

Module M3S9

**PROPAGATION des ONDES
ELECTROMAGNETIQUES**

Chapitre 1 : LES EQUATIONS DE L'ELECTROMAGNETISME

I. INTRODUCTION

Il existe deux façons distinctes d'aborder l'électromagnétisme.

La première consiste à reprendre chronologiquement les développements théoriques et expérimentaux qui ont abouti au niveau de connaissance actuelle ; il s'agit d'une approche « historique ».

La seconde consiste à poser les lois générales comme postulat de départ (quitte à particulariser par la suite) pour en déduire toutes les implications possibles ; il s'agit d'une approche « axiomatique ».

La seconde approche, si elle peut paraître plus complexe et plus abstraite a priori, présente l'avantage de s'appuyer d'emblée sur un formalisme général. C'est cette approche qui sera utilisée dans ce cours.

II. DEFINITION

D'une manière générale, l'électromagnétisme a pour but d'étudier les interactions entre particules chargées en mouvement.

En pratique, si l'on s'intéresse à une charge ponctuelle particulière, il est généralement plus simple de relier l'influence qu'elle subit de l'ensemble des autres charges à une propriété de l'espace et du temps. Cette propriété de l'espace et du temps est représentable par deux vecteurs \vec{E} et \vec{B} qui constituent ce que l'on appellera le champ électromagnétique.

On établit ainsi qu'une charge électrique ponctuelle q , de vitesse \vec{v} , située au point \vec{r} à l'instant t , subit une force électromagnétique \vec{F} , dite force de Lorentz, et vérifiant :

$$\vec{F} = q[\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t)]$$

(I.1)

Dans cette équation, aucune référence explicite aux charges qui agissent sur q n'est nécessaire. Les vecteurs \vec{E} (champ électrique en $V.m^{-1}$) et \vec{B} (induction magnétique en $Wb.m^{-2}$) sont utilisés pour « globaliser » l'action de toutes ces charges sur la charge q . Ces champs sont produits par ces charges (qualifiées dès lors de sources) et se substituent à elles dans la représentation des phénomènes.

La mise en évidence de la force de Lorentz représente la seule façon pratique d'observer (indirectement) cette propriété de l'espace et du temps qu'est le champ électromagnétique.

II.1 Densité de charge et de courant

Pour que la notion de champ électromagnétique ait une utilité pratique, il est indispensable d'être en mesure d'établir le lien qui unit le champ aux sources qui lui ont donné naissance. Pour ce faire, il convient d'abord d'adopter un formalisme général pour représenter ces sources (un ensemble de particules chargées éventuellement en mouvement).

A l'échelle microscopique, une particule ponctuelle est caractérisée, comme on vient de le voir, par sa charge électrique q , en Coulomb (C) et sa vitesse instantanée \vec{v} (en $m.s^{-1}$).

A l'échelle macroscopique, on ne considère plus des charges discrètes mais des répartitions continues de charge dans l'espace. On définit pour ce faire:

- une densité volumique de charge $\rho(\vec{r}, t)$ (en $C.m^{-3}$)
- une vitesse associée $\vec{v}(\vec{r}, t)$ (en $m.s^{-1}$)

Concrètement, ρ définit la quantité moyenne de charge électrique par unité de volume, au voisinage du point \vec{r} et à l'instant t .

\vec{v} représente la moyenne (spatiale) des vitesses instantanées des charges, au voisinage de \vec{r} et à l'instant t .

En pratique, la notion de vitesse est peu utilisée et on lui préfère la notion de vecteur densité de courant (en $A.m^{-2}$) :

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t)$$

(I.2)

Des grandeurs dérivées peuvent être calculées à partir de ces quantités fondamentales que sont ρ et \vec{J} .

En remarquant que la charge infinitésimale dq présente, à l'instant t , dans un volume dV au voisinage de \vec{r} , est égale à $\rho(\vec{r}, t)dV$, on établit que la charge totale Q_V dans un volume V à l'instant t est ainsi donnée par :

$$Q_V(t) = \iiint_V dq = \iiint_V \rho(\vec{r}, t)dV$$

(I.3)

Une autre grandeur, souvent employée en électronique, est le courant électrique i_s (en A). Il représente la charge électrique moyenne traversant une surface S donnée, par unité de temps :

$$i_s(t) = \frac{dq}{dt}$$

(I.4)

Dans cette relation, dq représente la quantité infinitésimale de charge traversant la surface S , entre les instants t et $t+dt$.

Il existe une relation directe entre i_s et \vec{J} . Pour le montrer, on considère dS un élément de surface infinitésimal sur S et d^2q la quantité de charge qui le traverse pendant l'intervalle de temps dt (il s'agit d'un « double infinitésimal », par rapport au temps et par rapport à l'espace, d'où la notation d^2q). d^2q peut être exprimée en considérant la quantité de charge située dans le volume dV en amont de dS (volume qui va se vider au travers de dS pendant l'intervalle de temps dt) :

$$d^2q = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS dt$$

(I.5)

Dès lors :

$$dq = \iint_S d^2q$$

(I.6)

où ρ et \vec{v} sont respectivement la densité volumique de charge et la vitesse instantanée de celles-ci (toutes les deux supposées constantes au voisinage de dS).

En reportant dans (I.4), il vient :

$$i_s(t) = \iint_S \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} dS \quad (\text{I.7})$$

Le courant i_s représente donc le flux de \vec{J} à travers S .

II.2 Conservation de la charge

Le vecteur densité de courant et la densité de charge sont liés, comme l'exprime la relation (I.2). Cette dépendance peut être mise en évidence différemment (et surtout sans faire référence à \vec{v}) en considérant les variations de la charge Q_v contenues dans un volume V pendant l'intervalle de temps $[t, t+dt]$. On note S la surface fermée délimitant V . Le courant $i_s(t)$, défini positivement dans le sens de la normale sortante \vec{n} , est liée à la quantité de charge quittant le volume V pendant l'intervalle de temps considéré. Dès lors :

$$i_s(t) = -\frac{dQ_v(t)}{dt} \quad (\text{I.8})$$

où le signe $-$ traduit la perte de charge résultante pour le volume V .

En utilisant (I.3) et (I.7), il vient :

$$\iint_S \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} dS = \iiint_V -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) dV \quad (\text{I.9})$$

On rappelle que la formule de Green Ostrogradski (formule dite de la divergence) permet de transformer le flux d'un vecteur (ici \vec{J}) à travers une surface fermée (ici S) par l'intégrale volumique de sa divergence sur le volume (ici V) délimité par la surface :

$$\iint_S \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) dV \quad (\text{I.10})$$

Par substitution dans (I.9), on déduit que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t)$$

loi de conservation de la charge

(I.11)

Cette relation est appelée la loi de conservation de la charge.

Remarque :

Avec le formalisme de la densité volumique de charge, on conserve la possibilité de traiter des charges ponctuelles à condition de s'appuyer sur la théorie des distributions. La distribution de charge associée à une charge ponctuelle immobile en \vec{r}_0 s'exprime ainsi :

$$\rho(\vec{r}, t) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

(I.12)

où δ représente l'impulsion de Dirac volumique :

En résumé, on retiendra que dans un problème d'électromagnétisme, les sources du champ sont représentées par la densité de charge ρ et la densité de courant \vec{J} et que ces deux grandeurs sont reliées par la loi de conservation de la charge.

III. LES EQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE

III.1 Equations de Maxwell en régime variable quelconque

Les équations de Maxwell permettent de relier le champ électromagnétique aux sources qui lui ont donné naissance. Elles sont données ici dans le vide.

En fait, ces quatre équations se scindent en deux groupes de deux équations: le premier groupe traduit des propriétés intrinsèques du champ (indépendamment des sources) et le second renseigne réellement sur la dépendance de celui-ci vis-à-vis des sources.

Chaque équation possède une forme locale dont l'intérêt principal est la concision et une forme intégrale dont l'intérêt principal est la facilité d'interprétation. Les formes locales ne sont valables qu'en des points réguliers de l'espace (milieu homogène) alors que les formes intégrales sont utilisables pour établir les relations de continuité entre des milieux différents.

Dans le premier groupe, l'équation dite de Maxwell-Faraday, s'écrit, sous forme locale :

$$\boxed{\vec{\nabla}_x \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t)}$$

(I.13)

La forme intégrale (loi de Faraday) s'obtient en intégrant (I.13) sur une surface S, délimitée par un contour orienté C :

$$\iint_S \vec{\nabla}_x \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} \, dS = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} \, dS$$

(I.14)

où \vec{n} est la normale à S définie en cohérence avec l'orientation du contour C.

On rappelle que la formule de Stokes (formule dite du rotationnel) permet d'exprimer le flux du rotationnel d'un vecteur à travers une surface S comme la circulation de ce vecteur le long du contour C de S :

$$\iint_S \vec{\nabla}_x \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} \, dS = \int_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l}$$

(I.15)

Finalement, on obtient:

$$\boxed{\int_C \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} \, dS}$$

(I.16)

L'intégrale surfacique du deuxième membre est appelée le flux magnétique.

Littéralement, cette équation exprime donc l'égalité entre la circulation du champ électrique le long d'un contour fermé C et les variations temporelles du flux magnétique à travers la surface S délimitée par le contour.

Plus concrètement, des variations de l'induction magnétique en fonction du temps sont suffisantes pour créer un champ électrique dont les lignes de champ «s'enroulent» autour de celles du champ magnétique...

La deuxième équation du premier groupe s'exprime, sous forme locale :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0}$$
(I.17)

La forme intégrale s'obtient en intégrant sur un volume V et en appliquant la formule de la divergence. On obtient :

$$\boxed{\iint_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} \, dS = 0}$$
(I.18)

où S représente cette fois la surface fermée délimitant V et de normale sortante \vec{n} .

Littéralement, cette équation exprime la nullité du flux magnétique à travers toute surface fermée S. Plus concrètement, elle traduit le fait que les lignes de champ magnétique ne peuvent pas diverger à partir d'un point de l'espace.

La première équation du second groupe (équation de Maxwell-Gauss) s'écrit, sous forme locale :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}}$$
(I.19)

et sous forme intégrale (loi de Gauss), par application de la formule de la divergence:

$$\boxed{\iint_S \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} \, dS = \frac{Q_v(t)}{\epsilon_0}}$$

(I.20)

Dans cette relation, S est une surface fermée de normale sortante \vec{n} délimitant un volume V.

Le flux électrique sortant d'un tel volume est donc proportionnel à la charge électrique totale contenue à l'intérieur. Le coefficient $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ est appelé permittivité du vide. On remarquera que c'est la présence de charges électriques dans une zone de l'espace qui autorise les lignes de champ électrique à diverger à partir de cette zone.

La deuxième équation du second groupe (équation de Maxwell-Ampère) s'écrit, sous forme locale :

$$\boxed{\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t)}$$

(I.21)

Sous forme intégrale (loi d'Ampère), on obtient, en appliquant la formule du rotationnel :

$$\boxed{\frac{1}{\mu_0} \int_C \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = i_s(t) + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} \, dS}$$

(I.22)

où C est un contour fermé délimitant une surface S de normale \vec{n} (définie en cohérence avec l'orientation de C).

La circulation de l'induction magnétique le long d'un contour fermé est donc liée :

- d'une part, au courant électrique traversant la surface délimitée par le contour
- d'autre part, aux variations du flux électrique à travers cette même surface.

Le coefficient $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ H.m}^{-1}$ est la perméabilité du vide.

III.2 Cas particuliers (Rappel)

Les régimes statiques

Les régimes statiques correspondent au cas particulier où les sources ne dépendent pas du temps :

$$\begin{cases} \vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}) & \forall t \\ \rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}) & \forall t \end{cases} \quad (\text{I.23})$$

En raison de la conservation de la charge, la deuxième relation implique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}) = 0 \quad (\text{I.24})$$

ce qui signifie que le flux de \vec{J} est conservatif.

Dans ces conditions, les équations de Maxwell se réduisent à :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{0} \\ \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{J}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

Dans ces relations, l'absence de dépendance vis-à-vis du temps pour les sources entraîne la même absence de dépendance vis-à-vis du temps pour les champs.

Surtout, les relations directes qui existaient entre \vec{E} et \vec{B} disparaissent : deux équations régissent dorénavant le comportement de \vec{E} et deux équations régissent de façon complètement indépendante le comportement de \vec{B} . Les équations de Maxwell se découplent et l'électromagnétisme se scinde en deux disciplines indépendantes : l'électrostatique d'une part et la magnétostatique d'autre part.

Rappels d'électrostatique

L'électrostatique s'intéresse au champ électrique créé par des particules chargées immobiles. La première équation de l'électrostatique :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \quad (I.26)$$

montre que le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire V (rappel : le rotationnel d'un gradient est nul) :

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})} \quad (I.27)$$

Dans cette équation V est défini à une constante près.

En réinjectant ce résultat dans la seconde équation de l'électrostatique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (I.28)$$

on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot [-\vec{\nabla}V(\vec{r})] = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (I.29)$$

soit :

$$\boxed{\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}} \quad (I.30)$$

Un problème d'électrostatique se réduit donc à la détermination de V par résolution de l'équation de Poisson (I.30) puis à celle de \vec{E} par report de V dans (I.27).

Mathématiquement, la solution générale de (I.30) est donnée par :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' \quad (\text{I.31})$$

en prenant la convention d'un potentiel nul à l'infini.

Dans cette équation, V' représente le volume dans lequel sont localisées les sources.

Rappels de magnétostatique

La magnétostatique étudie le champ magnétique créé par des courants électriques constants et conservatifs.

La première équation de la magnétostatique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (\text{I.32})$$

montre que \vec{B} dérive d'un potentiel vecteur (la divergence d'un rotationnel est nulle).

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_x \vec{A}(\vec{r})} \quad (\text{I.33})$$

Dans cette expression \vec{A} est défini à un gradient près ($\vec{\nabla}_x(\vec{A} + \vec{\nabla}f) = \vec{\nabla}_x \vec{A}$).

En réinjectant (I.33) dans la deuxième équation de la magnétostatique :

$$\vec{\nabla}_x \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}) \quad (\text{I.34})$$

et en appliquant la formule du double produit vectoriel :

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \quad (\text{I.35})$$

on établit que :

$$\vec{\nabla}[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})] - \nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}) \quad (\text{I.36})$$

L'indétermination sur le potentiel vecteur (à un gradient près) offre un degré de liberté qui permet de simplifier la relation.

Le choix arbitraire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0 \quad (\text{I.37})$$

définit une condition de jauge (dite jauge de Coulomb) qui permet ainsi d'éliminer le premier terme. On notera que la jauge de Coulomb ne garantit pas pour autant l'unicité du potentiel vecteur.

Au final, ce potentiel doit donc satisfaire l'équation de Poisson vectorielle :

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r})} \quad (\text{I.38})$$

La solution générale est évidemment similaire à celle obtenue pour le potentiel scalaire :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' \quad (\text{I.39})$$

D'où l'on déduit :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV' \quad (\text{I.40})$$

Un problème de magnétostatique se résume donc essentiellement à la résolution de l'équation de Poisson vectorielle.

Le régime quasi-statique

Le régime quasi-statique correspond à un cas intermédiaire des équations de Maxwell dans lequel on néglige les variations temporelles du champ électrique devant la densité de courant électrique (dans l'équation de Maxwell-Ampère).

Les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \\
 \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \\
 \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{J}(\vec{r}, t)
 \end{aligned}
 \tag{I.41}$$

Comme en magnétostatique, la conservation du flux magnétique permet d'écrire :

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t)}
 \tag{I.42}$$

En reportant dans l'équation de Maxwell-Faraday, on obtient :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t)
 \tag{I.43}$$

ce qui implique :

$$\vec{\nabla} \times \left[\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) \right] = \vec{0}
 \tag{I.44}$$

c'est à dire :

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) - \vec{\nabla} V(\vec{r}, t)}
 \tag{I.45}$$

Les équations (I.42) et (I.45) permettent dans ce cas encore d'exprimer les champs en fonction des potentiels scalaire et vecteur. On notera que l'expression du champ électrique est plus complexe qu'en électrostatique puisqu'il dépend ici à la fois de V et de \vec{A} .

Les équations vérifiées par les potentiels s'obtiennent en reportant les expressions des potentiels dans les équations de Maxwell restantes. L'utilisation de la jauge de Coulomb :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{I.46})$$

permet une nouvelle fois d'aboutir pour \vec{A} à une équation de Poisson vectorielle :

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t)}$$
(I.47)

La solution générale est évidemment similaire à celle obtenue en magnétostatique :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' \quad (\text{I.48})$$

Quant au potentiel scalaire, il se déduit de l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\vec{\nabla} \cdot \left[-\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) - \vec{\nabla} V(\vec{r}, t) \right] = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (\text{I.49})$$

La jauge de Coulomb permet de faire disparaître le premier terme de cette équation et d'aboutir à une équation aux dérivées partielles ne portant que sur V :

$$\boxed{\nabla^2 V(\vec{r}, t) = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}}$$
(I.50)

On retrouve au final l'équation de Poisson scalaire de l'électrostatique, de solution :

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}', t)}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' \quad (\text{I.51})$$

Le régime quasi-statique repose donc globalement sur les mêmes expressions de potentiels que les régimes statiques. Néanmoins, toutes les grandeurs dépendent maintenant de la variable t . Par ailleurs, la relation qui relie le champ électrique aux potentiels est plus complexe.

III.3 Résolution générale des équations de Maxwell

Potentiels retardés

Dans ce paragraphe, on répète, dans le cas général, la procédure de calcul des champs en fonction des sources, en utilisant l'intermédiaire que sont les potentiels.

Par rapport au cas quasi-statique, le seul changement concerne l'équation de Maxwell-Ampère. La détermination des champs en fonction des potentiels (qui n'utilise pas cette équation) reste donc inchangée :

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) - \vec{\nabla}V(\vec{r}, t)} \quad (\text{I.52})$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla}_x \vec{A}(\vec{r}, t)} \quad (\text{I.53})$$

Les équations donnant les potentiels sont :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) - \nabla^2 V(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (\text{I.54})$$

(issue de Maxwell-Gauss)

et :

$$\vec{\nabla}[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)] - \nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} V(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (\text{I.55})$$

(issue de Maxwell-Ampère)

avec :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (\text{I.56})$$

Dans ces équations, aucun choix de jauge n'a encore été fait.

On peut réécrire (I.55) de la façon suivante :

$$\vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} V(\vec{r}, t) \right] = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t) + \nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (\text{I.57})$$

et adopter la jauge (dite de Lorentz) :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} V(\vec{r}, t) = 0} \quad (\text{I.58})$$

On obtient alors :

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t)} \quad (\text{I.59})$$

et de même (en reportant (I.58) dans (I.54)) :

$$\boxed{\nabla^2 V(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} V(\vec{r}, t) = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}} \quad (\text{I.60})$$

Les équations obtenues pour les potentiels sont donc cette fois des équations de propagation avec second membre (inhomogènes).

Les solutions générales sont données par :

$$\boxed{V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}{c}\right)}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV'}$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}{c}\right)}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV'}$$

(I.61)

Interprétation des potentiels retardés

On parle de potentiels retardés pour rendre compte du fait que l'état du potentiel (et donc du champ) en un point \vec{r} et à un instant t donnés dépend de l'état de la source située à un endroit \vec{r}' de V' à un instant antérieur t' . Il n'y a donc pas instantanéité entre les variations observées au niveau de la source et les phénomènes engendrés à distance. Ce délai est une traduction directe de la propagation qui s'opère entre \vec{r} et \vec{r}' . Dans le cas du vide, la vitesse de propagation associée est c .

Parenthèse historique

Pendant longtemps, l'équation de Maxwell-Ampère est restée au stade de sa formulation quasi-statique:

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t)$$

(I.62)

En fait, les moyens expérimentaux ne permettaient pas de mettre en évidence l'effet du terme manquant $\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t)$, le plus souvent négligeable devant le terme densité de courant.

Le gros défaut de cette formulation quasi-statique est d'être incompatible avec l'équation de conservation de la charge. En effet, si l'on calcule la divergence de (I.62), on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{I.63})$$

puisque le terme de gauche de (I.62), un rotationnel, possède forcément une divergence nulle. Cette équation ne permet donc pas de rendre compte de toute la généralité de (I.11), ce qui suffit à démontrer la caractère incomplet de la formulation quasi-statique.

Le second membre de (I.62) doit donc être complété par un terme \vec{J}_D , dit densité de courant de déplacement :

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \vec{J}_D(\vec{r}, t) \quad (\text{I.64})$$

et défini par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_D(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) \quad (\text{I.65})$$

afin de rétablir la cohérence avec (I.11).

Par ailleurs, la dérivation par rapport au temps de l'équation de Maxwell-Gauss conduit à :

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) \quad (\text{I.66})$$

En égalant (I.65) et (I.66), on établit que :

$$\vec{J}_D(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (\text{I.67})$$

Le report de (I.67) dans (I.64) conduit à la forme générale de l'équation de Maxwell-Ampère, compatible cette fois (par construction même) avec la conservation de la charge.

C'est l'un des apports de J. C. Maxwell d'avoir complété cette équation, avant même que le terme ajouté ne puisse être mis en évidence expérimentalement.

III.4 Les équations de Maxwell en régime harmonique

Il est souvent plus facile (notamment dans les milieux dispersifs, comme on le verra dans le prochain chapitre) de résoudre un problème d'électromagnétisme dans le domaine fréquentiel. Pour ce faire, le champ (électrique par exemple) est exprimé comme :

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E}(\vec{r})\exp(j\omega t)]}$$
(I.68)

où $\omega=2\pi f$ représente la pulsation des variations sinusoïdales considérées. Le même type de variations est supposé pour toutes les autres grandeurs. $\vec{E}(\vec{r})$, que l'on notera parfois aussi $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$, est appelé le champ complexe.

Les équations de Maxwell en régime harmonique sont les équations vérifiées par les champs complexes. Elles se déduisent simplement des équations de Maxwell en remarquant que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ peut être remplacé par $j\omega$. On obtient alors :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\nabla}_x \vec{E}(\vec{r}) &= -j\omega \vec{B}(\vec{r}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \\ \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla}_x \vec{B}(\vec{r}) &= \vec{J}(\vec{r}) + j\omega \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r})\end{aligned}}$$
(I.69)

III.5 Nature des sources

Dans la suite, la nature des sources \vec{J} et ρ sera précisée. On distinguera ainsi les sources d'excitation proprement dites (indiquées « exci »), représentatives d'une source réelle (typiquement un générateur) et les sources induites (indiquées « c » pour conduction, « p » pour polarisation et « a » pour ampérienne), représentatives des propriétés matérielles d'un milieu donné. On notera par exemple :

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{J}_{\text{exci}}(\vec{r}, t) + \vec{J}_c(\vec{r}, t) + \vec{J}_p(\vec{r}, t) + \vec{J}_a(\vec{r}, t)$$
(I.70)

Dans la suite, la nature des sources \vec{J} et ρ sera précisée. On distinguera ainsi les sources d'excitation proprement dites (indicées « exci »), représentatives d'une source réelle (typiquement un générateur) et les sources induites (indicées « c » pour conduction, « p » pour polarisation et « a » pour ampérienne), représentatives des propriétés matérielles d'un milieu donné. On notera par exemple :

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{J}_{\text{exci}}(\vec{r}, t) + \vec{J}_c(\vec{r}, t) + \vec{J}_p(\vec{r}, t) + \vec{J}_a(\vec{r}, t)$$

Chapitre 2 : ELECTROMAGNETISME DANS LA MATIERE

I. INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est de généraliser les résultats du chapitre précédent à un milieu matériel autre que le vide. En fait, un milieu matériel donné peut toujours être vu et traité comme une répartition particulière de sources en espace libre, celles-ci représentant les propriétés du milieu. Par conséquent, les équations de Maxwell dans le vide restent en théorie valables dans un milieu matériel quelconque à condition d'adopter une répartition de sources représentative des phénomènes physiques induits dans le milieu.

II. ELECTROMAGNETISME DANS LES CONDUCTEURS

II.1 Notion de conducteur électrique

Un conducteur électrique est un matériau caractérisé par la présence de charges libres, c'est-à-dire de charges susceptibles de se déplacer à l'échelle macroscopique (elles ne sont pas confinées au voisinage d'un atome par exemple). Ces charges restent néanmoins attachées au matériau auquel elles appartiennent.

