nulle, il n'y a donc pas de gain en continu. Ainsi, le module du spectre est de la forme suivante :



C'est le résultat qu'on observe sur la représentation du module du spectre du signal carré 2-D :



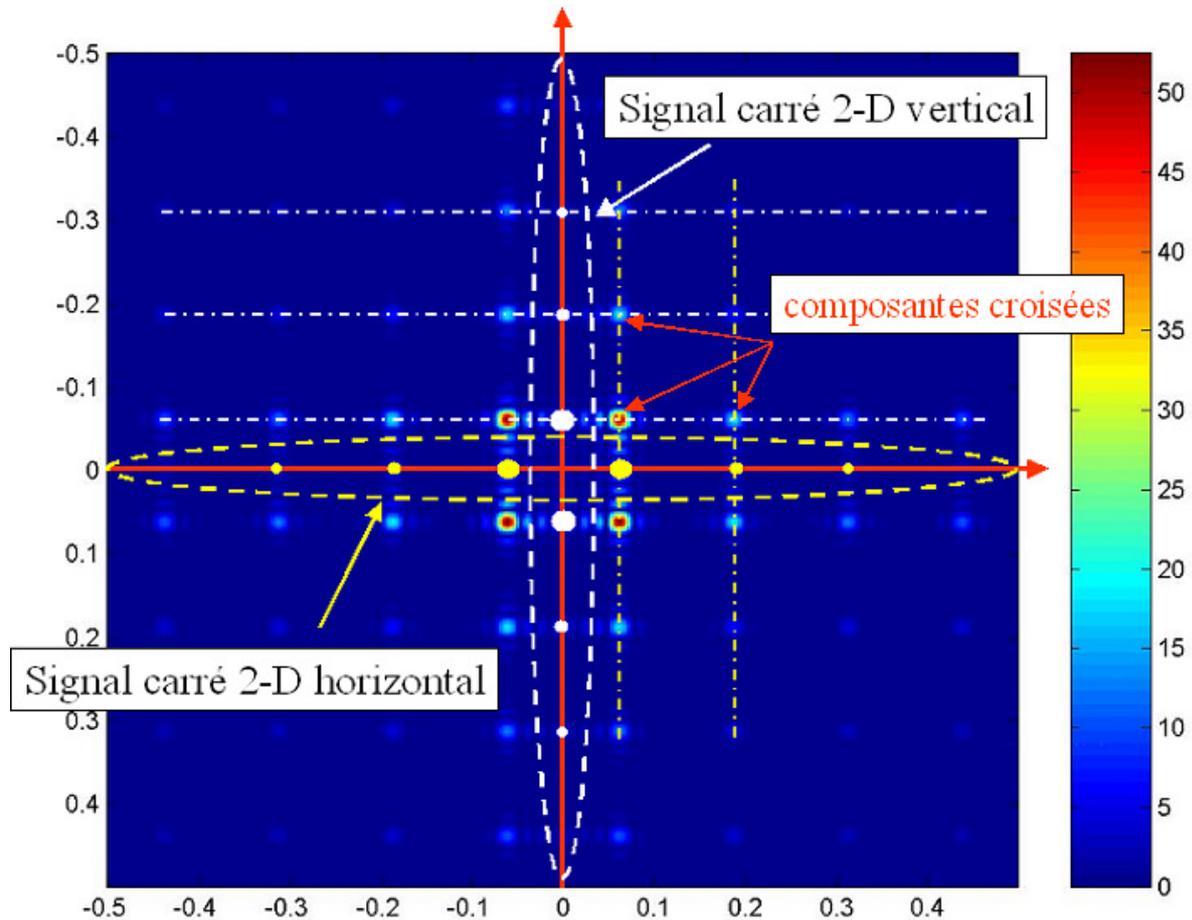
Après avoir lancé le script `ff2d_damier.m`, on obtient l'image et le module du spectre associés suivants (période = 16) :



Le damier est obtenu en prenant, en entrée d'un opérateur « XOR », deux ondes carrées orthogonales entre elles (ici une onde verticale et une onde horizontale). Sur le module du spectre (à droite), on reconnaît alors des amplitudes croisées similaires à celles obtenues dans le cas d'une simple onde carrée.