II.2 Loi d'Ohm

Sous l'application d'un champ électrique statique \vec{E} , les charges libres d'un conducteur se mettent en mouvement. Le mouvement d'une charge de masse m et de charge électrique q est régi par l'équation fondamentale de la dynamique :

$$m \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = q\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}(t) \quad (\text{II.1})$$

où le deuxième terme du second membre correspond à une force de frottements (représentative des collisions avec les charges liées du matériau par exemple).

La solution particulière, satisfaisant la condition initiale $\vec{v}(0) = \vec{0}$ est :

$$\vec{v}(t) = \frac{\tau q}{m} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \vec{E} \quad (\text{II.2})$$

Une vitesse constante :

$$\vec{v} = \frac{\tau q}{m} \vec{E} \quad (\text{II.3})$$

est donc rapidement atteinte.

Le facteur de proportionnalité entre \vec{v} et \vec{E} est appelé mobilité et noté μ :

$$\mu = \frac{\tau q}{m} \quad (\text{en } \text{m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}) \quad (\text{II.4})$$

où τ est le temps de relaxation, caractéristique de la durée du régime transitoire préalable à la stabilisation de la vitesse.

La proportionnalité entre \vec{v} et \vec{E} implique une proportionnalité entre \vec{J} et \vec{E} . Si l'on note N le nombre de particules par unité de volume, on a $\rho = qN$ et par suite :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{II.5})$$

où $\sigma = Nq\mu = N \frac{\tau q^2}{m}$ est appelée la conductivité du matériau (à titre d'exemple, pour un métal comme le cuivre $N=8.10^{28} \text{m}^{-3}$ et $\tau=3.10^{-14} \text{s}$ ce qui donne $\sigma=5,7.10^7 \text{S.m}^{-1}$)

La relation (II.5) est appelée loi d'Ohm microscopique.

Remarques :

- La loi d'Ohm est une relation constitutive : elle traduit une propriété d'un matériau soumis à un champ électromagnétique.
- Le raisonnement qui nous a permis d'introduire cette loi repose sur une hypothèse purement électrostatique (champ électrique constant, absence de champ magnétique). L'introduction d'un champ magnétique constant provoque une force transverse à \vec{v} (voir deuxième terme de la force de Lorentz). Néanmoins, ce phénomène (effet Hall) est négligeable pour de petites vitesses des charges ($v \ll c$) ce qui est toujours le cas dans les conducteurs métalliques ($v = 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ pour le cuivre). On démontrera plus tard que la norme de \vec{B} est en effet très inférieure à celle de \vec{E} , ce qui rend la force magnétique négligeable devant la force électrique.

Si maintenant, on considère des champs variables, la loi d'Ohm reste valable à condition que les variations des champs restent lentes devant le temps de relaxation (pour le cuivre, la fréquence maximale du signal doit par exemple vérifier $f_{\text{max}} \ll 1/\tau = 33 \text{ THz}$).

- Le modèle utilisé suppose également que le matériau considéré est linéaire (pas de phénomène d'avalanche en champ intense par exemple), homogène (même comportement en tous points), isotrope (même comportement dans toutes les directions) et non dispersif (même comportement pour toutes les fréquences), ce qui est le cas général pour les métaux.

En résumé, la loi d'Ohm :

$$\boxed{\vec{J}_c(\vec{r}, t) = \sigma \vec{E}(\vec{r}, t)}$$

(II.6)

reste applicable pour les métaux dans tout le spectre radiofréquence. La densité de courant est appelée densité de courant de conduction et notée \vec{J}_c .

II.3 Neutralité électrique d'un conducteur

La loi d'Ohm permet de calculer la densité de courant induite dans un conducteur en fonction du champ auquel il est soumis. Reste à déterminer la densité de charge associée.

Pour ce faire, il convient d'utiliser la loi de conservation de la charge qui devient ici :

$$\vec{\nabla} \cdot [\sigma \vec{E}(\vec{r}, t)] = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_c(\vec{r}, t) \quad (\text{II.7})$$

En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss, on obtient :

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho_c(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_c(\vec{r}, t) \quad (\text{II.8})$$

Cette équation admet la solution :

$$\rho_c(\vec{r}, t) = \rho_c(\vec{r}, t_0) \exp\left(-\frac{t-t_0}{\theta}\right) \quad (\text{II.9})$$

$\theta = \epsilon_0 / \sigma$ est appelé le temps de relaxation diélectrique.

L'équation (II.9) montre que la charge volumique s'annule quasi-instantanément ($\theta = 1,5 \cdot 10^{-19}$ s pour le cuivre) ce qui montre que pour un conducteur métallique :

$$\boxed{\rho_c(\vec{r}, t) = 0} \quad (\text{II.10})$$

Le conducteur métallique reste donc neutre en volume.

II.4 Equations de Maxwell dans un conducteur

Dans un conducteur, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit (hors excitation) :

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \sigma \vec{E}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (\text{II.11})$$

La composante spectrale de plus haute fréquence (f_{\max}) du signal est associée à un champ électrique d'expression :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E}_0 \exp(j\omega_{\max} t)] \quad (\text{II.12})$$

L'amplitude de la densité de courant de conduction associée est σE_0 alors que l'amplitude de la densité de courant de déplacement associée est $\epsilon_0 \omega_{\max} E_0$. Il est clair que le second terme est très inférieur au premier dès lors que $\omega_{\max} \ll 1/\theta$. Cette condition, largement vérifiée pour les conducteurs métalliques, justifie l'utilisation d'une hypothèse quasi-statique pour les champs à l'intérieur d'un conducteur. Les équations de Maxwell dans un conducteur s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{\rho_{\text{exci}}(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \\ \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) &= \sigma \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{J}_{\text{exci}}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Dans ces équations, ρ_{exci} et \vec{J}_{exci} représentent les sources d'excitation éventuelles (associées à un générateur externe) qui donnent naissance au champ dans le matériau. Elles se distinguent donc des sources induites (ici le courant de conduction) qui résultent de ce champ.

II.5 Effet de peau

En fait, le champ électromagnétique ne pénètre que très superficiellement à l'intérieur d'un conducteur. Pour mettre ce résultat en évidence, il convient d'abord d'établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ (électrique par exemple) en dehors des points d'excitation:

D'après (II.13) :

$$\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t)] = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (\text{II.14})$$

L'utilisation de la formule du double produit vectoriel combinée à la nullité de la divergence du champ électrique conduit finalement à :

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (\text{II.15})$$

Par souci de simplicité, pour résoudre cette équation, on considère le cas de l'interface entre l'air et un conducteur électrique de conductivité σ . L'interface coïncide avec le plan (O,x,y) et la normale z pointe vers le conducteur. On suppose qu'un champ électrique horizontal est produit uniformément à la surface du conducteur et l'on se place en régime harmonique:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}_s, t) &= \text{Re}[E_0 \vec{e}_x \exp(j\omega t)] \\ \text{avec } \vec{r}_s &\in (\text{O}, x, y) \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

A l'intérieur du conducteur, le champ conserve la même orientation et ne dépend que de la variable z. On note :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}[E_x(z) \vec{e}_x \exp(j\omega t)] \quad (\text{II.17})$$

Compte tenu de la forme particulière du champ, (II.15) se simplifie :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z) = j\mu_0 \sigma \omega E_x(z) \quad (\text{II.18})$$

et l'on obtient la solution générale :

$$E_x(z) = E^+ \exp(-z\sqrt{j\omega\mu_0\sigma}) + E^- \exp(+z\sqrt{j\omega\mu_0\sigma}) \quad (\text{II.19})$$

Le second terme, qui représente une éventuelle onde réfléchie, est nul pour un conducteur illimité (vers les z positifs) et le premier terme doit vérifier la condition limite à l'interface. On note finalement :

$$E_x(z) = E_0 \exp\left(-\frac{1+j}{\delta} z\right) \quad (\text{II.20})$$

avec :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} \quad (\text{II.21})$$

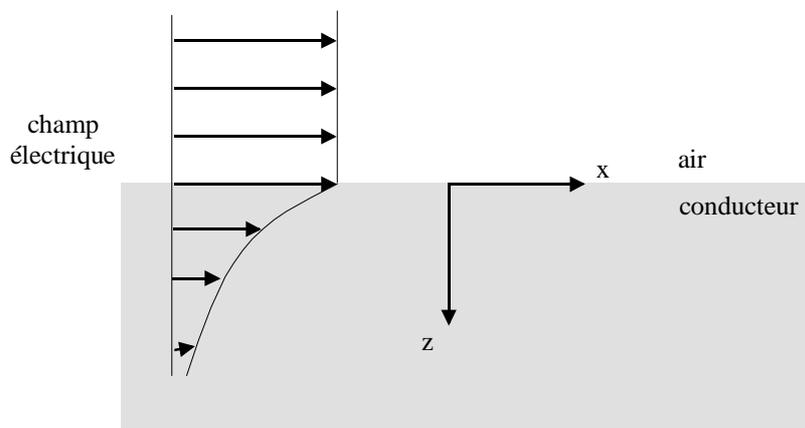
ce qui donne :

$$E_x(z, t) = |E_0| \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \angle E_0\right) \quad (\text{II.22})$$

Le champ décroît donc exponentiellement, au fur et à mesure qu'il s'enfonce dans le conducteur. Pour $z=3\delta$, son amplitude a déjà été divisée par 20. δ renseigne donc sur la profondeur de pénétration du champ dans le conducteur, on l'appelle l'épaisseur de peau. Celle-ci est d'autant plus faible que le conducteur est bon (σ grand) ou que la fréquence est élevée (ω grand).

Pour les conducteurs métalliques usuels, il est tout à fait légitime de considérer en première approximation que le champ est nul à l'intérieur des conducteurs et que le courant est confiné à la surface.

Figure 2.1 : illustration de la décroissance du champ électrique dans le conducteur



III. ELECTROMAGNETISME DANS LES DIELECTRIQUES

III.1 Notion de dipôle électrique

Un doublet électrostatique est un couple de charges immobiles opposées (+q,-q) séparées par une distance d.

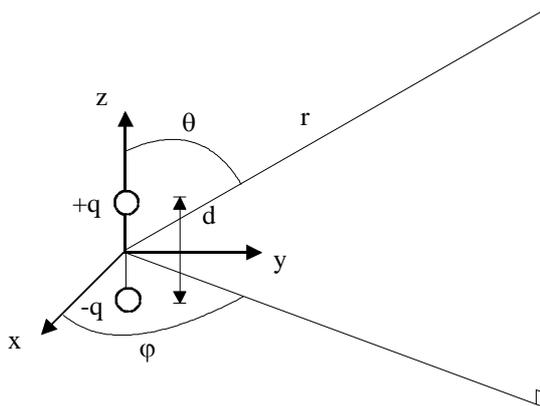


Figure 2.2 : doublet électrostatique

On considère un doublet centré sur l'origine d'un repère et orienté selon l'axe z. On établit aisément (à l'aide des lois de l'électrostatique) que le potentiel électrostatique créé en un point de l'espace $\vec{r} = (r, \theta, \varphi)$ par les deux charges du doublet est :

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 - rd \cos \theta + \frac{d^2}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + rd \cos \theta + \frac{d^2}{4}}} \right] \quad (\text{II.23})$$

On parle de dipôle électrostatique lorsque l'espace entre charges est très petit vis-à-vis de la distance d'observation ($d \ll r$). On a alors :

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{d}{r} \cos \theta}} - \frac{1}{r\sqrt{1 + \frac{d}{r} \cos \theta}} \right] \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right) - \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2} \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

Sous une forme plus générale, on déduit que le potentiel créé en \vec{r} par un dipôle situé en \vec{r}' s'écrit :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (\text{II.25})$$

Dans cette expression :

$$\vec{p} = qd\vec{e}_{\text{dip}} \quad (\text{II.26})$$

(\vec{e}_{dip} est un vecteur unitaire, orienté de la charge $-q$ à la charge $+q$)

apparaît d'emblée comme une caractéristique essentielle du dipôle (précisant complètement sa charge et sa géométrie). Cette grandeur vectorielle s'appelle le moment dipolaire électrique et est utilisée pour représenter un dipôle (au même titre que la charge q représente une particule chargée).

A l'échelle macroscopique, une répartition volumique de dipôles est représentée par un vecteur densité volumique de moment dipolaire \vec{P} , aussi appelé vecteur polarisation. Le moment dipolaire dans un élément de volume dV centré sur un point \vec{r} s'exprime ainsi :

$$d\vec{p} = \vec{P}(\vec{r})dV \quad (\text{II.27})$$

III.2 Notion de diélectrique

Un diélectrique (ou isolant) est un matériau dans lequel les charges électriques sont liées : les seuls déplacements qu'elles effectuent se font à l'échelle microscopique (par exemple, les électrons restent confinés au voisinage de l'atome dont ils sont issus). Néanmoins, le barycentre des charges positives ne coïncide pas avec celui des charges négatives, surtout si le matériau est soumis à un champ extérieur. Un diélectrique est donc assimilable à une répartition volumique de dipôles et représentable par un vecteur polarisation.

L'objectif, comme pour le conducteur, est d'aboutir à une représentation du diélectrique directement interprétable en terme de sources volumiques dans les équations de Maxwell. Pour ce faire, la notion de dipôles, très intuitive, n'est pas forcément la mieux adaptée car elle

ne correspond pas au type des sources mises en œuvre dans ces équations (ρ et \vec{J}). Une reformulation est possible en prenant pour point de départ l'expression du potentiel électrostatique créé par un volume V' de matériau diélectrique :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \vec{P}(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV' \quad (\text{II.28})$$

On pose :

$$R = \|\vec{r} - \vec{r}'\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (\text{II.29})$$

On peut montrer que :

$$\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{R} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} R \\ \frac{\partial}{\partial y'} R \\ \frac{\partial}{\partial z'} R \end{bmatrix} \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\vec{R}}{R^3} \quad (\text{II.30})$$

Dès lors, par substitution :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) dV' \quad (\text{II.31})$$

Or, pour une fonction vectorielle \vec{A} et une fonction scalaire f :

$$\vec{\nabla}' \cdot (\vec{A}f) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla}' f + f \vec{\nabla}' \cdot \vec{A} \quad (\text{II.32})$$

ce qui donne ici, en isolant le premier terme du membre de droite :

$$\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{R} \right) = \vec{\nabla}' \cdot \left[\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{R} \right] - \frac{1}{R} \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}') \quad (\text{II.33})$$

En reportant dans (II.31), il vient :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) dV' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' \quad (\text{II.34})$$

ou encore, en appliquant la formule de la divergence pour le premier terme :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{n}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' \quad (\text{II.35})$$

(S' est la surface fermée délimitant V' et \vec{n} sa normale sortante)

Les deux termes de cette relation peuvent être identifiés avec l'expression obtenu dans le paragraphe sur l'électrostatique. On montre ainsi que le matériau diélectrique crée la même potentiel que :

- une répartition volumique de charges $\rho(\vec{r}) = -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r})$ dans V' (appelées charges de polarisation)
- une répartition surfacique de charges $\rho_s(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n}$ à la surface de V'

Ces deux répartitions de charge permettent donc de représenter le matériau diélectrique en électrostatique. En pratique, dans les équations de Maxwell, on ne s'intéresse qu'aux points réguliers de l'espace, c'est-à-dire ici aux points situés à l'intérieur même du diélectrique. Seules les sources volumiques seront donc considérées. Les surfaces limites (et les sources surfaciques associées) feront l'objet d'un traitement particulier qui sera abordé ultérieurement.

III.3 Equations de Maxwell dans un diélectrique

Le paragraphe précédent a permis de montrer qu'en électrostatique, un matériau diélectrique est représentable par des répartitions volumiques de charge $\rho_p(\vec{r}) = -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r})$, dites charges de polarisation. Ce résultat a été obtenu en identifiant d'abord le matériau avec une répartition volumique de dipôles. En régime variable, ce modèle reste valable à condition de supposer que ces charges varient en fonction du temps :

$$\boxed{\rho_p(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}, t)}$$

(II.36)

En vertu de la loi de conservation de la charge, cette variation temporelle de ρ_p est associée à un courant, dit courant de polarisation vérifiant :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_p(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} [-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}, t)] \quad (\text{II.37})$$

soit :

$$\boxed{\vec{J}_p(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}(\vec{r}, t)} \quad (\text{II.38})$$

Cet ensemble de sources permet donc de représenter un matériau diélectrique dans les équations de Maxwell :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} + \frac{\rho_{\text{exci}}(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \\ \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) &= \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}(\vec{r}, t) + \vec{J}_{\text{exci}}(\vec{r}, t) \end{aligned}} \quad (\text{II.39})$$

En pratique, cette écriture peut être condensée en introduisant le vecteur induction électrique (en C.m^{-1}) :

$$\boxed{\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t)} \quad (\text{II.40})$$

On obtient alors :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) &= \rho_{\text{exci}}(\vec{r}, t) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \\ \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) + \vec{J}_{\text{exci}}(\vec{r}, t) \end{aligned}} \quad (\text{II.41})$$

III.4 Caractérisation des milieux diélectriques

A ce stade, reste à préciser la relation entre polarisation et champ électrique, ou, ce qui revient au même, la relation entre induction et champ électrique.

Un modèle simplifié offre une vision qualitative des phénomènes physiques susceptibles d'intervenir. Il considère un simple électron en orbite autour d'un proton. « Au repos », le centre de l'orbite de l'électron (barycentre des charges négatives) coïncide avec le proton (barycentre des charges positives). Sous l'action d'un champ électrique, les deux barycentres se dissocient car le proton et l'électron subissent des forces électriques opposées. Le décalage entre les deux barycentres, noté \vec{l} , est quantifiable en appliquant la loi fondamentale de la dynamique à l'électron :

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{l}(t) = q\vec{E}(t) - k\vec{l}(t) - h \frac{d}{dt} \vec{l}(t) \quad (\text{II.42})$$

Dans cette expression, les deuxième et troisième termes du membre de droite représentent respectivement une force de rappel (vers la situation de « repos ») et une force de frottements.

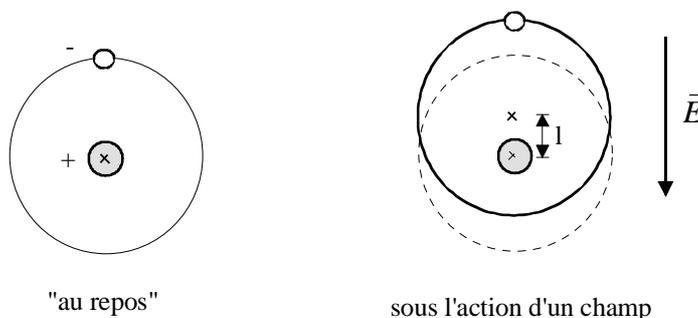


Figure 2.3 : modèle de polarisation

En régime harmonique :

$$\vec{E}(t) = \text{Re}[\vec{E}_0 \exp(j\omega t)] \text{ et } \vec{l}(t) = \text{Re}[\vec{l} \exp(j\omega t)] \quad (\text{II.43})$$

En reportant dans (II.42), on obtient :

$$\vec{l} = \frac{q}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}} \vec{E}_0$$

(II.44)

avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\tau = \frac{m}{h}$.

Finalement, le moment dipolaire résultant vaut :

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

(II.45)

et la polarisation du matériau s'obtient en multipliant ce moment dipolaire par le nombre N d'atomes par unité de volume :

$$\vec{P} = N \frac{q^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}} \vec{E}_0$$

(II.46)

On voit sur ce simple exemple, qu'en régime harmonique, la relation entre polarisation et champ électrique est une simple relation de proportionnalité : ceci est caractéristique d'un matériau linéaire.

Néanmoins, cette relation fait apparaître une dépendance vis-à-vis de la fréquence : on dit alors que le matériau est dispersif. En conséquence, lorsque le signal n'est pas monochromatique, il convient de distinguer la contribution de chaque composante fréquentielle. Pour ce faire, le champ doit être décomposé à l'aide de la transformée de Fourier :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{r}, \omega) \exp(j\omega t) d\omega = \text{TF}^{-1} [\vec{E}(\vec{r}, \omega)]$$

(II.47)

et la relation (II.46) doit être appliquée individuellement aux pondérations $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ des différentes composantes fréquentielles.

En compliquant davantage l'exemple, on pourrait aussi faire apparaître une dépendance vis-à-vis du point de localisation et de la direction du champ appliqué.

Finalement, dans le cas général, pour une composante fréquentielle donnée, (II.46) devient :

$$\vec{P}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{xx}(\vec{r}, \omega) & \chi_{xy}(\vec{r}, \omega) & \chi_{xz}(\vec{r}, \omega) \\ \chi_{yx}(\vec{r}, \omega) & \chi_{yy}(\vec{r}, \omega) & \chi_{yz}(\vec{r}, \omega) \\ \chi_{zx}(\vec{r}, \omega) & \chi_{zy}(\vec{r}, \omega) & \chi_{zz}(\vec{r}, \omega) \end{bmatrix} \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad (\text{II.48})$$

$[\chi_e]$ est appelé le tenseur susceptibilité électrique.

La relation résultante entre induction et champ électrique est :

$$\boxed{\vec{D}(\vec{r}, \omega) = [\varepsilon(\vec{r}, \omega)] \vec{E}(\vec{r}, \omega)} \quad (\text{II.49})$$

où $[\varepsilon(\vec{r}, \omega)]$ est le tenseur permittivité.

Il s'agit, comme la loi d'Ohm, d'une relation constitutive.

Ramenée dans le domaine temps, (II.49) s'exprime sous la forme d'un produit de convolution, par le biais de la transformée de Fourier inverse :

$$\boxed{\vec{D}(\vec{r}, t) = [\varepsilon(\vec{r}, t)] * \vec{E}(\vec{r}, t)} \quad (\text{II.50})$$

Cette relation est assez difficile à manipuler ce qui justifie l'intérêt du régime harmonique.

Par contre, on peut souvent considérer que les diélectriques sont isotropes (c'est-à-dire qu'ils ont les mêmes propriétés dans toutes les directions de l'espace) :

$$\boxed{\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon(\vec{r}, \omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega)} \quad (\text{II.51})$$

et qu'ils sont homogènes (c'est-à-dire qu'ils ont les mêmes propriétés en tous points) :

$$\boxed{\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega)} \quad (\text{II.52})$$

On note

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_0 [\varepsilon_r'(\omega) - j\varepsilon_r''(\omega)] \quad (\text{II.53})$$

où $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ est appelée la permittivité relative.

Remarque :

Dans le cas du modèle simplifié précédent (caractéristique de la polarisation dite électronique) on a :

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}} \quad (\text{II.54})$$

Cette évolution en fonction de la fréquence met en évidence un phénomène de résonance à ω_0 avec un coefficient d'amortissement $1/\tau$.

En pratique, cette relation définit le modèle de Lorentz, utilisé pour représenter des diélectriques dans lesquels le phénomène de résonance est essentiel :

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\omega_0^2(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}} \quad (\text{II.55})$$

ε_s et ε_∞ définissent respectivement les permittivités relatives à très basses (statique) et très hautes fréquences.

Tout pendant que l'on reste très en dessous de la fréquence de résonance ($\omega \ll \omega_0$), on a :

$$\varepsilon_r(\omega) \approx \varepsilon_s = 1 + \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m \omega_0^2} \quad (\text{II.56})$$

et les phénomènes dispersifs peuvent être négligés en première approximation.

Pour des modèles plus complets, plusieurs fréquences de résonance sont à prendre en considération mais l'approximation précédente reste valable si l'on se place très en dessous de la première résonance.

Enfin, pour des matériaux où les phénomènes d'amortissement sont prépondérants, on utilise plutôt un modèle de Debye :

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0^2 \tau}} \quad (\text{II.57})$$

Remarque :

Un milieu diélectrique est caractérisé par le couple $(\varepsilon_r', \varepsilon_r'')$. On utilise souvent la représentation alternative $(\varepsilon_r', \tan \delta)$ telle que:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r' (1 - j \tan \delta) \quad (\text{II.58})$$

où $\tan \delta$ est appelée la tangente de pertes.

IV. ELECTROMAGNETISME DANS LES MILIEUX MAGNETIQUES

IV.1 Notion de dipôle magnétique

Un dipôle magnétique correspond à une petite boucle de courant électrique I , le long d'un contour fermé délimitant une surface S .

On démontre, en magnétostatique, que le potentiel vecteur produit en \vec{r} par un dipôle magnétique localisé en \vec{r}' s'exprime :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} IS\vec{n} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \quad (\text{II.59})$$

où \vec{n} est la normale à S définie en cohérence avec le sens du courant sur C .

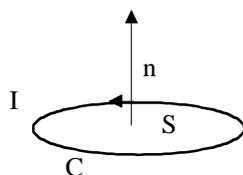


Figure 2.4 : dipôle magnétique

On caractérise complètement le dipôle par son moment magnétique :

$$\vec{m} = IS\vec{n} \quad (\text{II.60})$$

Une répartition volumique de dipôles magnétiques est représentée par un vecteur aimantation \vec{M} tel que le moment dipolaire dans un élément de volume dV au voisinage d'un point \vec{r} soit défini par :

$$d\vec{m} = \vec{M}(\vec{r})dV \quad (\text{II.61})$$

IV. 2 Notion de milieu magnétique

Un matériau magnétique est un milieu qui subit une aimantation lorsque qu'il est soumis à un champ magnétique. En fait, un tel matériau est assimilable à une répartition volumique de dipôles magnétiques, ces derniers ayant tendance à s'aligner sur le champ magnétique appliqué (au même titre que les dipôles électriques d'un diélectrique s'alignent sur le champ électrique appliqué). La nature de ces dipôles magnétiques renvoie à la rotation des électrons autour des atomes et à leur spin; leur analyse précise relève de la mécanique quantique. Pratiquement, le matériau est caractérisé par son vecteur aimantation.

Afin de représenter le matériau par des sources incorporables dans les équations de Maxwell, on peut, comme pour les matériaux diélectriques, exprimer le potentiel créé par un volume V de matériau. On obtient, à l'aide de (II.59) :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \vec{n}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dS' \quad (\text{II.62})$$

où S' est la surface délimitant V' de normale sortante \vec{n} .

Il résulte qu'un matériau magnétique sera représentable dans les équations de Maxwell par des sources de courant volumiques, dits courants ampériens, définis par :

$$\vec{J}_a(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}) \quad (\text{II.63})$$

IV.3 Equations de Maxwell dans un milieu magnétique

En régime variable, le modèle reste valable à condition de prendre en compte une dépendance des courants d'aimantation avec le temps :

$$\boxed{\vec{J}_a(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}, t)} \quad (\text{II.64})$$

La divergence d'un rotationnel étant nulle, la conservation de la charge montre qu'il n'y a pas de charges associées à ces courants.

Au final, les équations de Maxwell dans un milieu magnétique s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{\rho_{\text{exci}}(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \\
 \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \\
 \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) &= \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}, t) + \vec{J}_{\text{exci}}(\vec{r}, t)
 \end{aligned}$$

(II.65)

On définit le vecteur champ magnétique (en $A \cdot m^{-1}$) :

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}, t) - \vec{M}(\vec{r}, t)$$

(II.66)

et on obtient :

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{\rho_{\text{exci}}(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \\
 \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \\
 \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) &= \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{J}_{\text{exci}}(\vec{r}, t)
 \end{aligned}$$

(II.67)

Par analogie avec (II.40), \vec{B} est appelée induction magnétique :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 [\vec{H}(\vec{r}, t) + \vec{M}(\vec{r}, t)]$$

(II.68)

IV.4 Caractérisation des milieux magnétiques

La relation qui relie l'aimantation au champ magnétique s'écrit , dans le domaine fréquentiel :

$$\vec{M}(\vec{r}, \omega) = \begin{bmatrix} \chi_{mxx}(\vec{r}, \omega) & \chi_{mxy}(\vec{r}, \omega) & \chi_{mxz}(\vec{r}, \omega) \\ \chi_{myx}(\vec{r}, \omega) & \chi_{myy}(\vec{r}, \omega) & \chi_{myz}(\vec{r}, \omega) \\ \chi_{mzx}(\vec{r}, \omega) & \chi_{mzy}(\vec{r}, \omega) & \chi_{mzz}(\vec{r}, \omega) \end{bmatrix} \vec{H}(\vec{r}, \omega)$$

(II.69)

où $[\chi_m]$ est le tenseur susceptibilité magnétique.

La relation résultante entre induction et champ magnétique est :

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = [\mu(\vec{r}, \omega)] \vec{H}(\vec{r}, \omega)$$

(II.70)

où $[\mu]$ est le tenseur perméabilité.

Pour des matériaux homogènes et isotropes, on pose :

$$\mu(\omega) = \mu_0 \mu_r(\omega) = \mu_0 [1 + \chi_m(\omega)]$$

(II.71)

La plupart des matériaux ont une perméabilité très voisine de un. Seuls les matériaux ferromagnétiques et ferrimagnétiques (les ferrites) ont des propriétés magnétiques importantes. Les premiers sont généralement de bons conducteurs (le fer par exemple), ce qui limite les possibilités d'exploitation de ces propriétés. Les seconds sont foncièrement anisotropes.

V. SYNTHÈSE

V.1 Equations de Maxwell dans un milieu quelconque

Finalement, pour prendre en compte les différentes propriétés des matériaux, on adopte habituellement l'écriture suivante :

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) &= \rho_{\text{exci}}(\vec{r}, t) \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \\
 \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \\
 \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) + \vec{J}_c(\vec{r}, t) + \vec{J}_{\text{exci}}(\vec{r}, t)
 \end{aligned}$$

(II.72)

Ou, en régime harmonique :

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) &= \rho_{\text{exci}}(\vec{r}) \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) &= 0 \\
 \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) &= -j\omega \vec{B}(\vec{r}) \\
 \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) &= j\omega \vec{D}(\vec{r}) + \vec{J}_c(\vec{r}) + \vec{J}_{\text{exci}}(\vec{r})
 \end{aligned}$$

(II.73)

V.2 Relations constitutives

Ces équations, très générales, sont complétées par les équations constitutives suivantes (particularisées ici au cas usuel des milieux linéaires, isotropes et homogènes) :

$$\begin{aligned}
 \vec{J}_c(\vec{r}) &= \sigma \vec{E}(\vec{r}) \\
 \vec{D}(\vec{r}) &= \epsilon \vec{E}(\vec{r}) \\
 \vec{B}(\vec{r}) &= \mu \vec{H}(\vec{r})
 \end{aligned}$$

(II.74)

Dans ces expressions, les caractéristiques des matériaux dépendent éventuellement de la fréquence d'où l'intérêt du régime harmonique.

Remarque

L'équation de Maxwell-Ampère fait apparaître deux types de courants induits (courant de polarisation et courant de conduction) en plus du courant d'excitation. Les deux termes peuvent être regroupés en remarquant qu'ils s'expriment tous les deux en fonction du champ électrique :

$$j\omega\vec{D}(\vec{r}) + \vec{J}_c(\vec{r}) = j\omega\epsilon_0 \left(\epsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0} \right) \vec{E}(\vec{r}) = j\omega\epsilon_0 \left[\epsilon_r' - j \left(\epsilon_r'' + \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} \right) \right] \vec{E}(\vec{r}) \quad (\text{II.75})$$

Le terme apparaissant entre crochets définit une permittivité relative équivalente :

$$\epsilon_r^{\text{eq}} = \epsilon_r' - j \left(\epsilon_r'' + \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} \right) \quad (\text{II.76})$$

globalisant les effets diélectrique et conducteur. Il montre en particulier clairement que la partie imaginaire de la permittivité relative contribue aux pertes au même titre que la conductivité.

On définit parfois plutôt une conductivité équivalente :

$$\sigma^{\text{eq}} = \sigma + \omega\epsilon_0\epsilon_r'' \quad (\text{II.77})$$

qui, combinée avec ϵ_r' , caractérise complètement le matériau. Dans un tel contexte, σ est appelée la conductivité statique.

En résumé, les propriétés diélectrique et conductrice d'un matériau peuvent être représentées indifféremment par $(\sigma, \epsilon_r', \epsilon_r'')$, $(\sigma, \epsilon_r', \tan\delta)$, ϵ_r^{eq} ou $(\sigma^{\text{eq}}, \epsilon_r')$. C'est souvent les deuxième et quatrième formes qui sont utilisées, ϵ_r' étant dans ce cas parfois appelée (abusivement) permittivité relative. On notera que la quatrième forme n'est complète que si σ^{eq} est donnée pour deux fréquences distinctes.

V.3 Relations de passage

Les équations de Maxwell, sous leur forme locale, ne sont valables qu'en des points réguliers de l'espace. Le traitement de l'interface entre deux milieux s'effectue en établissant des conditions aux limites, issues de la forme intégrale des équations.

On se place dans la suite à l'interface entre deux milieux (repérés par les indices 1 et 2). On définit un repère orthonormé (O,x,y,z) de telle sorte que l'interface coïncide avec le plan (O,x,y) et que l'axe z soit orienté du milieu 1 vers le milieu 2.

On considère un cylindre infinitésimal de hauteur h et de section S traversant l'interface.

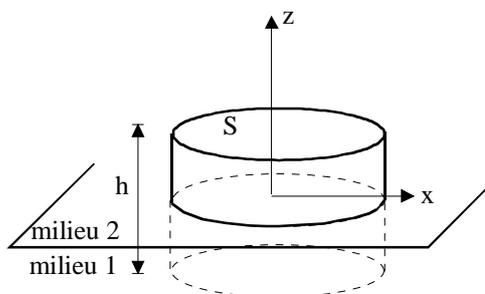


Figure 2.5 : cylindre à l'interface entre les milieux

Lorsque l'on fait tendre h vers zéro, le flux magnétique (sortant) à travers la surface S_{cyl} du cylindre s'écrit :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \iint_{S_{\text{cyl}}} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \vec{B}_1 \cdot (-\vec{e}_z) S + \vec{B}_2 \cdot (+\vec{e}_z) S \quad (\text{II.78})$$

Or, le flux magnétique est nul à travers toute surface fermée, d'où :

$$\boxed{\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0} \quad (\text{II.79})$$

en notant $\vec{n}_{12} = \vec{e}_z$ la normale à l'interface pointant du milieu 1 vers le milieu 2.

En conclusion, la composante normale de l'induction magnétique est continue à l'interface entre deux milieux.

On considère maintenant, dans le plan (O,x,z), une surface rectangulaire de longueur L, de hauteur h et de contour C_{rect} .

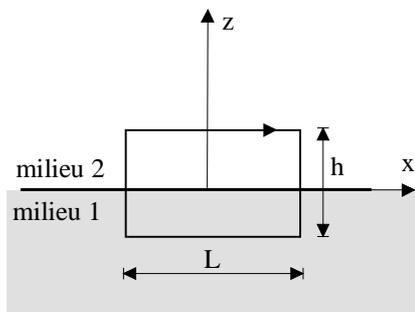


Figure 2.6 : surface rectangulaire à l'interface

Lorsque h tend vers zéro, la circulation du champ magnétique le long de C_{rect} s'écrit :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{C_{\text{rect}}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \vec{H}_2 \cdot (+\vec{e}_x)L + \vec{H}_1 \cdot (-\vec{e}_x)L \quad (\text{II.80})$$

Or, d'après (II.72), cette circulation est égale au courant électrique (de conduction ou d'excitation) à travers la surface rectangulaire augmentée des variations temporelles du flux électrique à travers cette même surface. Ce second terme est toujours nul lorsque la surface tend vers zéro. Par contre, si une densité de courant électrique surfacique :

$$\vec{J} = \vec{J}_s \delta(z) \quad (\text{II.81})$$

est présente sur l'interface, le courant associé n'est pas nul ; il vaut :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-h/2}^{h/2} \vec{J}_s \delta(z) \cdot \vec{e}_y dz dx = \int_{-L/2}^{L/2} \vec{J}_s \cdot \vec{e}_y dx = \vec{J}_s \cdot \vec{e}_y L \quad (\text{II.82})$$

Finalement, en égalant (II.80) et (II.82) :

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\vec{e}_x = \vec{J}_s \cdot \vec{e}_y \quad (\text{II.83})$$

ou, ce qui revient au même (avec $\vec{n}_{12} = \vec{e}_z$) :

$$\boxed{\vec{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s} \quad (\text{II.84})$$

remarque : on passe de (II.84) à (II.83) en multipliant scalairement par \vec{e}_y et en utilisant l'identité :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B} \quad (\text{II.85})$$

La composante tangentielle du vecteur champ magnétique est discontinue à l'interface entre deux milieux. La discontinuité représente un éventuel courant surfacique sur l'interface. Un tel courant (de conduction) est par exemple présent lorsque l'un des deux milieux est un conducteur parfait.

En reproduisant le même raisonnement, on démontre de même que :

$$\boxed{\vec{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}} \quad (\text{II.85})$$

et :

$$\boxed{\vec{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s} \quad (\text{II.86})$$

La composante tangentielle du champ électrique est continue à l'interface.

La composante normale de l'induction électrique est discontinue. La discontinuité correspond aux éventuelles charges surfaciques (sur un conducteur parfait en particulier).

Remarque :

Les conditions aux limites établies ne doivent en aucun cas faire référence aux sources surfaciques évoquées dans les paragraphes précédents (premier terme de II.35, par exemple). Celles-ci sont implicitement intégrées dans la formulation à l'aide des inductions.

Chapitre 3 : ENERGIE ELECTROMAGNETIQUE

I. PUISSANCE ELECTROMAGNETIQUE CONSOMMEE PAR DES CHARGES

On considère des charges électriques de densité volumique ρ , animées d'une vitesse \vec{v} et soumises à un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) .

La puissance dP fournie par le champ aux charges contenues dans un élément de volume dV se déduit de la force électromagnétique qui s'exerce sur celles-ci :

$$dP(\vec{r}, t) = d\vec{F}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) dV [\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)] \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (\text{III.1})$$

La force magnétique ne travaille pas puisqu'elle est orthogonale à la vitesse d'où :

$$dP(\vec{r}, t) = d\vec{F}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) dV \quad (\text{III.2})$$

c'est-à-dire :

$$dP(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) dV \quad (\text{III.3})$$

Cette expression montre qu'en électromagnétisme les considérations énergétiques peuvent être abordées en calculant le produit scalaire entre champ électrique et vecteur densité de courant.

II. THEOREME DE POYNTING

On considère maintenant un milieu (non dispersif) soumis à une excitation $(\vec{J}_{\text{exci}}, \rho_{\text{exci}})$. Afin d'établir un bilan énergétique dans ce milieu, on calcule le produit scalaire $\vec{E} \cdot \vec{J}_{\text{exci}}$, dans lequel le vecteur densité de courant est exprimé à partir de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{J}_{\text{exci}}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) - \vec{J}_c(\vec{r}, t) \quad (\text{III.4})$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}_{\text{exci}}(\vec{r}, t) &= \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) - \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) - \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}_c(\vec{r}, t) \\ &= \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{D}(\vec{r}, t)] - \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}_c(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

L'égalité vectorielle :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (\text{III.6})$$

permet d'écrire le premier terme du membre de droite de (III.5) comme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \cdot [\vec{H}(\vec{r}, t) \times \vec{E}(\vec{r}, t)] + \vec{H}(\vec{r}, t) \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t)] \quad (\text{III.7})$$

soit, en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday pour réécrire le dernier terme du second membre de (III.7) :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) &= -\vec{\nabla} \cdot [\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)] - \vec{H}(\vec{r}, t) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \right] \\ &= -\vec{\nabla} \cdot [\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{H}(\vec{r}, t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)] \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Finalement, en réinjectant ce résultat dans (III.5) :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}_{\text{exci}}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \cdot [\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) + \vec{H}(\vec{r}, t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)] - \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}_c(\vec{r}, t) \quad (\text{III.9})$$

On note :

$$\boxed{\vec{R}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)} \quad (\text{III.10})$$

le vecteur radiant ou vecteur de Poynting (en W.m^{-2}), et :

$$\boxed{w(\vec{r}, t) = w_e(\vec{r}, t) + w_m(\vec{r}, t) = \frac{\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{D}(\vec{r}, t)}{2} + \frac{\vec{H}(\vec{r}, t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)}{2}}$$

(III.11)

la densité volumique d'énergie électromagnétique (en J.m^{-3}).

Le théorème de Poynting, sous forme locale, correspond à la réécriture de (III.9) :

$$\boxed{-\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}_{\text{exci}}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \cdot \vec{R}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} w(\vec{r}, t) + \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}_c(\vec{r}, t)}$$

(III.12)

Le théorème de Poynting s'interprète plus facilement en considérant sa forme intégrale.

En intégrant (III.12) sur un volume V , on obtient :

$$-\iiint_V \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}_{\text{exci}}(\vec{r}, t) dV = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{R}(\vec{r}, t) dV + \frac{d}{dt} \iiint_V w(\vec{r}, t) dV + \iiint_V \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}_c(\vec{r}, t) dV$$

(III.13)

En appliquant la formule de la divergence, on aboutit à :

$$\boxed{-\iiint_V \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}_{\text{exci}}(\vec{r}, t) dV = \iint_S \vec{R}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} dS + \frac{d}{dt} \iiint_V w(\vec{r}, t) dV + \iiint_V \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}_c(\vec{r}, t) dV}$$

(III.14)

égalité qui constitue la forme intégrale du théorème de Poynting.

Dans cette expression, S est la surface délimitant V de normale sortante \vec{n} .

III. BILAN ENERGETIQUE

Le théorème de Poynting traduit un bilan énergétique.

Dans ce bilan, le premier terme :

$$P_{\text{exci}}(t) = -\iiint_V \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}_{\text{exci}}(\vec{r}, t) dV \quad (\text{III.15})$$

représente la puissance électromagnétique délivrée dans le volume V par les sources.

Le second terme :

$$P_{\text{ray}}(t) = \iint_S \vec{R}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} dS \quad (\text{III.16})$$

représente un flux de puissance, sortant à travers la surface S du volume. Le vecteur de Poynting apparaît donc comme une « densité de courant de puissance » s'échappant du volume V . P_{ray} représente en quelque sorte une puissance rayonnée à l'extérieur de V (cette interprétation est évidente lorsque le volume V renferme une antenne d'émission).

Le troisième terme représente les variations temporelles de l'énergie électromagnétique stockée dans le volume :

$$W_v(t) = \iiint_V w(\vec{r}, t) dV \quad (\text{III.17})$$

Le dernier terme représente la puissance dissipée dans le volume (puissance communiquée aux charges) :

$$P_{\text{diss}}(t) = \iiint_V \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}_c(\vec{r}, t) dV \quad (\text{III.18})$$

Le théorème de Poynting s'écrit donc :

$$P_{\text{exci}}(t) = P_{\text{ray}}(t) + P_{\text{diss}}(t) + \frac{d}{dt} [W_e(t) + W_m(t)]$$

(III.19)

ce qui traduit le fait que la puissance délivrée par les sources peut être :

- soit évacuée à l'extérieur du volume considéré
- soit dissipée dans ce volume
- soit emmagasinée sous forme d'énergie électrique ou magnétique.

IV. CONSIDERATIONS ENERGETIQUES EN REGIME HARMONIQUE

IV.1 Vecteur de Poynting complexe

Les notions définies précédemment restent globalement valables en régime harmonique. Néanmoins, on travaille plutôt dans ce cas avec des quantités moyennes sur une période temporelle $T=2\pi/\omega$. Ce paragraphe a pour objectif de redéfinir le vecteur de Poynting et la densité d'énergie en régime harmonique.

Le vecteur de Poynting moyen sur l'intervalle $[t, t+T]$ est donné par :

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T [\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)] dt$$

(III.20)

Dans cette expression, le champ électrique peut être exprimé comme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}) \exp(j\omega t)] = \frac{\vec{E}(\vec{r}) \exp(j\omega t) + \vec{E}^*(\vec{r}) \exp(-j\omega t)}{2}$$

(III.21)

En utilisant une expression similaire pour le champ magnétique, on obtient :

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

(III.22)

avec :

$$I_1 = \frac{1}{4T} \left[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r}) \right] \int_0^T \exp(2j\omega t) dt \quad (\text{III.23})$$

$$I_2 = \frac{1}{4T} \left[\vec{E}^*(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}) \right] \int_0^T \exp(-2j\omega t) dt \quad (\text{III.24})$$

$$I_3 = \frac{1}{4T} \left[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}) + \vec{E}^*(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r}) \right] \int_0^T dt \quad (\text{III.25})$$

I_1 et I_2 sont nulles (intégration d'une exponentielle complexe sur un nombre entier de périodes) et I_3 se simplifie :

$$\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}) + \vec{E}^*(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r}) = 2\text{Re} \left[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}) \right] \quad (\text{III.26})$$

D'où finalement :

$$I = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}) \right] \quad (\text{III.27})$$

On définit le vecteur de Poynting complexe comme:

$$\boxed{\vec{R}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})} \quad (\text{III.28})$$

En régime harmonique, le flux de la partie réelle de ce vecteur à travers une surface fermée S correspond à la puissance moyenne (sur une période T) quittant le volume V délimité par S .

IV.2 Densité moyenne d'énergie volumique

On définit de la même façon la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie électrique sur une période T :

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{D}(\vec{r}, t)}{2} dt \quad (\text{III.29})$$

Il vient de même :

$$I = \boxed{w_e(\vec{r}) = \frac{1}{4} \operatorname{Re}[\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}^*(\vec{r})]} = \frac{1}{4} \operatorname{Re}[\varepsilon^* \|\vec{E}(\vec{r})\|^2] \quad (\text{III.30})$$

Une densité moyenne d'énergie magnétique peut être définie de la même façon :

$$\boxed{w_m(\vec{r}) = \frac{1}{4} \operatorname{Re}[\vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{B}^*(\vec{r})]} = \frac{1}{4} \operatorname{Re}[\mu^* \|\vec{H}(\vec{r})\|^2] \quad (\text{III.31})$$

IV.3 Théorème de Poynting

Le théorème de Poynting lui-même peut s'établir en repartant directement des équations de Maxwell rotationnelles en régime harmonique :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{B}(\vec{r}) \quad (\text{III.32})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}_{exc}(\vec{r}) + \vec{J}_c(\vec{r}) + j\omega \vec{D}(\vec{r}) \quad (\text{III.33})$$

En multipliant scalairement (III.32) par \vec{H}^* et (III.33) conjuguée par \vec{E} , on obtient :

$$\vec{H}^*(\vec{r}) \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})] = -j\omega \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{H}^*(\vec{r}) \quad (\text{III.34})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{H}^*(\vec{r})] = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{J}_{exc}^*(\vec{r}) + \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{J}_c^*(\vec{r}) - j\omega \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}^*(\vec{r}) \quad (\text{III.35})$$

La différence (III.35) moins (III.34) conduit à :

$$\vec{E}(\vec{r}) \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{H}^*(\vec{r})] - \vec{H}^*(\vec{r}) \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})] = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{J}_{exc}^*(\vec{r}) + \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{J}_c^*(\vec{r}) - j\omega \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}^*(\vec{r}) + j\omega \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{H}^*(\vec{r}) \quad (\text{III.36})$$

Ou encore, en simplifiant le premier membre à l'aide de (III.6) :

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{H}^*(\vec{r}) \times \vec{E}(\vec{r})] = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{J}_{exci}^*(\vec{r}) + \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{J}_c^*(\vec{r}) - j\omega \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}^*(\vec{r}) + j\omega \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{H}^*(\vec{r}) \quad (\text{III.37})$$

Après division par 2 puis réorganisation des termes, on obtient :

$$\boxed{-\frac{\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{J}_{exci}^*(\vec{r})}{2} = \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})}{2} \right] + \frac{\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{J}_c^*(\vec{r})}{2} + j2\omega \left[\frac{\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{H}^*(\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}^*(\vec{r})}{4} \right]} \quad (\text{III.38})$$

Cette équation constitue la forme locale du théorème de Poynting en régime harmonique.