Par ailleurs, sur l'image du damier (à gauche), on remarque que les structures sont à présent périodiques suivant les diagonales de l'image.

La figure ci-dessous présente le plan de Fourier pour l'image du damier (période = 16). On représente ici les modules des spectres des deux signaux carrés 2-D de base : un signal horizontal et l'autre vertical. Les composantes du module du spectre de l'image du damier résultent alors des croisements des composantes de ces deux signaux carrés de base.



5 - Voici un exemple de script, inspiré de `fft2d_sinus.m`, pour afficher le spectre de l'image `CLOWN_LUMI` :

```

im1=imread('CLOWN_LUMI.BMP') ;
% on affiche l'image en niveaux de gris
figure(1);
imagesc(im1);
map = 0:1/255:1;
map = [map',map',map']; % LUT pour afficher en niveau de gris
colormap(map);
% on calcule sa transformée de Fourier
[taille1, taille2]=size(im1(:,:,1)) ;
nb_point1 = 2*taille1;
nb_point2 = 2*taille2;
spectrel = fft2(im1,nb_point1,nb_point2) / (taille1*taille2);
spectrel = fftshift(spectrel);
%pour diminuer la composante continue
spectrel = 2*spectrel;
spectrel(taille1/2+1,taille2/2+1)=spectrel(taille1/2+1,taille2/2+1)/2;
% on définit les vecteurs de fréquences normalisées
vt1=(-taille1/2:taille1/nb_point1:(taille1/2-taille1/nb_point1))/taille1;
vt2=(-taille2/2:taille2/nb_point2:(taille2/2-taille2/nb_point2))/taille2;

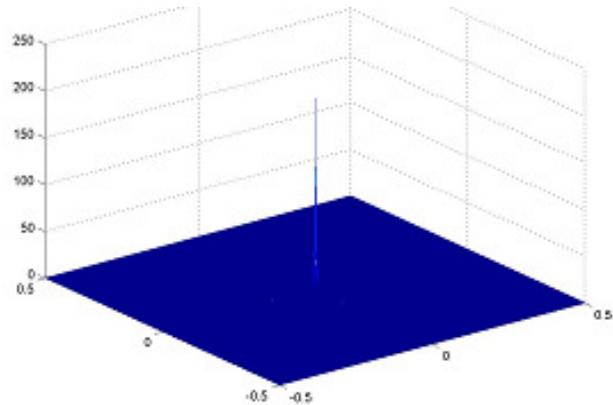
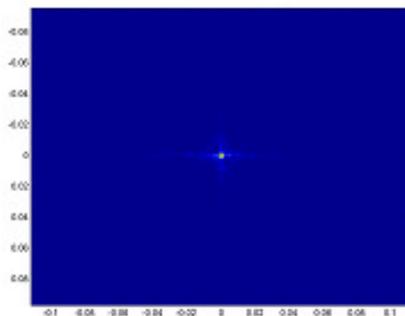
```

```

% on affiche le module de la FFT
figure(2);
imagesc(vt1,vt2,(abs(spectrel)));
%representation 3-D
figure(3)
[X,Y]=meshgrid(vt1,vt2);
mesh(X,Y,abs(spectrel));

```

On obtient le spectre suivant :



Comme pour la plupart des images naturelles, le spectre de l'image *CLOWN_LUMI* possède une forte composante continue, et très peu de composantes en moyennes et hautes fréquences spatiales. Compte tenu de la dynamique du module du spectre (valeurs importantes en basses fréquences), on affichera le logarithme en base 10 de ce module :

```

% on affiche le module de la FFT
figure(2);
imagesc(vt1,vt2,(log10(abs(spectrel))));
colormap(map) ;

```

Voici le plan de Fourier obtenu alors :