Après intégration sur un volume V de surface S, on obtient la forme intégrale:

$$\boxed{-\iiint_V \frac{\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{J}_{exci}^*(\vec{r})}{2} dV = \iint_S \left[\frac{\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})}{2} \right] \cdot \vec{n} dS + \iiint_V \frac{\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{J}_c^*(\vec{r})}{2} dV + j2\omega \iiint_V \left[\frac{\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{H}^*(\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}^*(\vec{r})}{4} \right] dV} \quad (\text{III.39})$$

Dans un souci de généralité (matériaux à pertes), on pose :

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' \quad \text{et} \quad \mu = \mu' - j\mu'' \quad (\text{III.40})$$

On obtient :

$$\begin{aligned} -\iiint_V \frac{\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{J}_{exci}^*(\vec{r})}{2} dV &= \iint_S \left[\frac{\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})}{2} \right] \cdot \vec{n} dS \\ + \iiint_V \left[\sigma \frac{\|\vec{E}(\vec{r})\|^2}{2} + \mu'' \omega \frac{\|\vec{H}(\vec{r})\|^2}{2} + \varepsilon'' \omega \frac{\|\vec{E}(\vec{r})\|^2}{2} \right] dV &+ j2\omega \iiint_V \left[\frac{\mu' \|\vec{H}(\vec{r})\|^2 - \varepsilon' \|\vec{E}(\vec{r})\|^2}{4} \right] dV \end{aligned} \quad (\text{III.41})$$

Soit, sous une forme interprétable :

$$P_{exci} = P_{ray} + P_{diss} + 2j\omega(W_m - W_e) \quad (\text{III.42})$$

avec :

$$P_{\text{exci}} = - \iiint_V \frac{\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{J}_{\text{exci}}^*(\vec{r})}{2} dV \quad (\text{III.43})$$

la puissance complexe délivrée au volume (sa partie réelle correspond à la puissance active moyenne sur une période),

$$P_{\text{ray}} = \iint_S \frac{[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})] \cdot \vec{n}}{2} dS \quad (\text{III.44})$$

la puissance complexe s'échappant du volume (sa partie réelle correspond à la puissance rayonnée moyenne sur une période),

$$P_{\text{diss}} = \iiint_V \left[\sigma \frac{\|\vec{E}(\vec{r})\|^2}{2} + \mu'' \omega \frac{\|\vec{H}(\vec{r})\|^2}{2} + \varepsilon'' \omega \frac{\|\vec{E}(\vec{r})\|^2}{2} \right] dV \quad (\text{III.45})$$

la puissance dissipée dans le volume, en moyenne sur une période.

On remarquera que les coefficients μ'' et ε'' permettent bien d'inclure les pertes dans les matériaux magnétiques ou diélectriques.

Chapitre 4 : ONDES ELECTROMAGNETIQUES DANS LE VIDE

I. EQUATIONS DE PROPAGATION

Les équations de propagation vérifiées par le champ se déduisent directement des équations de Maxwell :

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 \\
 \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \\
 \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) &= \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{J}(\vec{r}, t)
 \end{aligned}
 \tag{IV.1}$$

En prenant le rotationnel de la troisième et en appliquant la formule du double produit vectoriel, on obtient ainsi :

$$\vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)] - \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t)
 \tag{IV.2}$$

En utilisant les première et quatrième équations, on déduit :

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{\vec{\nabla} \rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}
 \tag{IV.3}$$

avec $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$.

De même, on a :

$$\nabla^2 \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}, t)
 \tag{IV.4}$$

En dehors des sources, (IV.3) et (IV.4) se réduisent à :

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0}}$$

(IV.5)

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{0}}$$

(IV.6)

qui sont des équations de propagation vectorielles.

Ce résultat est une conséquence logique des équations de Maxwell : celles-ci montrent en effet que des champs sont créés au niveau des sources (équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Ampère) et qu'ils s'entretiennent ensuite mutuellement au delà de ces sources (équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère). Les variations temporelles du champ électrique engendrent des variations spatiales du champ magnétique et réciproquement si bien que le champ se répand dans tout l'espace, de proche en proche.

Remarque

Les équations de propagation sont une conséquence des équations de Maxwell mais ne sont pas équivalentes à ces dernières. En particulier, il est clair que (IV.5) et (IV.6) ne renseignent pas sur le lien qui existe entre \vec{E} et \vec{B} (surtout si elles sont résolues séparément). En d'autres termes, une solution trouvée pour (IV.5) ou (IV.6) n'est pas forcément solution de (IV.1). Il convient de le vérifier a posteriori.

II. ONDES PLANES EN REGIME VARIABLE QUELCONQUE

II.1 Notion d'onde plane

Les équations de propagation obtenues sont vectorielles (la grandeur qui se propage est un vecteur) et tridimensionnelles (cette grandeur dépend des trois coordonnées spatiales x, y et z).

Parmi toutes les solutions possibles, il est assez légitime de s'intéresser d'abord au cas le plus simple où les variations s'effectuent uniquement dans une direction de l'espace, représentée par un axe, noté (O,u).

On a alors (pour le champ électrique, par exemple) :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(u, t) \quad (\text{IV.7})$$

Il est clair que tous les points d'un même plan $u=\text{constante}$ vibrent simultanément et avec la même amplitude. On parle donc d'onde plane (homogène). L'axe (O,u) définit l'axe de propagation (selon lequel les variations spatiales s'opèrent) et les plans perpendiculaires à cet axe sont appelés plans d'onde.

Avec cette hypothèse simplificatrice sur la forme du champ, il est plus aisé d'aborder la résolution des équations de propagation.

Pour ce faire, on définit d'abord un vecteur unitaire de l'axe de propagation :

$$\begin{aligned} \vec{e}_u &= \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y + \gamma \vec{e}_z \\ &\text{avec } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

Un point de l'espace repéré par le vecteur :

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad (\text{IV.9})$$

a pour coordonnée selon l'axe de propagation :

$$u = \vec{e}_u \cdot \vec{r} = \alpha x + \beta y + \gamma z \quad (\text{IV.10})$$

Par suite :

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial x} \vec{E}(u, t) = \frac{\partial}{\partial u} \vec{E}(u, t) \frac{\partial}{\partial x} u = \alpha \frac{\partial}{\partial u} \vec{E}(u, t) \quad (\text{IV.11})$$

d'où :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{E}(\vec{r}, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \vec{E}(u, t)$$

(IV.12)

En appliquant la même démarche pour les dérivées partielles par rapport à y et z , on montre que, pour une onde plane:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \vec{E}(u, t) + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \vec{E}(u, t) + \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \vec{E}(u, t) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} \vec{E}(u, t)$$

(IV.13)

Au final, dans ce cas, l'équation d'onde se ramène à l'équation d'onde unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \vec{E}(u, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(u, t) = \vec{0}$$

(IV.14)

Une telle équation admet des solutions de la forme :

$$\vec{E}(u, t) = \vec{E}^+(ct - u) + \vec{E}^-(ct + u)$$

(IV.15)

correspondant à la superposition d'une onde directe et d'une onde rétrograde.

Dans la suite, on ne s'intéresse qu'au premier terme, c'est à dire qu'on fait l'hypothèse d'une onde progressive (directe).

On montre de la même façon que le champ magnétique présente la même forme.

Il reste maintenant à réinjecter cette solution $\{ \vec{E}^+(ct - u), \vec{B}^+(ct - u) \}$ de l'équation de propagation dans les équations de Maxwell afin de préciser les propriétés supplémentaires que lui confèrent les lois de l'électromagnétisme.

II.2 Propriétés de l'onde plane électromagnétique

Remarques :

Dans la suite, on ne s'intéresse qu'aux champs réellement propagés, c'est-à-dire aux champs qui présentent à la fois des variations spatiales et temporelles. On élimine donc systématiquement toute solution constante vis-à-vis de u et/ou de t .

Les propriétés observées en (IV.11) pour la dérivation du champ associé à une onde plane permettent de représenter formellement l'opérateur $\vec{\nabla}$ comme :

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} = \vec{e}_u \frac{\partial}{\partial u}$$

(IV.16)

Cette représentation n'a bien sûr un sens que si l'opérateur est effectivement appliqué à une onde plane !

D'après (IV.16) et (IV.1), le champ associé à une onde plane vérifiera (en dehors des zones d'excitation) :

$$\vec{e}_u \cdot \frac{\partial}{\partial u} \vec{E}(u, t) = 0$$

(IV.17)

soit encore :

$$\frac{\partial}{\partial u} [\vec{e}_u \cdot \vec{E}(u, t)] = \frac{\partial}{\partial u} E_u(u, t) = 0$$

(IV.18)

E_u représente la composante du vecteur champ électrique selon la direction u . Il s'agit donc de la composante longitudinale du champ (vis-à-vis de la direction de propagation).

Il résulte de (IV.18) que cette composante est nécessairement nulle. Il en va de même de la composante longitudinale du vecteur induction magnétique (qui satisfait en effet à la même condition de nullité de la divergence).

Au final, il apparaît que la composante longitudinale du champ est nulle pour une onde plane. On parle d'onde TEM (Transverse ElectroMagnétique).

Il reste maintenant à voir comment la solution se particularise lorsqu'on lui impose en plus de vérifier les deux équations de Maxwell restantes (les équations rotationnelles). On s'intéresse par exemple à l'équation de Maxwell-Faraday qui, d'après (IV.16), peut s'écrire :

$$\vec{e}_u \times \frac{\partial}{\partial u} \vec{E}(u, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(u, t) \quad (\text{IV.19})$$

On rappelle qu'une onde progressive directe $\vec{E}(u, t) = \vec{E}^+(ct - u)$ vérifie la relation :

$$\frac{\partial}{\partial u} \vec{E}(u, t) = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(u, t) \quad (\text{IV.20})$$

(IV.19) s'écrit donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{B}(u, t) - \frac{1}{c} \vec{e}_u \times \vec{E}(u, t) \right] = \vec{0} \quad (\text{IV.21})$$

La solution constante étant exclue, il vient:

$$\vec{B}(u, t) = \frac{1}{c} \vec{e}_u \times \vec{E}(u, t) \quad (\text{IV.22})$$

qu'on exprime plus couramment en terme de relation entre champ électrique et champ magnétique:

$$\vec{H}(u, t) = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{e}_u \times \vec{E}(u, t) \quad (\text{IV.23})$$

soit :

$$\vec{H}(u, t) = \frac{1}{\eta_0} \vec{e}_u \times \vec{E}(u, t)$$

(IV.24)

La constante de proportionnalité entre les deux champs:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

(IV.25)

est appelée l'impédance du vide (elle vaut 377Ω).

En résumé, ces résultats montrent que :

- les champs électrique et magnétique ne sont pas seulement orthogonaux à l'axe de propagation ; ils sont également orthogonaux entre eux ;
- le trièdre $\{ \vec{e}_u, \vec{E}, \vec{H} \}$ est direct ;
- l'amplitude du champ électrique est 377 fois supérieure à celle du champ magnétique.

La figure 4.1 illustre la propagation d'une onde plane.

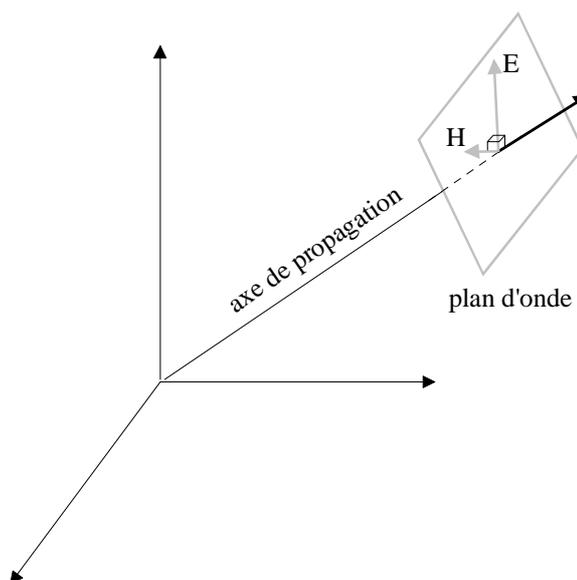


Figure 4.1 : propagation d'une onde plane

II.3 Energie associée à une onde plane

En dehors des zones d'excitation et en l'absence de charges, le théorème de Poynting s'écrit :

$$-\frac{d}{dt} \iiint_V w(\vec{r}, t) dV = \iint_S \vec{R}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} dS \quad (\text{IV.26})$$

Ce résultat signifie que les pertes d'énergie dans un volume V sont uniquement dues au flux d'énergie sortant au travers de la surface S de V .

La densité volumique d'énergie électromagnétique associée à une onde plane progressive vaut :

$$\begin{aligned} w(\mathbf{u}, t) &= \varepsilon_0 \frac{\|\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, t)\|^2}{2} + \mu_0 \frac{\|\vec{\mathbf{H}}(\mathbf{u}, t)\|^2}{2} = \varepsilon_0 \frac{\|\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, t)\|^2}{2} + \mu_0 \frac{\|\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, t)\|^2}{2\eta_0^2} = \varepsilon_0 \frac{\|\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, t)\|^2}{2} + \varepsilon_0 \frac{\|\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, t)\|^2}{2} \\ &= \varepsilon_0 \|\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, t)\|^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

On remarque que la densité d'énergie électrique est égale à la densité d'énergie magnétique.

Le vecteur de Poynting s'écrit quant à lui :

$$\begin{aligned} \vec{R}(\mathbf{u}, t) &= \vec{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, t) \times \vec{\mathbf{H}}(\mathbf{u}, t) = \vec{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, t) \times \left[\frac{\vec{\mathbf{e}}_u \times \vec{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, t)}{\eta_0} \right] \\ &= \vec{\mathbf{e}}_u \frac{\|\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{u}, t)\|^2}{\eta_0} \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

On remarque qu'il est orienté selon l'axe de propagation, qui représente donc bien la direction dans laquelle l'énergie s'écoule.

A titre d'illustration du théorème de Poynting, on peut calculer l'énergie qui traverse une surface infinitésimale dS de normale \vec{n} pendant un intervalle de temps $[t, t+dt]$. Cette énergie est donnée par :

$$\vec{R}(\mathbf{u}, t) \cdot \vec{n} \, dS \, dt = \frac{\|\vec{E}(\mathbf{u}, t)\|^2}{\eta_0} \vec{e}_u \cdot \vec{n} \, dS \, dt = \left[\varepsilon_0 \|\vec{E}(\mathbf{u}, t)\|^2 \right] \vec{e}_u \cdot \vec{n} \, dS \left(\frac{dt}{\eta_0 \varepsilon_0} \right) = w(\mathbf{u}, t) \vec{e}_u \cdot \vec{n} \, dS \, c \, dt \quad (\text{IV.29})$$

Il s'agit bien de l'énergie qui était contenue à l'instant t dans le volume $dV = \vec{e}_u \cdot \vec{n} \, dS \, c \, dt$, volume engendré par une translation de l'élément de surface dS , d'une distance $c \, dt$ selon la direction de propagation \mathbf{u} .

III. ONDES PLANES EN REGIME HARMONIQUE

III.1 Définitions

En régime harmonique, le champ (électrique par exemple) associé à une onde plane progressive s'écrit :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}^+(ct - \mathbf{u}) = \text{Re} \left\{ \vec{E}_0 \exp \left[j \frac{\omega}{c} (ct - \mathbf{u}) \right] \right\} \quad (\text{IV.30})$$

Classiquement, on définit :

- le nombre d'ondes (en $\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$) :

$$\boxed{k_0 = \frac{\omega}{c}}$$

(IV.31)

- le vecteur d'ondes

$$\boxed{\vec{k}_0 = k_0 \vec{e}_u}$$

(IV.32)

et on obtient :

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[\vec{E}_0 \exp j(\omega t - \vec{k}_0 \cdot \vec{r}) \right]}$$

(IV.33)

Le champ complexe associé vaut :

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \exp(-j\vec{k}_0 \cdot \vec{r})}$$

(IV.35)

Pour une telle onde, d'après (IV.35) et (IV.16), l'opérateur $\vec{\nabla}$ se simplifie comme :

$$\vec{\nabla} = -j\vec{k}_0$$

(IV.36)

On retrouve immédiatement les propriétés de l'onde plane (transversalité des champs par rapport à la direction de propagation et orthogonalité des champs entre eux) en réécrivant les équations de Maxwell à l'aide de cette relation. Par exemple :

$$\text{Maxwell - Gauss (sans sources)} \Rightarrow -j\vec{k}_0 \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \text{transversalité de } \vec{E}$$

$$\text{Maxwell - Faraday} \Rightarrow -j\vec{k}_0 \times \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{B}(\vec{r}) \Rightarrow \text{relation entre } \vec{E} \text{ et } \vec{B}$$

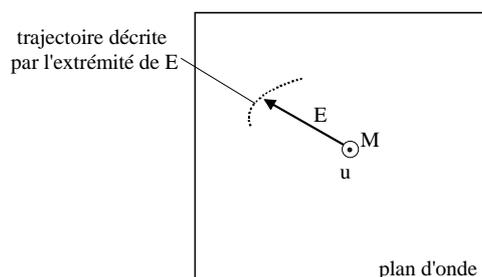
(IV.37)

III.2 Polarisation de l'onde plane

La polarisation de l'onde définit la direction du champ électrique et surtout l'évolution de cette direction en fonction du temps. L'analyse de la polarisation d'une onde en un point nécessite donc l'étude de la courbe décrite, dans l'espace et en fonction du temps, par l'extrémité du champ électrique en ce point.

Pour une onde plane, par nature, la polarisation est indépendante du point de l'espace où l'on se place. Par ailleurs, la propriété de transversalité implique que le champ (et donc la courbe que décrit son extrémité) appartienne au plan d'onde au point considéré.

Figure 4.2 : Courbe décrite par l'extrémité du champ électrique dans le plan d'onde



L'expression du champ en un point M (repéré par \vec{r}) est par exemple donnée par :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{\bar{E}}(\vec{r})\exp(j\omega t)] \quad (\text{IV.38})$$

On pose :

$$\vec{\bar{E}}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} A_x \exp(j\phi_x) \\ A_y \exp(j\phi_y) \\ A_z \exp(j\phi_z) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.39})$$

$A_x, \phi_x, A_y, \phi_y, A_z$ et ϕ_z représentant respectivement les amplitudes et phases des composantes E_x, E_y et E_z du champ électrique complexe en M.

On obtient :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{bmatrix} A_x \cos(\omega t + \phi_x) \\ A_y \cos(\omega t + \phi_y) \\ A_z \cos(\omega t + \phi_z) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.40})$$

ou encore :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{bmatrix} A_x \cos(\phi_x) \\ A_y \cos(\phi_y) \\ A_z \cos(\phi_z) \end{bmatrix} \cos(\omega t) + \begin{bmatrix} -A_x \sin(\phi_x) \\ -A_y \sin(\phi_y) \\ -A_z \sin(\phi_z) \end{bmatrix} \sin(\omega t) \quad (\text{IV.41})$$

On peut définir les vecteurs :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} A_x \cos(\phi_x) \\ A_y \cos(\phi_y) \\ A_z \cos(\phi_z) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} -A_x \sin(\phi_x) \\ -A_y \sin(\phi_y) \\ -A_z \sin(\phi_z) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.42})$$

(IV.41) devient :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \|\vec{v}\| \cos(\omega t) \vec{e}_v + \|\vec{w}\| \sin(\omega t) \vec{e}_w \quad (\text{IV.43})$$

(\vec{e}_v, \vec{e}_w) définit une base normée (mais a priori non orthogonale) du plan d'onde en M.

La courbe décrite par l'extrémité du champ électrique en M, dans le plan d'onde et en fonction du temps, admet comme représentation paramétrique, dans le repère local (M, v, w) :

$$\begin{cases} E_v = \|\vec{v}\| \cos(\omega t) \\ E_w = \|\vec{w}\| \sin(\omega t) \end{cases} \quad (\text{IV.44})$$

L'intérêt de cette écriture est qu'elle fait apparaître simplement l'équation d'une ellipse (dont les axes principaux ne sont pas nécessairement (M, v) et (M, w) compte tenu de la non orthogonalité de ces axes).

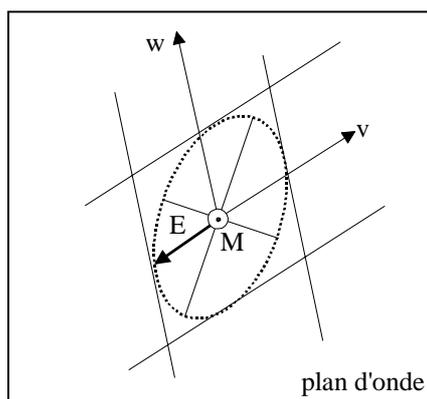


Figure 4.3 : Ellipse de polarisation dans le repère (M, v, w)

En résumé, pour une onde plane, la courbe décrite par l'extrémité du champ électrique dans le plan d'onde est une ellipse : on parle de polarisation elliptique.

Le repère (M, v, w) du plan d'onde utilisé pour mettre en évidence l'équation paramétrique de l'ellipse de polarisation est en pratique inadapté pour définir simplement les paramètres de celle-ci. On préfère en général se ramener des axes plus faciles à matérialiser. On définit donc un repère orthonormé (M, H, V) . (M, H) est l'axe passant par M et définissant l'intersection entre le plan d'onde et le plan horizontal (ou par extension un plan de référence clairement

identifié). (M,V) est l'axe du plan d'onde passant par M , orthogonal à (M,H) et dont l'orientation est définie de façon que le trièdre $(\vec{e}_H, \vec{e}_V, \vec{k})$ soit direct.

Dès lors, l'ellipse peut être définie par les deux angles: l'angle d'orientation ϕ et l'angle d'ouverture τ .

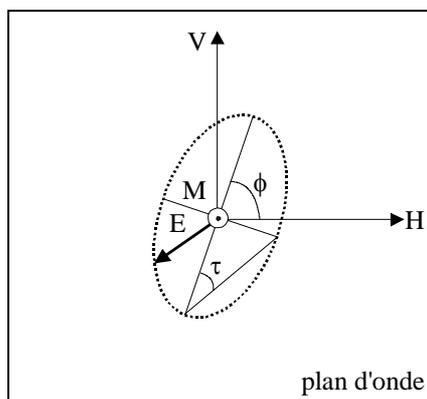


Figure 4.4 : Ellipse de polarisation dans le repère (M,H,V) et angles caractéristiques

On remarquera les cas particuliers suivants :

- L'ellipse se réduit à un segment de droite si $\tau=0$; la polarisation est dite linéaire. On parle en particulier de polarisation linéaire verticale si le segment est orienté selon l'axe (M,V) , c'est-à-dire si $\phi=(2n+1)\pi/2$, et de polarisation linéaire horizontale s'il est orienté selon l'axe (M,H) , c'est à dire si $\phi=n\pi$.
- L'ellipse se ramène à un cercle si $\tau=45^\circ$; la polarisation est dite circulaire.

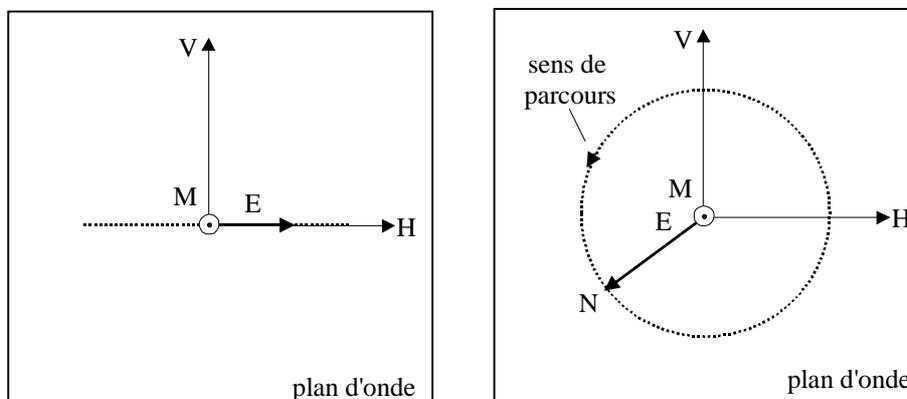


Figure 4.5 : Cas particuliers de la polarisation linéaire (horizontale) et circulaire (droite)

Pour une polarisation circulaire (ou même elliptique), le sens de rotation du champ électrique est très important : la polarisation est dite circulaire droite lorsqu'un observateur regardant l'onde venir vers lui voit le champ tourner dans le sens trigonométrique. Mathématiquement, cette condition est atteinte si le trièdre $\{ \vec{E}, \frac{d}{dt} \vec{E}, \vec{e}_u \}$ est direct.

A titre d'exemple, si l'on considère une onde à polarisation circulaire droite se propageant selon l'axe (O,z) et dans le sens des z positifs, le champ électrique associé s'exprime:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = E_0 (\vec{e}_x - j\vec{e}_y) \exp(-jk_0 z)}$$
(IV.45)

Inversement, la polarisation est dite circulaire gauche si la rotation s'effectue en sens opposé. Dans le cas de l'exemple précédent, pour une polarisation circulaire gauche, le champ s'écrit:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = E_0 (\vec{e}_x + j\vec{e}_y) \exp(-jk_0 z)}$$
(IV.46)

Remarques

Une polarisation elliptique (et donc circulaire) peut être traitée comme la somme de deux polarisations linéaires. Cette propriété est illustrée par la relation (IV.43).

Une polarisation linéaire peut être traitée comme la somme de deux polarisations circulaires (gauche et droite). Par exemple, en ajoutant les équations (IV.45) et (IV.46), on obtient une polarisation linéaire selon x.

III.3 Ondes planes inhomogènes

Les équations de propagation électromagnétique, en régime harmonique et en dehors des sources, se ramènent (pour le champ électrique par exemple) à :

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + k_0^2 \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}}$$

(IV.47)

Cette équation et son équivalent en champ magnétique sont appelées équations de Helmholtz.

Dans les paragraphes précédents, on s'est uniquement intéressé à des solutions de la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \exp(-j\vec{k}_0 \cdot \vec{r})$$

(IV.48)

On s'intéresse maintenant à la solution plus générale :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \exp(-j\vec{k} \cdot \vec{r})$$

(IV.49)

où :

$$\vec{k} = \vec{\beta} - j\vec{\alpha}$$

(IV.50)

est dorénavant un vecteur complexe quelconque.

On vérifie facilement que, pour une telle solution :

$$\vec{\nabla} = -j\vec{k}$$

(IV.51)

L'équation (IV.47) devient dès lors :

$$-\vec{k}^2 \vec{E}(\vec{r}) + k_0^2 \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$$

(IV.52)

ce qui impose d'avoir :

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} - 2j\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = k_0^2 \quad (\text{IV.53})$$

Une solution de la forme avec (IV.49) est donc possible à condition d'avoir :

$$\begin{cases} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \\ \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} = k_0^2 \end{cases} \quad (\text{IV.54})$$

La solution du paragraphe précédent correspond donc au cas particulier :

$$\vec{\alpha} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\beta} = \vec{k}_0 \quad (\text{IV.55})$$

Dans le cas général, les vecteurs $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ sont orthogonaux.

L'expression du champ est :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}_0 \exp \left[j \left(\omega t - \vec{\beta} \cdot \vec{r} + j\vec{\alpha} \cdot \vec{r} \right) \right] \right\} = \|\vec{E}_0\| \vec{e}_0 \exp(-\vec{\alpha} \cdot \vec{r}) \cos(\omega t - \vec{\beta} \cdot \vec{r} + \angle \vec{E}_0) \quad (\text{IV.56})$$

Il s'agit bien d'une onde plane au sens où tous les points d'un même plan d'équation $\vec{\beta} \cdot \vec{r} = \text{constante}$ vibrent simultanément (ils ont la même phase). Par contre, ces points ne possèdent pas la même amplitude (les plans équiampplitudes ont pour équation $\vec{\alpha} \cdot \vec{r} = \text{constante}$) puisque $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ ne sont pas colinéaires. On parle dans ce cas d'onde plane inhomogène. L'existence d'une telle onde dans le vide est généralement liée à la présence de conditions aux limites particulières (onde de surface en présence d'une interface diélectrique par exemple).

Pour satisfaire aux équations de Maxwell, le champ véhiculé par l'onde doit vérifier (entre autre) :

$$\vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (\text{IV.57})$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}(\vec{r}) \quad (\text{IV.58})$$

Une particularité des ondes planes inhomogènes tient au fait que ces conditions n'impliquent ni l'orthogonalité des champs ni leur transversalité. Pour s'en persuader, on suppose par exemple que :

$$\vec{\alpha} = \alpha \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{\beta} = \beta \vec{e}_z \quad (\text{IV.59})$$

avec :

$$\beta^2 - \alpha^2 = k_0^2 \quad (\text{IV.60})$$

Les conditions (IV.54) sont bien vérifiées et l'axe de propagation correspond à l'axe (O,z).

D'après (IV.57), les composantes selon y et z du champ électrique doivent vérifier :

$$-j\alpha E_y + \beta E_z = 0$$

Cette relation peut être vérifiée de deux façons. Le premier choix consiste à prendre :

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec E_x différent de zéro.

(IV.61)

L'induction magnétique associée est :

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} 0 \\ -j\alpha \\ \beta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta E_x \\ j\alpha E_x \end{bmatrix}$$

(IV.62)

Le second choix possible est :

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ j\frac{\alpha}{\beta} E_y \end{bmatrix}$$

(IV.63)

dans lequel on pose $E_x=0$ pour avoir une solution orthogonale à la précédente.

L'induction magnétique associée vaut cette fois :

$$\vec{B} = -\frac{k_0^2}{\omega\beta} \begin{bmatrix} E_Y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(IV.64)

Il est clair que dans le premier choix seul le champ électrique est transverse (on parle d'onde TE pour Transverse Electric) alors que dans le second seule l'induction magnétique est transverse (onde TM).

La solution générale à notre problème sera une combinaison linéaire de ces deux solutions TE et TM.

Remarque : cette technique de décomposition en solutions TE et TM orthogonales est très fréquente dans les problèmes d'électromagnétisme.

III.5 Décomposition d'une onde en un spectre d'ondes planes

Dans les paragraphes précédents, on s'est intéressé à l'onde plane, introduite comme solution naturelle de l'équation de propagation unidimensionnelle.

Une approche plus mathématique permet d'aborder de façon plus systématique la résolution de l'équation de propagation (ou de l'équation de Helmholtz en régime harmonique). On se place ici dans un système de coordonnées cartésiennes.

On peut montrer, en utilisant la technique de séparation des variables, que la composante selon x du champ électrique complexe (par exemple) est de la forme :

$$E_x(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)$$

(IV.65)

où f, g et h vérifient les équations différentielles harmoniques :

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = -k_x^2 f(x)$$

$$\frac{d^2}{dy^2} g(y) = -k_y^2 g(y)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} h(z) = -k_z^2 h(z)$$

(IV.66)

k_x , k_y et k_z sont des constantes arbitraires vérifiant :

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_0^2$$

(IV.67)

Chacune de ces équations admet une solution de la forme (pour f par exemple) :

$$f(x) = A \exp(-jk_x x) + B \exp(jk_x x)$$

(IV.68)

Finalement, $E_x(x,y,z)$ est une somme de termes exponentiels du type :

$$\exp(\pm jk_x x) \exp(\pm jk_y y) \exp(\pm jk_z z)$$

(IV.69)

On retrouve bien une forme générale en :

$$\exp(-j\vec{k} \cdot \vec{r})$$

(IV.70)

\vec{k} étant un vecteur dont les composantes k_x , k_y et k_z ont pour seule contrainte de vérifier (IV.67).

La solution générale de l'équation est une somme continue sur toutes les combinaisons (k_x , k_y) possibles de cette forme exponentielle.

$$\int \int_{k_y, k_x} A(k_x, k_y, k_z) \exp(-j\vec{k} \cdot \vec{r}) dk_x dk_y$$

(IV.71)

Pour une combinaison (k_x , k_y), k_z est donné par (IV.67).

Cette expression montre qu'une onde quelconque est représentable par une somme continue d'ondes planes au même titre qu'un signal temporel est représentable par une somme continue de fonctions harmoniques (transformée de Fourier).

Ce résultat justifie a posteriori l'intérêt porté à ce type d'ondes.

Remarques :

Dans la décomposition considérée, k_x , k_y , k_z peuvent être des nombres complexes (cas des ondes inhomogènes notamment).

La décomposition en ondes planes n'est pas la seule décomposition possible : on peut utiliser des systèmes de coordonnées différents (sphérique ou cylindrique par exemple) qui conduisent à d'autres types de décomposition. Comme souvent, le choix du type de coordonnées est souvent lié aux conditions aux limites à traiter.

Chapitre 5 : PROPAGATION DANS UN MILIEU MATERIEL

I. PROPAGATION DANS UN MILIEU MATERIEL ILLIMITE

Afin de simplifier le traitement d'éventuels matériaux dispersifs, on se restreint dans ce chapitre au régime harmonique.

Par ailleurs, on adopte la formulation en terme de permittivité équivalente introduite dans le chapitre 2 (II.76). On considère donc un milieu illimité de caractéristiques $(\varepsilon^{\text{eq}}, \mu)$.

Les équations de Maxwell s'écrivent ainsi (au delà des points d'excitation) :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H}(\vec{r}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) &= -j\omega\mu\vec{H}(\vec{r}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) &= j\omega\varepsilon^{\text{eq}}\vec{E}(\vec{r})\end{aligned}\tag{V.1}$$

Les équations de Helmholtz résultantes (obtenues par application d'un rotationnel sur les deux dernières équations) sont :

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + k^2 \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{0} \\ \nabla^2 \vec{H}(\vec{r}) + k^2 \vec{H}(\vec{r}) &= \vec{0}\end{aligned}\tag{V.2}$$

avec :

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon^{\text{eq}}\tag{V.3}$$

Par analogie avec le chapitre précédent, ces équations admettent (entre autre) des solutions du type « onde plane homogène » :

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_0 \exp(-j\vec{k} \cdot \vec{r}) \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{1}{\eta} \vec{e}_u \times \vec{E}(\vec{r})\end{aligned}\tag{V.4}$$

où η est l'impédance intrinsèque du milieu :

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon^{\text{eq}}}}$$
(V.5)

et \vec{k} le vecteur d'onde :

$$\vec{k} = k\vec{e}_u$$
(V.6)

C'est le type de solution auquel on s'intéresse dans la suite.

II. PROPAGATION DANS UN MILIEU MATERIEL LIMITE

II.1 Rappel : lois de la réflexion et de la réfraction

On considère deux milieux notés 1 et 2 de caractéristiques respectives (ϵ_1, μ_1) et (ϵ_2, μ_2) . Les deux milieux sont séparés par une interface plane (NB : dans le cas général ϵ est une permittivité équivalente).

On note k_1 et k_2 les nombres d'ondes dans les milieux 1 et 2, η_1 et η_2 leur impédance.

On suppose qu'une onde plane de vecteur d'onde \vec{k}_i , issue du milieu 1, est incidente sur l'interface.

On choisit un repère orthonormé (O, x, y, z) vérifiant les conditions suivantes :

- L'axe (Oz) définit la normale à l'interface (pointant vers le milieu 2).
- L'axe (Ox) est positionné sur l'interface de façon à ce que \vec{k}_i appartienne au plan (O, x, z) .
- L'axe (Oy) complète le repère.

Au final, le plan (O, x, y) coïncide avec l'interface alors que le plan (O, x, z) , appelé plan d'incidence, contient la normale à l'interface et le vecteur d'onde associé à l'onde incidente.

Les lois de la réflexion et de la réfraction (loi de Snell-Descartes) stipulent que :

- Les vecteurs d'onde associés aux ondes réfléchie (\vec{k}_r) et transmise (\vec{k}_t) sont situés dans le plan d'incidence.
- L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence :

$$\theta_r = \theta_i \quad (\text{V.7})$$

- L'angle de réfraction est donné par la relation :

$$k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t \quad (\text{V.8})$$

On rappelle que ces lois résultent directement de la continuité d'au moins une composante du champ électromagnétique à l'interface.

II.2 Cas particulier de l'incidence normale

On considère, par simplicité et sans perte de généralité, que le champ est polarisé linéairement selon x. Le champ électrique incident s'écrit :

$$\vec{E}_i = E_0 \vec{e}_x \exp(-jk_1 z) \quad (\text{V.9})$$

Le champ magnétique incident s'en déduit en utilisant les propriétés de l'onde plane :

$$\vec{H}_i = \frac{1}{\eta_1} \vec{e}_z \times \vec{E}_i = \frac{E_0}{\eta_1} \vec{e}_y \exp(-jk_1 z) \quad (\text{V.10})$$

Le champ réfléchi vaut:

$$\begin{aligned} \vec{E}_r &= \Gamma E_0 \vec{e}_x \exp(+jk_1 z) \\ \vec{H}_r &= \frac{1}{\eta_1} (-\vec{e}_z) \times \vec{E}_r = -\frac{\Gamma E_0}{\eta_1} \vec{e}_y \exp(+jk_1 z) \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

où Γ représente le coefficient de réflexion.

Dans cette écriture, par convention, on oriente les champs électriques incident et réfléchi dans le même sens ; on considère donc qu'une éventuelle inversion de sens est représentée par un coefficient de réflexion négatif.

Le champ transmis s'écrit de même :

$$\vec{E}_t = TE_0 \vec{e}_x \exp(-jk_2 z) \quad (\text{V.12})$$

$$\vec{H}_t = \frac{1}{\eta_2} \vec{e}_z \times \vec{E}_t = \frac{TE_0}{\eta_2} \vec{e}_y \exp(-jk_2 z) \quad (\text{V.13})$$

où T représente le coefficient de transmission.

Au niveau de l'interface (en $z=0$), la composante tangentielle des champs électrique et magnétique est continue :

$$\begin{cases} \vec{e}_z \times (\vec{E}_1)_{z=0} = \vec{e}_z \times (\vec{E}_2)_{z=0} \\ \vec{e}_z \times (\vec{H}_1)_{z=0} = \vec{e}_z \times (\vec{H}_2)_{z=0} \end{cases} \quad (\text{V.14})$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E}_i + \vec{E}_r \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_t \\ \vec{H}_1 &= \vec{H}_i + \vec{H}_r \\ \vec{H}_2 &= \vec{H}_t \end{aligned} \quad (\text{V.15})$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{cases} 1 + \Gamma = T \\ \frac{(1 - \Gamma)}{\eta_1} = \frac{T}{\eta_2} \end{cases} \quad (\text{V.16})$$

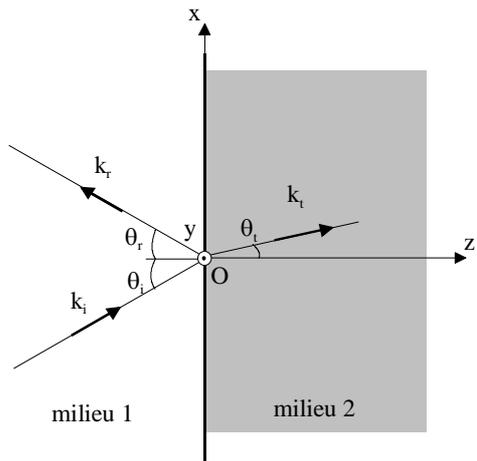


Figure 5.1 : Configuration générale étudiée
(Le plan d'incidence correspond au plan de la feuille)

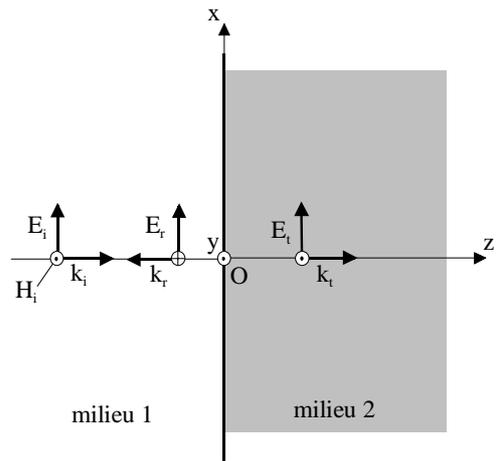


Figure 5.2 : Cas de l'incidence normale

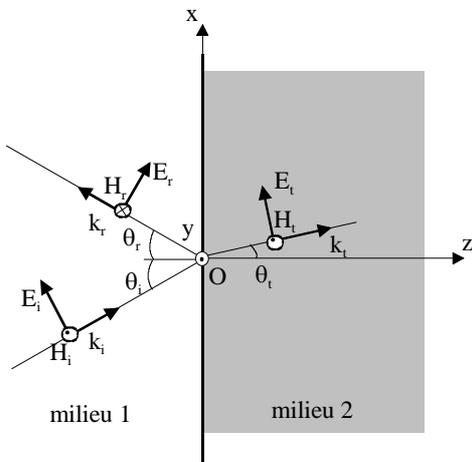


Figure 5.3 : Incidence oblique, polarisation parallèle (TM)

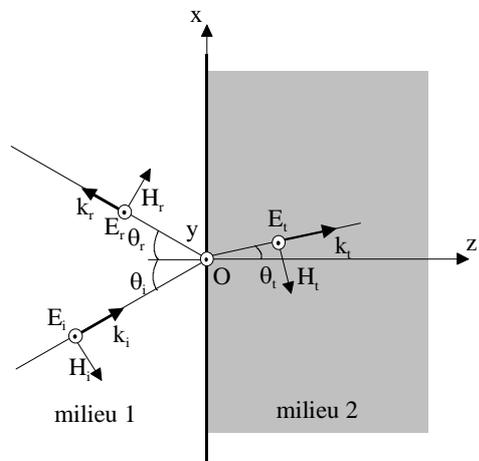


Figure 5.4 : Incidence oblique, polarisation perpendiculaire (TE)

soit :

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

$$T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

(V.17)

II.3 Cas général de l'incidence oblique : formules de Fresnel

Dans le cas général de l'incidence oblique, on doit d'emblée distinguer deux situations différentes :

- le cas où le champ électrique appartient au plan d'incidence (polarisation dite parallèle ou TM pour transverse magnetic)
- le cas où le champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence (polarisation dite perpendiculaire ou TE pour transverse electric)

Les deux cas ne sont en effet pas équivalents (comme ils l'étaient pour l'incidence normale) et une onde avec une polarisation quelconque peut être vue comme la somme d'une onde polarisée parallèlement et d'une onde polarisée perpendiculairement.

a) polarisation parallèle (TM)

Le champ incident s'écrit :

$$\vec{E}_i = E_0 (\vec{e}_x \cos \theta_i - \vec{e}_z \sin \theta_i) \exp(-jk_{1x}x - jk_{1z}z)$$

$$= E_0 (\vec{e}_x \cos \theta_i - \vec{e}_z \sin \theta_i) \exp[-jk_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)]$$

$$\vec{H}_i = \frac{1}{\eta_1} (\vec{e}_x \sin \theta_i + \vec{e}_z \cos \theta_i) \times \vec{E}_i = \frac{E_0}{\eta_1} \vec{e}_y \exp[-jk_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)]$$

(V.18)

Le champ réfléchi s'en déduit par :

$$\begin{aligned}
\vec{E}_r &= \Gamma E_0 (\vec{e}_x \cos \theta_i + \vec{e}_z \sin \theta_i) \exp(-jk_{1x}x + jk_{1z}z) \\
&= \Gamma E_0 (\vec{e}_x \cos \theta_i + \vec{e}_z \sin \theta_i) \exp[-jk_1(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)] \\
\vec{H}_r &= \frac{1}{\eta_1} (\vec{e}_x \sin \theta_i - \vec{e}_z \cos \theta_i) \times \vec{E}_r = -\frac{\Gamma E_0}{\eta_1} \vec{e}_y \exp[-jk_1(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)]
\end{aligned}
\tag{V.19}$$

Quant au champ transmis, il s'écrit :

$$\begin{aligned}
\vec{E}_t &= TE_0 (\vec{e}_x \cos \theta_t - \vec{e}_z \sin \theta_t) \exp(-jk_{2x}x - jk_{2z}z) \\
&= TE_0 (\vec{e}_x \cos \theta_t - \vec{e}_z \sin \theta_t) \exp[-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)] \\
\vec{H}_t &= \frac{1}{\eta_2} (\vec{e}_x \sin \theta_t + \vec{e}_z \cos \theta_t) \times \vec{E}_t = \frac{TE_0}{\eta_2} \vec{e}_y \exp[-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)]
\end{aligned}
\tag{V.20}$$

On remarquera que la convention consiste ici à orienter les champs électriques de façon que les composantes tangentielles soient toutes dans le même sens (des coefficients Γ et T négatifs traduisent donc une inversion de sens).

La continuité des composantes tangentielles des champs au niveau de l'interface conduit ici à :

$$\begin{cases} (1 + \Gamma) \cos \theta_i = T \cos \theta_t \\ \frac{(1 - \Gamma)}{\eta_1} = \frac{T}{\eta_2} \end{cases}
\tag{V.21}$$

soit :

$$\boxed{
\begin{aligned}
\Gamma_{\text{TM}} &= \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} \\
T_{\text{TM}} &= \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}
\end{aligned}
}
\tag{V.22}$$

b) polarisation perpendiculaire (TE)

Le raisonnement est le même mais les expressions des champs sont différentes.

Champs incidents :

$$\begin{aligned}\vec{E}_i &= E_0 \vec{e}_y \exp[-jk_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)] \\ \vec{H}_i &= \frac{1}{\eta_1} (\vec{e}_x \sin \theta_i + \vec{e}_z \cos \theta_i) \times \vec{E}_i = \frac{E_0}{\eta_1} (-\vec{e}_x \cos \theta_i + \vec{e}_z \sin \theta_i) \exp[-jk_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)]\end{aligned}\quad (\text{V.23})$$

Champs réfléchis :

$$\begin{aligned}\vec{E}_r &= \Gamma E_0 \vec{e}_y \exp[-jk_1(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)] \\ \vec{H}_r &= \frac{1}{\eta_1} (\vec{e}_x \sin \theta_i - \vec{e}_z \cos \theta_i) \times \vec{E}_r = \frac{\Gamma E_0}{\eta_1} (\vec{e}_x \cos \theta_i + \vec{e}_z \sin \theta_i) \exp[-jk_1(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)]\end{aligned}\quad (\text{V.24})$$

Champs transmis :

$$\begin{aligned}\vec{E}_t &= T E_0 \vec{e}_y \exp[-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)] \\ \vec{H}_t &= \frac{1}{\eta_2} (\vec{e}_x \sin \theta_t + \vec{e}_z \cos \theta_t) \times \vec{E}_t = \frac{T E_0}{\eta_2} (-\vec{e}_x \cos \theta_t + \vec{e}_z \sin \theta_t) \exp[-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)]\end{aligned}\quad (\text{V.25})$$

On en déduit :

$$\boxed{\begin{aligned}\Gamma_{\text{TE}} &= \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \\ T_{\text{TE}} &= \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}\end{aligned}}$$

(V.26)

Pour $\theta_i=0$ (incidence normale), les formules TE et TM conduisent évidemment au même résultat.

- *Cas de l'interface entre deux diélectriques sans pertes*

Pour deux diélectriques sans pertes, les simplifications suivantes sont applicables :

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \mu_1 = \mu_0 \\ \sin \theta_t &= \frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \sin \theta_i \\ \cos \theta_t &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \sin^2 \theta_i}\end{aligned}\tag{V.27}$$

Ces relations nécessitent a priori d'avoir :

$$\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \sin \theta_i \leq 1\tag{V.28}$$

Cette condition est toujours vérifiée pour $\epsilon_{r2} \geq \epsilon_{r1}$. Dans le cas contraire, elle fait apparaître un angle θ_c , dit angle d'incidence critique :

$$\sin \theta_c = \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}}\tag{V.29}$$

au delà duquel les phénomènes demandent une interprétation particulière.

Considérons par exemple l'expression du champ électrique transmis en polarisation TE.

Au delà de θ_c , on a :

$$\begin{aligned}\sin \theta_t &= \frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i > 1 \\ \cos \theta_t &= \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i\right)^2} = \pm j \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i\right)^2 - 1}\end{aligned}\tag{V.30}$$

ce qui conduit à :

$$\vec{E}_t = TE_0 \vec{e}_y \exp(-jk_1 x \sin \theta_i) \exp\left(\pm \sqrt{(k_1 \sin \theta_i)^2 - (k_2)^2} z\right) \quad (\text{V.31})$$

Cette expression montre que le champ transmis se propage selon la direction x (direction de variation de la phase) et qu'il s'atténue selon la direction z (seul le signe $-$ est acceptable physiquement dans l'exponentielle en z). En fait, le champ reste confiné au voisinage de l'interface, le long de laquelle il se propage. On parle alors d'onde de surface.

On revient maintenant à une incidence quelconque. Les expressions des coefficients de réflexion peuvent être reformulées à l'aide de (V.27) :

$$\Gamma_{\text{TM}} = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \sin^2 \theta_i} - \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}}{\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \sin^2 \theta_i} + \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}} \quad (\text{V.32})$$

$$\Gamma_{\text{TE}} = \frac{-\sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \sin^2 \theta_i} + \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}}{\sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} \sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \sin^2 \theta_i} + \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}} \quad (\text{V.33})$$

On remarquera qu'il est possible d'annuler Γ_{TM} à condition de choisir :

$$\sin \theta_i = \sin \theta_b = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}} \quad (\text{V.34})$$

θ_b est appelé angle de Brewster.

Par contre, il est impossible d'annuler Γ_{TE} si ϵ_{r2} et ϵ_{r1} sont différents.

Les coefficients de transmission sont quant à eux donnés par :

$$T_{TM} = \frac{2\sqrt{\epsilon_{r1}}\sqrt{1-\sin^2\theta_i}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}\sqrt{1-\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}\sin^2\theta_i} + \sqrt{\epsilon_{r2}}\sqrt{1-\sin^2\theta_i}} \quad (V.35)$$

$$T_{TE} = \frac{2\sqrt{\epsilon_{r1}}\sqrt{1-\sin^2\theta_i}}{\sqrt{\epsilon_{r1}}\sqrt{1-\sin^2\theta_i} + \sqrt{\epsilon_{r2}}\sqrt{1-\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}\sin^2\theta_i}} \quad (V.36)$$

Finalement, les tableaux suivants résument l'évolution du coefficient de réflexion et du coefficient de transmission en fonction de l'angle d'incidence :

	0	θ_b	θ_c (uniquement si $\epsilon_{r1} > \epsilon_{r2}$)	$\pi/2$
Γ_{TM}	$\frac{\sqrt{\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} - 1$	0	-1	1
Γ_{TE}	$\frac{\sqrt{\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} + 1$	Formule générale	1	-1

	0	θ_b	θ_c (uniquement si $\epsilon_{r1} > \epsilon_{r2}$)	$\pi/2$
T_{TM}	$\frac{2\sqrt{\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\epsilon_{r2}}}$	1	$2\sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}}$	0
T_{TE}	$\frac{\sqrt{\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\epsilon_{r2}}} + 1$	Formule générale	2	0

Dans le cas où $\epsilon_{r1} > \epsilon_{r2}$, on peut vérifier que Γ est complexe pour une incidence comprise entre θ_c et $\pi/2$ et que son module reste égal à 1.

- *Cas de l'interface entre un diélectrique et un bon conducteur*

On considère que le second milieu est un conducteur de conductivité $\sigma \gg 1$. Les expressions établies pour l'interface entre deux diélectriques restent vraies à condition de remplacer ϵ_2 par :

$$\epsilon_2 = \epsilon_2^{\text{eq}} = \epsilon_0 - j \frac{\sigma}{\omega} \approx -j \frac{\sigma}{\omega} \quad (\text{V.37})$$

L'impédance du milieu 2, appelée dans ce cas impédance de surface et notée Z_s , s'en déduit comme:

$$Z_s = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_2}} \approx \sqrt{j \frac{\mu_0 \omega}{\sigma}} = (1 + j) R_s \quad (\text{V.38})$$

avec :

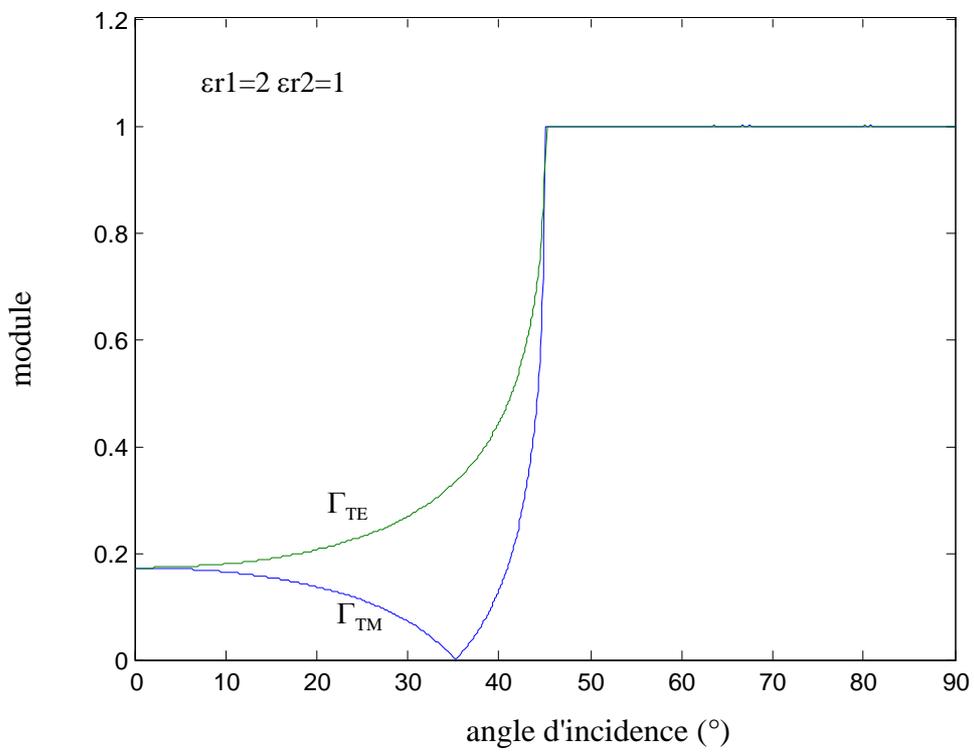
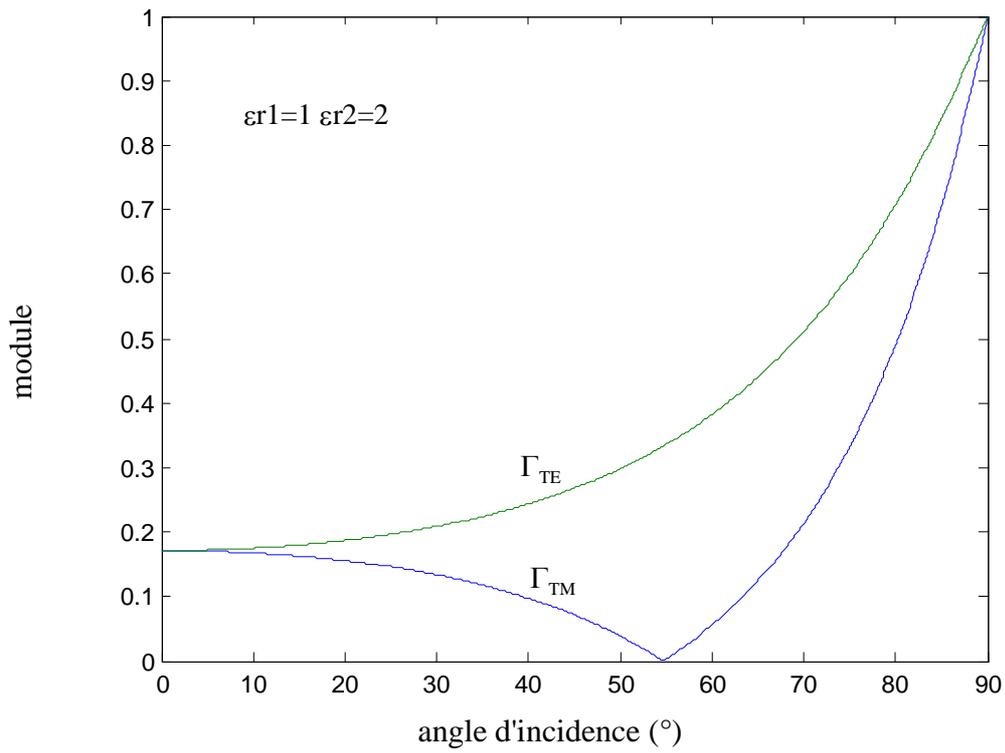
$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu_0 \omega}} \quad (\text{V.39})$$

Le coefficient de réflexion sous incidence normale est donné par :

$$\Gamma = \frac{(1 + j) R_s - \eta_0}{(1 + j) R_s + \eta_0} \quad (\text{V.40})$$

Lorsque le conducteur est très bon, R_s est pratiquement nulle et Γ tend vers -1 .



Exemples de coefficients de réflexion à l'interface entre deux milieux diélectriques

- *Cas de l'interface entre un diélectrique et un conducteur parfait*

Le cas du conducteur parfait, en toute rigueur, ne peut pas être extrapolé à partir du cas bon conducteur car la nature des conditions aux limites est différente. En particulier, la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique (2^{ème} équation de V.21) n'est plus assurée compte tenu de la présence de courants de surface. Néanmoins, la nullité de la composante tangentielle du champ électrique sur le conducteur parfait est alors suffisante pour montrer que le coefficient de réflexion est égal à -1 quel que soit l'angle d'incidence (sauf sous incidence rasante $\theta_i = \pi/2$). On peut, pour s'en persuader, considérer la 1^{ère} équation de V.21 en imposant d'avoir $T=0$ (le champ transmis au delà de l'écran parfaitement conducteur est nul).

Remarque :

Dans un problème d'électromagnétisme comportant des conducteurs, il est très confortable de pouvoir travailler avec une hypothèse de conducteur parfait. La configuration à considérer est alors celle de la figure 5.5.

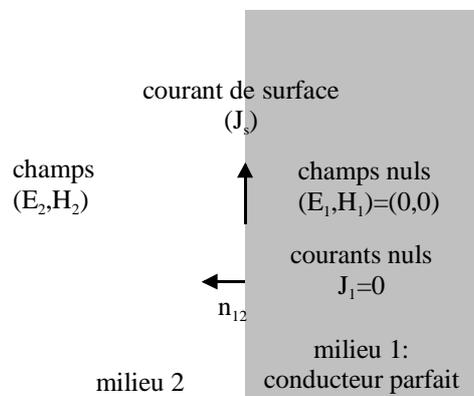


Figure 5.5 : conducteur parfait

Les conditions aux limites associées sont données par :

$$\begin{aligned} \vec{n}_{12} \times \vec{E}_2 &= \vec{0} \\ \vec{n}_{12} \times \vec{H}_2 &= \vec{J}_s \end{aligned} \quad \text{à la surface du conducteur}$$

(V.41)

Le cas du bon conducteur est moins immédiat car il nécessite en théorie la détermination de champs non nuls à l'intérieur du conducteur.

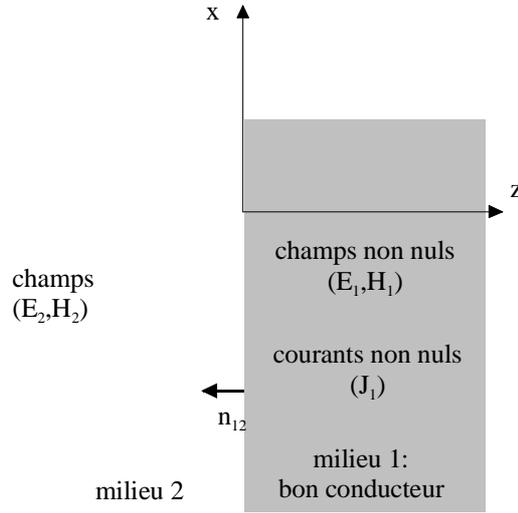


Figure 5.6 : bon conducteur

Les conditions qui s'appliquent sont dans ce cas les conditions aux limites classiques:

$$\begin{aligned} \vec{n}_{12} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= \vec{0} \\ \vec{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \vec{0} \end{aligned} \quad \text{à la surface du conducteur} \quad (\text{V.42})$$

Il n'y a en effet dans ce cas plus de courant de surface mais un courant volumique à décroissance exponentielle (voir chap. 2 : effet de peau). En pratique, pour éviter d'avoir à considérer des courants et des champs non nuls à l'intérieur du conducteur, on fait souvent l'hypothèse suivante : le courant volumique dans le conducteur est ramené à sa surface et assimilé à un courant surfacique. Pour ce faire, on intègre le courant volumique sur l'épaisseur du conducteur et on applique la loi d'Ohm :

$$\vec{J}_s(x, y, 0) = \int_0^{\infty} \vec{J}_1(x, y, z) \exp\left(-\frac{1+j}{\delta} z\right) dz = \frac{\delta}{1+j} \vec{J}_1(x, y, 0) = \frac{\sigma \delta}{1+j} \vec{E}_1(x, y, 0) = \frac{\vec{E}_1(x, y, 0)}{Z_s} \quad (\text{V.43})$$

Finalement, le problème approché est celui de la figure 5.5 avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{n}_{12} \times \vec{E}_2 &= \vec{n}_{12} \times \vec{E}_1 = Z_s (\vec{n}_{12} \times \vec{J}_s) \\ \vec{n}_{12} \times \vec{H}_2 &= \vec{J}_s \end{aligned} \quad \text{à la surface du conducteur} \quad (\text{V.44})$$

La première de cette équation traduit la continuité du champ électrique tangentiel au niveau de l'interface.

III. EXEMPLE DE PROPAGATION DANS UN MILIEU ANISOTROPE

L'objectif de ce paragraphe est d'illustrer la propagation d'une onde plane dans un milieu anisotrope.

Un milieu anisotrope est un milieu possédant des caractéristiques différentes dans les trois directions de l'espace. Le milieu considéré ici est un milieu diélectrique uniaxial, ce qui signifie que l'une des directions de l'espace, ici l'axe (O,x), se distingue des autres par sa permittivité. Le tenseur permittivité s'exprime dans ce cas :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(V.45)

en faisant ici l'hypothèse d'une permittivité relative unitaire dans les directions y et z.

Remarques :

- L'axe (O,x) est appelé axe optique.
- Le fait d'avoir une matrice diagonale correspond à un choix judicieux du système d'axes.

On considère la propagation dans ce milieu, et selon la direction (O,z), d'une onde plane en régime harmonique. Compte tenu de la propriété de transversalité, on a :

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_x(z)\vec{e}_x + E_y(z)\vec{e}_y$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = H_x(z)\vec{e}_x + H_y(z)\vec{e}_y$$

(V.46)

Les équations de Maxwell rotationnelles, en dehors des sources, permettent d'établir la loi de variation des composantes du champ (en particulier E_x et E_y) avec la variable spatiale z. On a :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E_x(z) \\ E_y(z) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} E_y(z) \\ \frac{\partial}{\partial z} E_x(z) \\ 0 \end{bmatrix} = -j\omega\mu_0 \begin{bmatrix} H_x(z) \\ H_y(z) \\ 0 \end{bmatrix}$$

(V.47)

et :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} H_x(z) \\ H_y(z) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} H_y(z) \\ \frac{\partial}{\partial z} H_x(z) \\ 0 \end{bmatrix} = j\omega\epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_r E_x(z) \\ E_y(z) \\ 0 \end{bmatrix}$$

(V.48)

On en déduit :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z) = -j\omega\mu_0 [-j\omega\epsilon_0\epsilon_r E_x(z)] = -k_0^2 \epsilon_r E_x(z)$$

(V.49)

et :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_y(z) = j\omega\mu_0 [j\omega\epsilon_0 E_y(z)] = -k_0^2 E_y(z)$$

(V.50)

On note $k_e = k_0 \sqrt{\epsilon_r}$ le nombre d'onde, dit extraordinaire, associé à la composante du champ parallèle à l'axe optique.

On a donc finalement :

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_{0x} \exp(-jk_e z) \vec{e}_x + E_{0y} \exp(-jk_0 z) \vec{e}_y$$

(V.51)

ce qui signifie que la constante de propagation dépend de la composante de champ considérée, ou, ce qui revient au même, que le déphasage par unité de longueur n'est pas le même pour les deux composantes du champ.

Cette propriété peut être la cause d'un changement de polarisation de l'onde. A titre d'exemple, on considère une onde plane traversant une couche de matériau d'épaisseur d (figure 5.7). On suppose, par souci de simplification, que les changements de milieux se font sans pertes par réflexion. A l'entrée du matériau anisotrope (en $z=0$), on suppose que l'onde est polarisée linéairement selon la direction $y=x$:

$$\vec{E}(x, y, 0) = E_0 (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

(V.52)

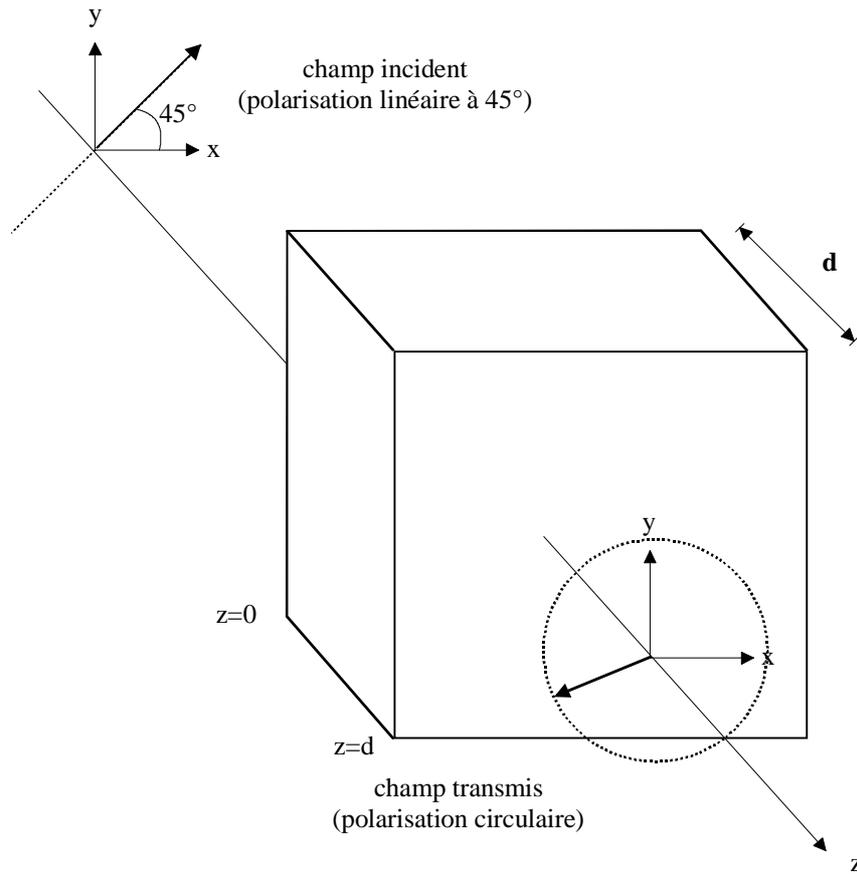


Figure 5.7 : changement de polarisation du champ lors de la traversée d'une couche de matériau anisotrope

En sortie du matériau ($z=d$), chaque composante a été déphasée selon (V.51) et le champ s'exprime :

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, d) &= E_0 [\exp(-jk_e d)\vec{e}_x + \exp(-jk_0 d)\vec{e}_y] \\ &= E_0 \exp(-jk_e d) \{ \vec{e}_x + \exp[-j(k_0 - k_e)d]\vec{e}_y \}\end{aligned}\tag{V.53}$$

Si l'on choisit :

$$d = \frac{\lambda_0}{4(\sqrt{\epsilon_r} - 1)}\tag{V.54}$$

on a :

$$(k_e - k_0)d = \frac{\pi}{2}\tag{V.55}$$

et par suite :

$$\vec{E}(x, y, d) = E_0 \exp(-jk_e d)(\vec{e}_x + j\vec{e}_y) \quad (\text{V.56})$$

Le champ est donc polarisé circulairement. Une fois sorti du matériau anisotrope, le champ conserve évidemment la même polarisation.

En conclusion, la traversée du matériau anisotrope a permis (grâce à un choix judicieux de l'épaisseur de la couche traversée) de transformer une polarisation linéaire en une polarisation circulaire. Un tel dispositif est appelé polariseur.

Chapitre 6 : LES GRANDS THEOREMES DE L'ELECTROMAGNETISME

I. INTRODUCTION

Il existe en électromagnétisme plusieurs théorèmes et principes déduits des équations de Maxwell qui permettent de simplifier la résolution de problèmes concrets. On présente dans ce chapitre les plus utiles pour les applications liées aux antennes et à la propagation.

II. THEOREME D'UNICITE

Le théorème d'unicité est un théorème fondamental de l'électromagnétisme. Comme son nom l'indique, il permet de garantir que la solution d'un problème donné est unique. D'un point de vue pratique, il sert donc à préciser les conditions minimales à satisfaire pour résoudre un problème d'électromagnétisme de façon non ambiguë. Une conséquence qui apparaîtra dans les paragraphes suivants est la possibilité offerte de construire des problèmes équivalents plus simples que le problème initial mais possédant la même solution (car satisfaisant aux mêmes conditions minimales). La démonstration du théorème d'unicité ne présente pas de difficultés majeures mais n'offre pas non plus d'intérêt évident dans le cadre de ce cours. On se contente donc d'en donner le résultat.

La détermination du champ dans une région de l'espace nécessite uniquement la connaissance des sources dans cette région et de la composante tangentielle d'au moins l'un des champs sur la frontière de la région. En toute rigueur, le théorème d'unicité n'est valable que pour une région présentant des pertes. Le cas sans pertes est généralement extrapolé en faisant tendre les pertes vers zéro.

Un exemple pratique d'utilisation du théorème d'unicité concerne la résolution des équations de Maxwell dans une « boîte » métallique parfaitement conductrice (guides d'ondes étudiés en propagation guidée). Le théorème d'unicité suggère dans ce cas que seule l'annulation de la composante tangentielle du champ électrique sur les parois métalliques est nécessaire pour rendre compte des conditions aux limites du problème.

III. PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE DE HUYGENS

Remarque préalable : on a vu dans le chapitre 1 que le champ électromagnétique résultait de la présence de sources et pouvait s'exprimer à partir de ces sources à l'aide de la formule des potentiels retardés. Dans cette formule, on fait explicitement référence aux densités de charges et de courants responsables du champ. On sait par ailleurs que ces densités sont reliées entre elles par l'équation de continuité. Au final, il est donc toujours possible de se ramener à des expressions ne faisant intervenir que les densités de courant. C'est ce qui sera systématiquement fait dans la suite.

En pratique, il est parfois très difficile de déterminer précisément les sources d'excitation \vec{J}_{exci} qui sont réellement à l'origine du champ. Les théorèmes d'équivalence permettent dans ce cas d'éluder le problème en se ramenant à des sources fictives, a priori plus simples à appréhender. On remplace donc le problème initial par un problème équivalent, l'équivalence n'étant en général valable que dans une zone limitée de l'espace.

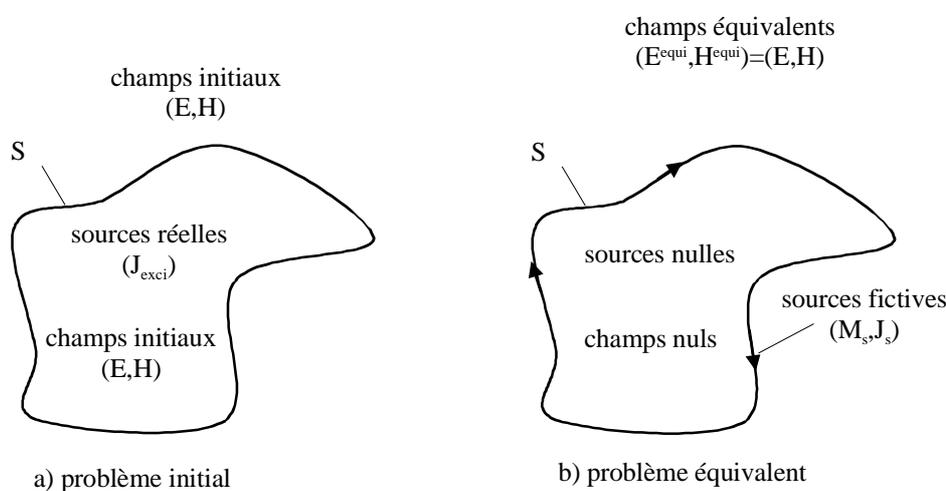


Figure 6.1 : Principe d'équivalence

Le principe de Huygens permet ainsi de déterminer le champ (\vec{E}, \vec{H}) produit par des sources \vec{J}_{exci} à partir de la seule connaissance des champs tangentiels sur une surface S quelconque entourant ces sources.

Pour ce faire, on commence par remplacer le problème initial (figure 6.1a) par un problème équivalent (figure 6.1b), dans lequel, par hypothèse, le champ et les sources sont supposés nuls à l'intérieur de S . Le champ à l'extérieur de S est lui supposé inchangé par rapport au problème initial et l'on note :

$$\begin{aligned}\vec{E}^{\text{equi}}(\vec{r}, t) &= \vec{E}(\vec{r}, t)u_v(\vec{r}) \\ \vec{H}^{\text{equi}}(\vec{r}, t) &= \vec{H}(\vec{r}, t)u_v(\vec{r})\end{aligned}\tag{VI.1}$$

où l'indice « equi » est utilisé pour désigner les champs du problème équivalent.

Dans cette expression, u_v est la distribution d'Heaviside caractéristique du volume V délimité par S :

$$u_v(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{r} \in V \\ 1 & \text{si } \vec{r} \notin V \end{cases}\tag{VI.2}$$

En utilisant l'égalité vectorielle :

$$\vec{\nabla}_x(f\vec{A}) = f\vec{\nabla}_x\vec{A} + \vec{\nabla}f \times \vec{A}\tag{IV.3}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_x\vec{E}^{\text{equi}}(\vec{r}) &= u_v(\vec{r})\vec{\nabla}_x\vec{E}(\vec{r}) + \vec{\nabla}u_v(\vec{r}) \times \vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{\nabla}_x\vec{H}^{\text{equi}}(\vec{r}) &= u_v(\vec{r})\vec{\nabla}_x\vec{H}(\vec{r}) + \vec{\nabla}u_v(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})\end{aligned}\tag{VI.4}$$

Or :

$$\vec{\nabla}u_v(\vec{r}) = \delta_s(\vec{r})\vec{n}\tag{VI.5}$$

Dans cette expression δ_s est l'impulsion de Dirac caractéristique de la surface S et \vec{n} la normale sortante :

$$\delta_s(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{r} \in S \\ 0 & \text{si } \vec{r} \notin S \end{cases}\tag{VI.6}$$

N.B.: La relation (VI.5) est évidente si l'on se place dans le cas unidimensionnel et si l'on dérive au sens des distributions.

Par essence, le champ en dehors des sources vérifie (on suppose par souci de simplification que le rayonnement s'opère dans le vide) :

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_x \bar{H}(\bar{r}, t) &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \bar{E}(\bar{r}, t) \\ \bar{\nabla}_x \bar{E}(\bar{r}, t) &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \bar{H}(\bar{r}, t)\end{aligned}\tag{VI.7}$$

En réinjectant (VI.5) et (VI.7) dans (VI.4), on obtient :

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_x \bar{E}^{\text{equi}}(\bar{r}, t) &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} [u_v(\bar{r}) \bar{H}(\bar{r}, t)] + \delta_s(\bar{r}) \bar{n}_x \bar{E}(\bar{r}, t) \\ \bar{\nabla}_x \bar{H}^{\text{equi}}(\bar{r}, t) &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} [u_v(\bar{r}) \bar{E}(\bar{r}, t)] + \delta_s(\bar{r}) \bar{n}_x \bar{H}(\bar{r}, t)\end{aligned}\tag{IV.8}$$

N.B.: Le fait que (IV.7) ne soit vraie qu'en dehors des sources n'est pas un problème puisque les champs sont multipliés par u_v , fonction nulle à l'intérieur de S (là où sont les sources).

Finalement, en utilisant (VI.1), on obtient :

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_x \bar{E}^{\text{equi}}(\bar{r}, t) &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \bar{H}^{\text{equi}}(\bar{r}, t) - \bar{M}_s(\bar{r}, t) \\ \bar{\nabla}_x \bar{H}^{\text{equi}}(\bar{r}, t) &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \bar{E}^{\text{equi}}(\bar{r}, t) + \bar{J}_s(\bar{r}, t)\end{aligned}\tag{IV.9}$$

où :

$$\begin{aligned}\bar{M}_s(\bar{r}, t) &= -\delta_s(\bar{r}, t) \bar{n}_x \bar{E}(\bar{r}, t) \\ \bar{J}_s(\bar{r}, t) &= \delta_s(\bar{r}, t) \bar{n}_x \bar{H}(\bar{r}, t)\end{aligned}\tag{IV.10}$$

peuvent être vues comme des sources fictives.

En résumé, les champs du problème équivalent (qui sont par construction les mêmes que ceux du problème initial, à l'extérieur de S) s'obtiennent simplement en considérant le champ nul à l'intérieur de S et en plaçant des sources fictives sur S. Ces sources fictives ne sont autres que les composantes tangentielles du champ sur S.

On peut ainsi réécrire (IV.10) plus simplement :

$$\begin{array}{l} \vec{M}_s(\vec{r}, t) = -\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \quad \text{sur } S \\ \vec{J}_s(\vec{r}, t) = \vec{n} \times \vec{H}(\vec{r}, t) \quad \text{sur } S \end{array}$$

(IV.11)

Il peut paraître paradoxal de s'appuyer sur la connaissance de la composante tangentielle des champs que l'on cherche à déterminer! En fait, cette composante peut être plus accessible qu'il n'y paraît a priori: la composante tangentielle du champ électrique est par exemple systématiquement nulle sur un conducteur parfait. Le recours au principe de Huygens est de toute façon conditionné par un choix judicieux de la surface S , choix qui doit permettre de construire un problème équivalent plus simple que le problème initial...

Remarques:

La relation (IV.10) est une forme généralisée des conditions aux limites pour les composantes tangentielles des champs à l'interface entre deux milieux (chapitre 2). Dans le cas présent, les champs sont nuls dans le milieu 1 (à l'intérieur de S) et non nuls dans le milieu 2 (à l'extérieur de S). L'introduction du vecteur \vec{M}_s (que l'on précisera par la suite) est indispensable pour représenter la discontinuité abrupte et artificielle de la composante tangentielle du champ électrique (au même titre que \vec{J}_s est nécessaire pour représenter la discontinuité abrupte, mais naturelle, de la composante tangentielle du champ magnétique sur un conducteur parfait notamment).

On remarquera par ailleurs que la formulation des conditions aux limites à l'aide des distributions (VI.10) est une façon très élégante d'inclure ces conditions aux limites directement dans la forme locale des équations de Maxwell (comme dans IV.9).

Enfin, on notera que le principe d'équivalence est cohérent avec le théorème d'unicité puisque, dans le problème équivalent, la détermination du champ à l'extérieur de S est réalisée en utilisant uniquement les sources réelles dans cette région (elles sont nulles) et les composantes tangentielles des champs sur sa frontière S .

IV. EQUATIONS DE MAXWELL GENERALISEES

Une particularité du principe de Huygens est qu'il induit l'utilisation de sources fictives dans l'équation de Maxwell-Faraday, ces sources ayant, comme on vient de le voir, pour seul objet d'exprimer la discontinuité du champ électrique sur S dans le problème équivalent.

Par dualité avec l'équation de Maxwell-Ampère, on qualifie ces sources de densités de courant magnétique.

On pousse parfois l'analogie jusqu'à «oublier» la nature surfacique de ces sources en introduisant des densités volumiques de courant magnétique \vec{M} dans les équations de Maxwell. Il devient alors indispensable de définir des densités de charges magnétiques associées en ajoutant une équation de continuité :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{M}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho_m(\vec{r}, t) = 0$$

(IV.12)

Les équations de Maxwell, ainsi généralisées, s'écrivent :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r}, t) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= \rho_m(\vec{r}, t) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) - \vec{M}(\vec{r}, t) \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) + \vec{J}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

(IV.13)

Cette formulation est souvent adoptée d'emblée pour aborder les problèmes dans lesquels le recours au principe de Huygens semble inévitable. Si elle présente l'avantage de symétriser complètement les équations de Maxwell, elle ne doit pas cacher le fait que de telles sources magnétiques n'ont aucune réalité physique.

IV THEORIE DES IMAGES

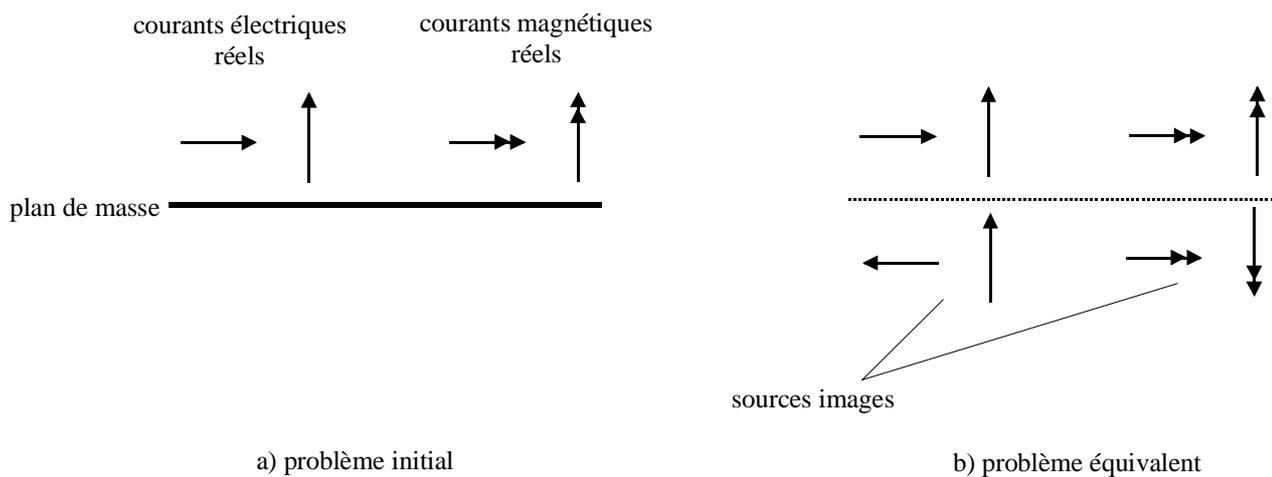
La théorie des images permet de construire un problème équivalent pour toutes les situations dans lesquelles un plan infini parfaitement conducteur (plan de masse) est présent.

Concrètement, le problème équivalent est obtenu en supprimant le plan de masse et en ajoutant aux sources du problème initial (réelles ou fictives) leurs images vis-à-vis du plan de masse, selon les règles précisées sur la figure 6.2. L'équivalence n'est bien sûr valable qu'au-

dessus du plan de masse (le champ est nul au-dessous puisque le plan de masse isole complètement le demi-espace inférieur des sources réelles).

Les règles de construction des images se déduisent intuitivement des lois de la réflexion. On peut les voir comme une façon de garantir les conditions aux limites à l'endroit où se situe le plan de masse dans le problème initial. Par exemple, on vérifie facilement que la combinaison d'une source électrique et de son image permet d'avoir un champ électrique tangentiel nul à cet endroit. Le problème équivalent est donc conforme au problème initial en ce qui concerne la composante tangentielle d'au moins l'un des champs. Compte tenu du théorème d'unicité, cette condition est suffisante pour assurer que le problème équivalent est bien posé.

Figure 6.2 : théorie des images



Chapitre 7 : APPLICATIONS PRATIQUES DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

I. INTRODUCTION

Ce chapitre a pour objectif de montrer quelques applications concrètes de l'électromagnétisme dans les domaines de la propagation, du rayonnement et de la diffraction. Il constitue donc une introduction à ces matières, qui seront enseignées de façon plus détaillée ultérieurement.

Face à un problème concret, la première étape consiste à adopter une modélisation adéquate, permettant de rendre compte des phénomènes physiques les plus importants sans alourdir inutilement la description. En électromagnétisme, la modélisation est naturellement compliquée par le caractère tridimensionnel et vectoriel des grandeurs manipulées et par la relative complexité des équations mathématiques associées. Surtout, la stratégie de modélisation s'avère rarement évidente compte tenu de la multiplicité des formulations possibles (par exemple : possibilité d'utiliser directement des équations de Maxwell ou de passer par les équations de propagation, de construire ou non un problème équivalent, de travailler ou non en régime harmonique, de choisir un système de coordonnées ou un autre). S'ajoute à cette difficulté la nécessité d'adopter des hypothèses simplificatrices pertinentes (sur la représentation de l'excitation, sur les propriétés physiques des matériaux, sur la géométrie des structures, sur les conditions aux limites à l'infini, ...). Afin d'apporter quelques éléments de réponse, le premier paragraphe de ce chapitre présente quelques exemples concrets en discutant la formulation choisie et les hypothèses utilisées.

En vérité, il existe peu de problèmes d'électromagnétisme d'intérêt pratique possédant une solution analytique. Les dispositifs usuels exploitant les ondes électromagnétiques (antennes, circuits électroniques, ...) sont en général des structures complexes, de par leur géométrie et leur constitution matérielle. Pour de telles structures, les équations de Maxwell ne peuvent être résolues que numériquement. La véritable avancée de l'électromagnétisme depuis le XIX^{ème} siècle réside en fait dans le développement de méthodes numériques performantes (méthode des moments, technique des différences finies, méthode des éléments finis, ...) et dans les progrès des calculateurs qui ont permis la mise en œuvre informatique de ces

méthodes, souvent très lourdes. Le deuxième paragraphe présente sommairement l'une de ces méthodes : la technique des Différences Finies dans le Domaine Temps (F.D.T.D.)

II EXEMPLES DE PROBLEMES CONCRETS

II.1 Présentation générale

La figure 7.1 présente un problème d'électromagnétisme concret, illustratif d'une application « radar ».

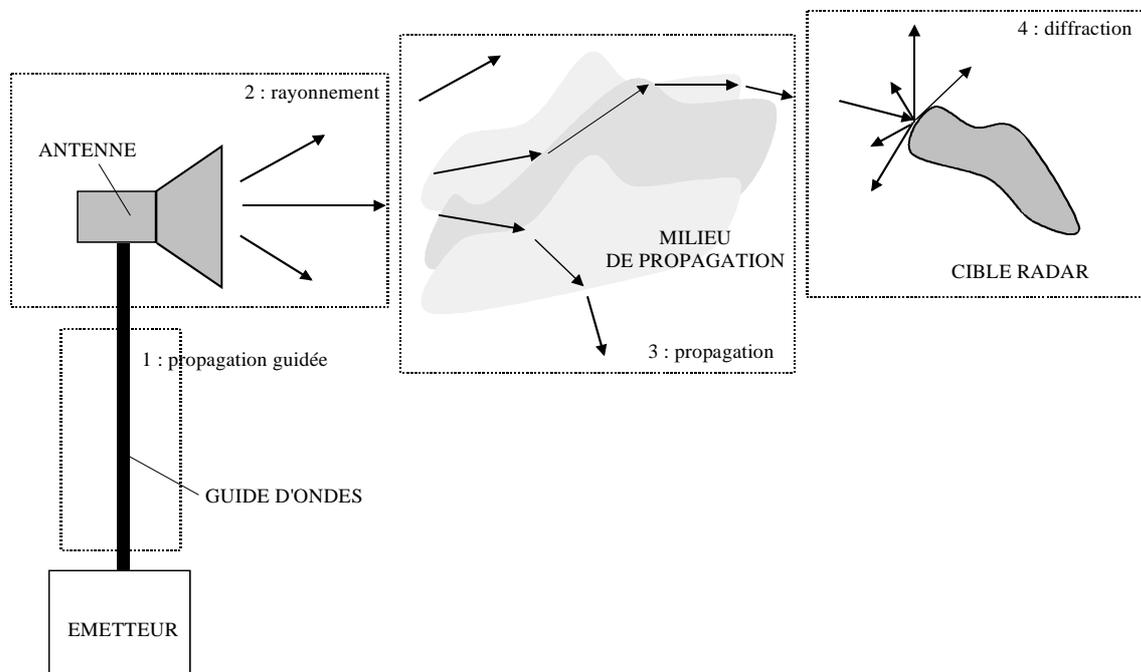


Figure 7.1

Un émetteur génère une onde électromagnétique et la transmet à une antenne par l'intermédiaire d'un guide d'ondes. L'antenne produit un champ électromagnétique rayonné qui se déplace à travers un milieu de propagation. Finalement, une fraction du champ atteint la cible radar qui le diffracte dans l'espace (notamment vers l'antenne).

Ce problème général peut en fait être décomposé en quatre sous-problèmes distincts qui feront chacun l'objet d'une théorie et d'une modélisation particulières :

- un problème de propagation guidée, dans le guide reliant l'émetteur à l'antenne,
- un problème de rayonnement, au niveau de l'antenne,

- un problème de propagation, dans le milieu entre l'antenne et la cible,
- un problème de diffraction, au niveau de la cible.

Dans cette segmentation, on omet volontairement le problème de l'émetteur qui ne nécessite a priori pas de description en terme de champs électromagnétiques (représentation macroscopique en terme de courants et tensions à l'aide des équations de Kirchhoff).

II.2 La propagation guidée

Le guide d'ondes est, comme son nom l'indique, un dispositif utilisé pour « guider » une onde électromagnétique d'un point à un autre, ici de l'émetteur à l'antenne. En pratique, il peut s'agir d'un câble, d'une piste métallique sur un circuit imprimé ou même d'un véritable « tuyau » métallique. L'étude des guides d'ondes a pour objectif principal de déterminer les caractéristiques de la propagation à l'intérieur du guide, en particulier l'impédance caractéristique et la vitesse de propagation. A partir de ces données, on peut appréhender les phénomènes de réflexion (qui se poseront si la charge placée à l'extrémité du guide, ici l'antenne, n'est pas adaptée à l'impédance caractéristique de celui-ci) et les phénomènes de dispersion (qui peuvent être responsables de la distorsion des signaux transmis). Il s'agit donc a priori d'un problème de propagation classique qu'on résout plutôt en régime harmonique afin d'anticiper les éventuels phénomènes de dispersion. En pratique, pour déterminer les caractéristiques de la propagation, on sait que l'on peut faire l'hypothèse d'un guide régulier et infini (comme pour une corde vibrante par exemple); dès lors, la modélisation de l'excitation et de la charge ne se pose pas à ce stade.

Le problème peut être abordé en considérant un guide rectiligne, orienté par exemple selon l'axe (O,z) et en recherchant des solutions progressives directes aux équations de Helmholtz, c'est-à-dire des champs avec des variations spatiales selon l'axe de propagation en :

$$\exp(-jk_z z) \tag{VII.1}$$

La différence essentielle par rapport à un problème de propagation unidimensionnel réside dans le fait que les champs recherchés dépendent également des autres coordonnées spatiales (par exemple x et y en coordonnées cartésiennes). Pour le champ électrique :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(x, y)\exp(-jk_z z)$$

(VII.2)

La détermination de cette dépendance passe en pratique par l'écriture des conditions aux limites sur les frontières de la section droite du guide. En vertu du théorème d'unicité, l'établissement de la relation vérifiée par la seule composante tangentielle du champ électrique est suffisante (ce qui simplifie singulièrement le problème si la frontière du guide est un métal, conducteur qu'on supposera généralement parfait). La géométrie de la section droite du guide impose en pratique le système de coordonnées à utiliser (cartésiennes pour un guide à section rectangulaire, cylindriques pour un guide à section circulaire).

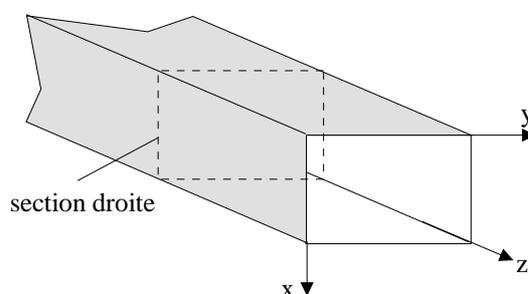


Figure 7.2 : Exemple de guide métallique rectangulaire

L'analyse vise à déterminer la configuration du champ dans la section droite et le nombre d'onde selon la direction de propagation

Au final, l'analyse d'un guide d'ondes repose donc sur la résolution des équations de Helmholtz associées à des conditions aux limites particulières. La résolution s'opère dans le plan d'une section droite du guide (problème ramené en 2D) en imposant une variation exponentielle complexe dans la direction de propagation. Le calcul fournit la configuration du champ dans la section droite $\vec{E}(x, y)$ et l'équation de dispersion $k_z=f(\omega)$.

Le calcul peut être réalisé analytiquement uniquement pour les configurations les plus simples (guides métalliques fermés et homogènes à section droite élémentaire).

Dans tous les cas, une fois le calcul fait, de nombreux post-traitements peuvent être envisagés: la puissance transmise dans le guide s'obtient par exemple en calculant le flux du vecteur de Poynting à travers la section droite du guide.

II.3 Le rayonnement

L'antenne est le dispositif chargé d'assurer la transition entre la propagation guidée et la propagation en espace libre (ou réciproquement). L'étude de l'antenne a un double objectif. En amont, il s'agit de connaître le niveau de réflexion entre le guide et l'antenne (ou ce qui revient au même, l'impédance d'entrée de l'antenne). En aval, il faut déterminer les caractéristiques du champ rayonné (répartition spatiale et polarisation en particulier).

En règle générale, on considère l'antenne en dehors de son environnement réel, c'est-à-dire que l'on suppose qu'elle rayonne en espace libre et que l'alimentation est localisée dans une zone très restreinte de l'espace (il ne s'agit pas de refaire l'analyse du guide ni d'anticiper celle du milieu de propagation). Pour un observateur lointain, l'antenne apparaît ponctuelle et le rayonnement semble émaner d'un point unique de l'espace. Il est donc assez logique d'adopter le système de coordonnées sphériques, dans lequel la coordonnée radiale, représentative de la distance à l'antenne, joue un rôle privilégié.

Cette description générale étant posée, le fonctionnement de l'antenne peut être abordé de la façon suivante. Au niveau de la transition avec le guide, l'alimentation est responsable de sources d'excitation \vec{J}_{exci} (et éventuellement \vec{M}_{exci} s'il s'agit de sources fictives obtenues à l'aide du principe d'équivalence). Ces sources, localisées dans la zone d'excitation, se prolongent sur le reste de la structure rayonnante par des sources induites \vec{J} (des courants de conduction sur les métaux, par exemple). Le rayonnement de l'antenne résulte de l'ensemble de ces sources, qu'il convient donc en pratique de déterminer.

Du point de vue de l'analyse, le problème peut être abordé de deux façons différentes. Dans le premier cas, on suppose que l'on est capable d'approcher la répartition de sources (sources d'excitation et induites) partout sur la structure, et ceci avec un niveau d'approximation raisonnable. Les champs produits peuvent alors être obtenus très facilement (à l'aide de la formule des potentiels retardés ou d'une autre intégrale de rayonnement). Cette approche permet donc de déterminer l'allure du champ rayonné et toutes les caractéristiques dérivées. Elle est par contre insuffisante pour évaluer l'impédance d'entrée de l'antenne qui nécessite une connaissance très précise des sources induites et des champs, notamment au voisinage de la zone d'excitation. Une variante à cette approche consiste à calculer le champ rayonné à partir de sources fictives \vec{J}_s et \vec{M}_s définies sur une surface entourant l'antenne. Cette variante suppose que la détermination approchée des sources fictives est plus immédiate que celle des

sources réelles. Ces deux approches présentent l'avantage de ne pas nécessiter de calcul numérique lourd.

Dans le second cas, on ne fait pas d'hypothèses a priori sur les sources induites et on les détermine rigoureusement. Les sources d'excitation, quant à elles, sont supposées connues et constituent les données de départ du problème (le plus souvent, elles peuvent se déduire de la configuration des champs dans le guide d'ondes, résultat du problème de propagation guidée). Dans cette approche, les inconnues sont donc avant tout les sources induites. Les champs produits, également inconnus, peuvent s'y relier par des intégrales de rayonnement. Le problème peut être résolu en écrivant les conditions aux limites adéquates à la surface de la structure et à l'infini.

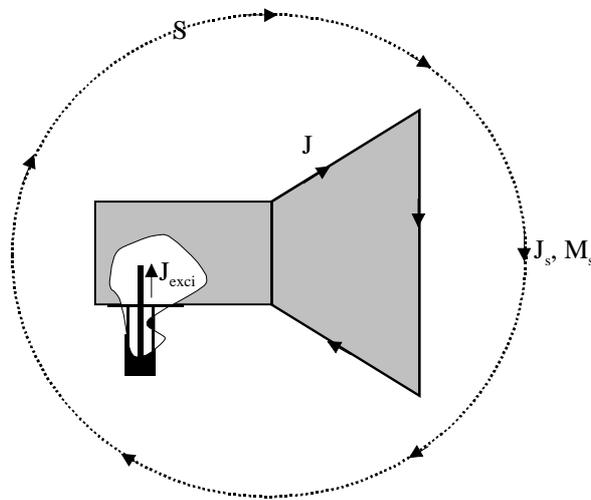


Figure 7.3 : Représentation schématique d'un problème d'antenne

La source d'excitation étant supposée connue, il faut déterminer les sources induites sur la structure (ou à défaut des sources équivalentes) pour en déduire le champ rayonné

En général, ce problème ne peut être traité que numériquement avec des méthodes lourdes. En contrepartie, il procure toutes les caractéristiques de l'antenne (y compris son impédance).

Une fois encore, de nombreux post-traitements peuvent être envisagés : la puissance rayonnée par l'antenne se déduit par exemple du flux du vecteur de Poyntig à travers une surface fermée entourant l'antenne.

II. 4 La diffraction

Le problème de la diffraction est très similaire à celui du rayonnement. La différence essentielle tient au fait que, dans ce cas, l'excitation est loin de l'objet rayonnant (la cible) alors qu'elle est en contact avec lui (l'antenne) dans le cas du rayonnement. Plus précisément, dans un problème de diffraction, on éclaire un objet avec un champ incident noté \vec{E}^{inc} (représentatif d'une excitation lointaine); celui-ci génère des sources induites \vec{J} (et éventuellement \vec{M}) qui produisent en retour un champ diffracté noté \vec{E}^{dif} . Comme pour le problème de rayonnement, le champ produit s'exprime à l'aide d'une intégrale de rayonnement à partir des sources induites. La détermination des sources induites s'opère en écrivant les conditions limites adéquates à la surface de l'objet diffractant pour le champ total (somme des champs incident et diffracté). Dans la plupart des cas, le champ incident peut être représenté par une onde plane compte tenu de la grande distance à laquelle se trouve l'excitation (le champ lointain rayonné par une antenne est assimilable à une onde plane localement).

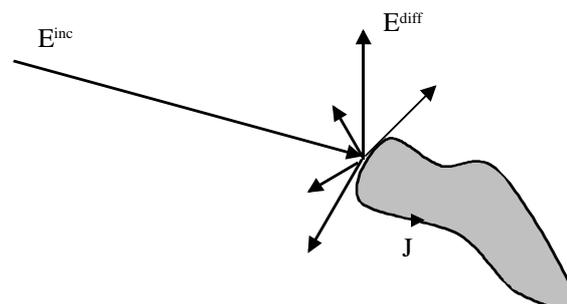


Figure 7.4 : problème de diffraction

Le problème est très similaire à celui du rayonnement mais l'excitation est rejetée à l'infini et représentée par un champ incident (le plus souvent une onde plane)

La résolution électromagnétique rigoureuse est en pratique réservée à des objets de petite taille (devant la longueur d'onde) pour lesquels il est réaliste de déterminer les sources induites. Pour des objets plus grands, des hypothèses « hautes fréquences » doivent être introduites (formulation en terme de rayons, par exemple). Les méthodes dérivées, dites méthodes asymptotiques, sont très spécifiques des problèmes de diffraction.

II.5 La propagation

Les études de propagation ont pour principal objet de quantifier les transformations (atténuation, retard, distorsion, dépolarisation, ...) subies par l'onde électromagnétique lors de la traversée d'un environnement donné (le canal de propagation). L'analyse requiert théoriquement une résolution des équations de Maxwell intégrant les propriétés physiques de cet environnement (inhomogénéité, anisotropie, dispersion, pertes, ...). Lorsque l'environnement est décomposable en plusieurs milieux distincts, les phénomènes spécifiques aux interfaces (réflexion, réfraction, diffraction et diffusion) doivent aussi être considérés.

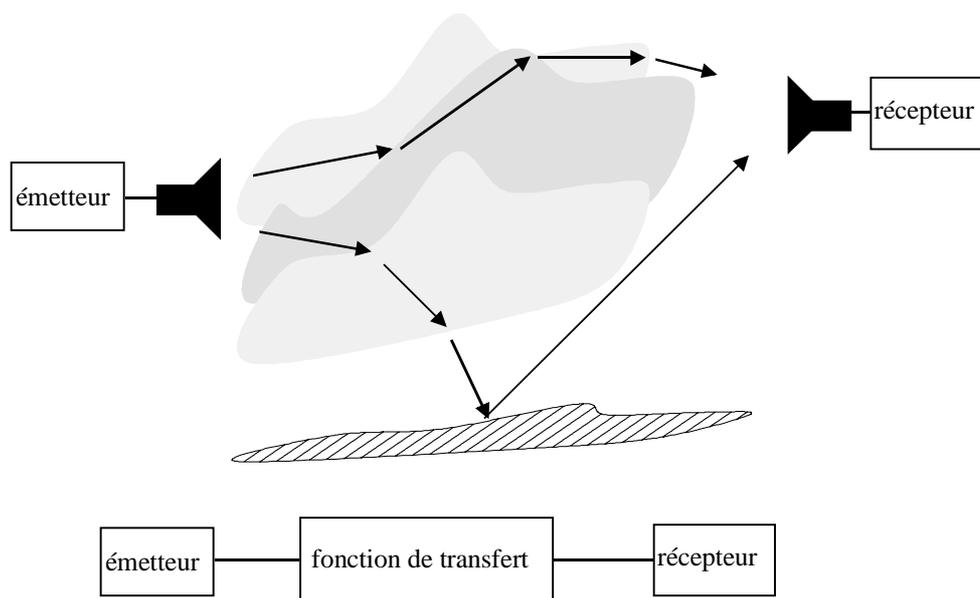


Figure 7.5 : Problème de propagation

Tous les phénomènes sont synthétisés dans une fonction de transfert représentant le « canal ».

Il est a priori illusoire d'espérer résoudre globalement et rigoureusement les équations de Maxwell dans un environnement complexe et de grande taille. La résolution des équations est donc réservée à l'étude de phénomènes locaux (pénétration du champ dans un matériau donné, diffraction sur un type d'obstacle donné, ...) ou particuliers (dépolariation provoqué par un type d'anisotropie donné par exemple) pour lesquels des hypothèses simplificatrices peuvent être faites (excitation par onde plane, représentation des phénomènes en 2D, ...). L'analyse électromagnétique est donc le plus souvent limitée à l'étude de problèmes canoniques pour lesquels elle procure des modèles phénoménologiques (la réflexion sur un sol humide par exemple). La caractérisation d'un canal de propagation donné combine ensuite

les différents modèles utiles dans une approche macroscopique (représentation des ondes par des « trajets » ou « rayons » par exemple) et éventuellement statistique. Le canal (entre deux antennes par exemple) est finalement représenté par une fonction de transfert synthétisant les différentes transformations subies par le signal.

III. LA TECHNIQUE DES DIFFERENCES FINIES DANS LE DOMAINE TEMPS (FDTD)

III.1 Généralités

La technique des différences finies dans le domaine temps, plus connue sous l'appellation FDTD (Finite Differences Time Domain), est une méthode numérique permettant de résoudre directement les équations de Maxwell dans le domaine temps et dans l'espace. Elle se classe dans la famille des méthodes 3D (discrétisation tridimensionnelle de l'espace) et temporelles (par opposition aux méthodes fréquentielles qui résolvent les équations de Maxwell en régime harmonique, c'est-à-dire point de fréquence par point de fréquence). La FDTD est une méthode très populaire, en raison de sa relative simplicité de programmation et de sa grande généralité. Elle trouve ses principales applications dans les domaines de la conception (antennes et circuits), de la compatibilité électromagnétique, de la diffraction, de la propagation et de la dosimétrie électromagnétique (interaction ondes - matière vivante). Comme toute méthode numérique 3D, la FDTD s'avère gourmande en ressources informatiques et la simulation complète d'une structure de taille moyenne peut couramment nécessiter quelques heures de temps de calcul pour plusieurs centaines de mégaoctets de mémoire !

L'objectif de ce paragraphe est de présenter les fondements de la méthode et les grandes étapes de sa mise en œuvre numérique ainsi que de familiariser le lecteur avec les principaux paramètres critiques pour le succès d'une simulation.

Dans un problème traité par FDTD, la première opération nécessaire consiste à délimiter le volume V de l'espace et l'intervalle de temps $I=[0,T]$ pour lesquels on souhaite effectuer cette résolution (il est illusoire d'espérer résoudre les équations de Maxwell dans l'espace infini et pour une durée illimitée !). Le volume de calcul contient l'objet (antenne, circuit, ...) que l'on

souhaite caractériser, en réponse à une excitation donnée. Dans un deuxième temps, il convient de procéder à un échantillonnage de l'espace (maillage de V) et du temps (discrétisation de I) afin de permettre une implémentation numérique de la résolution. Le problème devient dès lors celui de la détermination du champ en tout point du maillage et pour tout instant discret de l'intervalle d'observation. Les échantillonnages spatial et temporel seront précisés dans la suite et découleront naturellement de la physique des équations à résoudre. Ils conditionnent bien évidemment à la fois la précision des résultats du calcul et les ressources informatiques requises pour le mener à bien.

III.2 Obtention des équations de Maxwell discrétisées

La structuration du maillage FDTD et le cheminement de la résolution résultent directement des équations à résoudre.

Dans un milieu linéaire, homogène, isotrope, non dispersif et non magnétique, celles-ci s'écrivent (en coordonnées cartésiennes et en dehors des zones d'excitation) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} H_x(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\partial}{\partial y} E_z(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial z} E_y(\vec{r}, t) \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} H_y(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\partial}{\partial z} E_x(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial x} E_z(\vec{r}, t) \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} H_z(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\mu_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} E_y(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial y} E_x(\vec{r}, t) \right] \end{cases}$$

(VII.3)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} E_x(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial y} H_z(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial z} H_y(\vec{r}, t) \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} E_y(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial z} H_x(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial x} H_z(\vec{r}, t) \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} E_z(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial x} H_y(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial y} H_x(\vec{r}, t) \right] \end{cases}$$

(VII.4)

Dans la suite, on s'intéressera uniquement à la première équation, les autres conduisant à des développements similaires.

Afin de permettre un traitement sur calculateur, les différentes dérivées présentes dans l'équation doivent être approchées numériquement. Pour ce faire, on utilise le principe des différences finies centrées qui s'appuie sur les développements en série de Taylor suivants :

$$f\left(x_0 + \frac{d_x}{2}\right) = f(x_0) + \frac{d_x}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d_x}{2}\right)^2 f''(x_0) + \dots$$

$$f\left(x_0 - \frac{d_x}{2}\right) = f(x_0) - \frac{d_x}{2} f'(x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d_x}{2}\right)^2 f''(x_0) - \dots$$

(VII.5)

Il vient :

$$f'(x_0) = \frac{f\left(x_0 + \frac{d_x}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{d_x}{2}\right)}{d_x} + \varepsilon(d_x^2)$$

(VII.6)

où $\varepsilon(d_x^2)$ est une erreur d'ordre 2, négligée par la suite (on notera que c'est le centrage qui, en permettant une compensation des dérivées secondes, minimise l'erreur dans l'approximation).

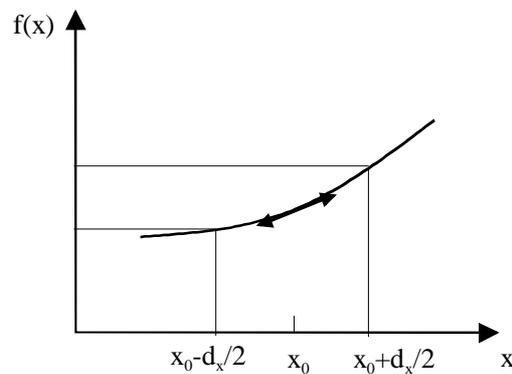


Figure 7.6 : approximation au sens des différences finies centrées

En appliquant ce principe aux dérivées temporelles et spatiales de (VII.3), on obtient ainsi :

$$\frac{H_x\left(x, y, z, t + \frac{d_t}{2}\right) - H_x\left(x, y, z, t - \frac{d_t}{2}\right)}{d_t} = -\frac{1}{\mu_0} \left\{ \left[\frac{E_z\left(x, y + \frac{d_y}{2}, z, t\right) - E_z\left(x, y - \frac{d_y}{2}, z, t\right)}{d_y} \right] - \left[\frac{E_y\left(x, y, z + \frac{d_z}{2}, t\right) - E_y\left(x, y, z - \frac{d_z}{2}, t\right)}{d_z} \right] \right\} \quad (\text{VII.7})$$

ou encore :

$$H_x\left(x, y, z, t + \frac{d_t}{2}\right) = H_x\left(x, y, z, t - \frac{d_t}{2}\right) + \frac{d_t}{\mu_0} \left\{ \left[\frac{E_y\left(x, y, z + \frac{d_z}{2}, t\right) - E_y\left(x, y, z - \frac{d_z}{2}, t\right)}{d_z} \right] - \left[\frac{E_z\left(x, y + \frac{d_y}{2}, z, t\right) - E_z\left(x, y - \frac{d_y}{2}, z, t\right)}{d_y} \right] \right\} \quad (\text{VII.8})$$

Cette équation montre que si l'on connaît les composante E_y et E_z du champ électrique à l'instant t et la composante H_x du champ magnétique à l'instant antérieur $t-d_t/2$, il est possible de déterminer H_x à l'instant postérieur $t+d_t/2$.

On montre facilement que les équations obtenues pour les autres composantes mettent en évidence le même décalage temporel $d_t/2$ entre champs électrique et magnétique. Ce résultat suggère donc d'utiliser une résolution numérique itérative, dans laquelle les champs électrique et magnétique sont évalués alternativement, respectivement aux instants discrets nd_t et $(n+1/2)d_t$, d_t étant le pas de temps. On notera par la suite $H_x^{n+\frac{1}{2}}$ la composante H_x à l'instant $(n+1/2)d_t$.

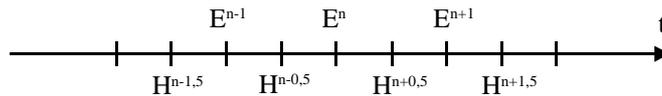


Figure 7.7 : schéma de discrétisation temporelle

La même remarque s'applique pour la distribution spatiale des points d'observation du champ. Ainsi l'évaluation de H_x au point (x,y,z) s'appuie sur la connaissance de E_y aux points $(x,y,z+d_z/2)$ et $(x,y,z-d_z/2)$ et de E_z aux points $(x,y+d_y/2,z)$ et $(x,y-d_y/2,z)$.

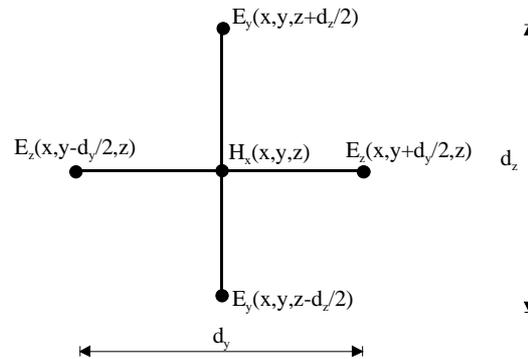


Figure 7.8 : localisation des composantes de champ

Plus généralement, la détermination d'une composante de l'un des champs en un point s'appuie sur la connaissance des composantes de l'autre champ aux points situés en périphérie immédiate. Le maillage spatial de la FDTD repose sur une répartition judicieuse des points d'évaluation des différentes composantes de champ permettant d'exploiter au mieux cette propriété. Le volume de calcul (un parallélépipède rectangle pour des raisons de simplicité évidentes) est ainsi décomposé en cellules élémentaires (des petits parallélépipèdes rectangles de dimensions $d_x \cdot d_y \cdot d_z$), la cellule de sommet 0 étant par convention notée (1,1,1) pour indiquer qu'elle correspond à la première cellule selon les trois directions de l'espace.

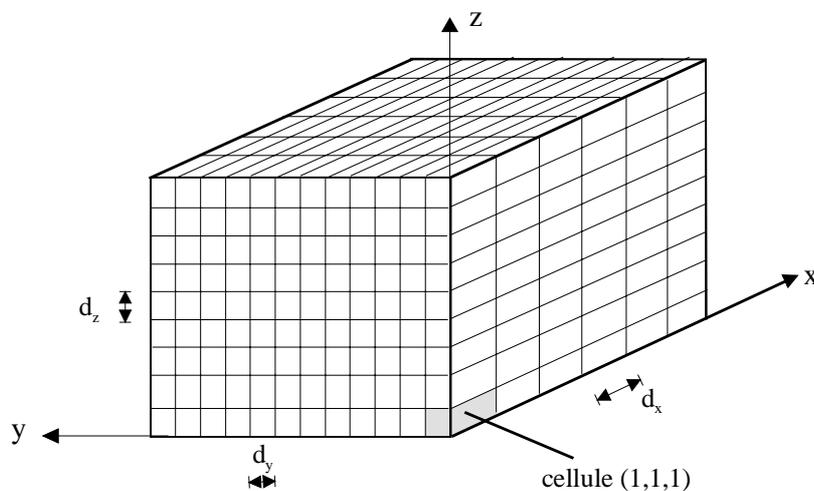


Figure 7.9 : maillage du volume de calcul

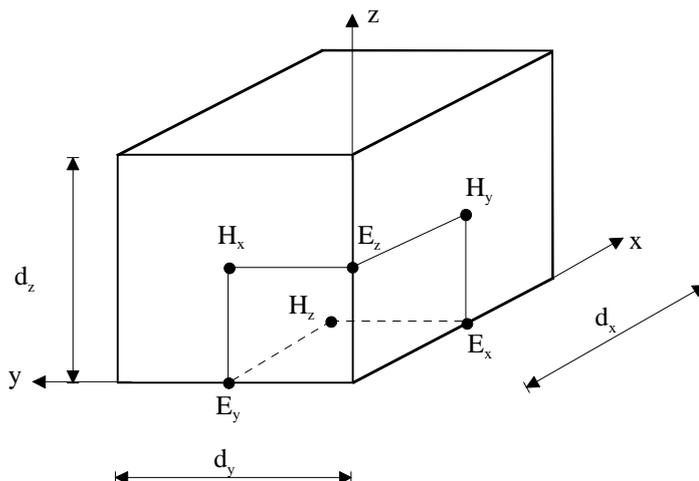


Figure 7.10 : localisation des six composantes du champ dans la cellule de Yee

Les composantes du champ électrique sont évaluées aux centres des arêtes du maillage et les composantes du champ magnétique aux centres des faces de façon à garantir l'alternance imposée par les équations (on appelle cellule de Yee la maille élémentaire dotée de cette répartition de points).

Pour la cellule (k,l,m) , on calcule ainsi :

- $E_x \left[\left(k - \frac{1}{2} \right) d_x, (l-1)d_y, (m-1)d_z \right]$, noté plus synthétiquement $E_x(k,l,m)$ pour faire référence à la cellule à laquelle appartient la composante,
- $E_y \left[(k-1)d_x, \left(l - \frac{1}{2} \right) d_y, (m-1)d_z \right]$, noté $E_y(k,l,m)$,
- $E_z \left[(k-1)d_x, (l-1)d_y, \left(m - \frac{1}{2} \right) d_z \right]$, noté $E_z(k,l,m)$,
- $H_x \left[(k-1)d_x, \left(l - \frac{1}{2} \right) d_y, \left(m - \frac{1}{2} \right) d_z \right]$, noté $H_x(k,l,m)$,
- $H_y \left[\left(k - \frac{1}{2} \right) d_x, (l-1)d_y, \left(m - \frac{1}{2} \right) d_z \right]$, noté $H_y(k,l,m)$,
- $H_z \left[\left(k - \frac{1}{2} \right) d_x, \left(l - \frac{1}{2} \right) d_y, (m-1)d_z \right]$, noté $H_z(k,l,m)$.

Avec cette convention, l'équation (VII.8) devient :

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(k, l, m) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(k, l, m) + \frac{d_t}{\mu_0} \left\{ \frac{E_y^n(k, l, m+1) - E_y^n(k, l, m)}{d_z} - \frac{E_z^n(k, l+1, m) - E_z^n(k, l, m)}{d_y} \right\} \quad (\text{VII.9})$$

Les autres équations s'écrivent de même :

$$\begin{aligned} H_y^{n+\frac{1}{2}}(k, l, m) &= H_y^{n-\frac{1}{2}}(k, l, m) + \frac{d_t}{\mu_0} \left\{ \frac{E_z^n(k+1, l, m) - E_z^n(k, l, m)}{d_x} - \frac{E_x^n(k, l, m+1) - E_x^n(k, l, m)}{d_z} \right\} \\ H_z^{n+\frac{1}{2}}(k, l, m) &= H_z^{n-\frac{1}{2}}(k, l, m) + \frac{d_t}{\mu_0} \left\{ \frac{E_x^n(k, l+1, m) - E_x^n(k, l, m)}{d_y} - \frac{E_y^n(k+1, l, m) - E_y^n(k, l, m)}{d_x} \right\} \\ E_x^{n+1}(k, l, m) &= E_x^n(k, l, m) + \frac{d_t}{\varepsilon(k, l, m)} \left\{ \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(k, l, m) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(k, l-1, m)}{d_y} - \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(k, l, m) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(k, l, m-1)}{d_z} \right\} \\ E_y^{n+1}(k, l, m) &= E_y^n(k, l, m) + \frac{d_t}{\varepsilon(k, l, m)} \left\{ \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(k, l, m) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(k, l, m-1)}{d_z} - \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(k, l, m) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(k-1, l, m)}{d_x} \right\} \\ E_z^{n+1}(k, l, m) &= E_z^n(k, l, m) + \frac{d_t}{\varepsilon(k, l, m)} \left\{ \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(k, l, m) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(k-1, l, m)}{d_x} - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(k, l, m) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(k, l-1, m)}{d_y} \right\} \end{aligned} \quad (\text{VII.10})$$

Dans (VII.12), on a particularisé la permittivité $\varepsilon(k, l, m)$ dans chaque cellule (k, l, m) . Cette propriété permet a priori de rendre compte de la présence de matériaux diélectriques différents dans le volume de calcul. Toutefois, certaines précautions (qui ne seront pas détaillées ici) doivent être prises pour respecter les conditions de continuité à l'interface entre de tels matériaux. On a par contre fait l'hypothèse que la perméabilité était égale à μ_0 dans tout le volume de calcul, bien que là encore, une particularisation cellule par cellule ait été possible.

III.3 Critères d'échantillonnage

Les équations (VII.9) et (VII.10) fournissent un schéma simple de mise à jour des composantes du champ électromagnétique. A chaque nouvelle itération temporelle de l'intervalle I , les composantes du champ électrique sont calculées dans toutes les cellules du

volume V , à partir de leurs valeurs à l'itération précédente et de la valeur courante des composantes du champ magnétique. La même opération est ensuite réalisée pour le champ magnétique avant de passer à l'itération suivante.

On notera que les pas d'échantillonnage spatiaux (d_x , d_y , d_z) et temporel d_t ne peuvent pas être choisis au hasard. Les trois premiers sont conditionnés par la dispersion numérique inhérente à la discrétisation de l'espace (rappel : un milieu de propagation non continu génère des phénomènes de dispersion). Afin de maintenir cette dispersion à un niveau raisonnable, il est d'usage d'adopter une taille de maille inférieure ou égale à $\lambda_{\min}/10$, où λ_{\min} est la plus petite longueur d'onde susceptible de se propager dans le volume de calcul. Le maillage spatial est donc d'autant plus fin que les phénomènes étudiés mettent en jeu des signaux de hautes fréquences (on verra plus tard que le spectre à considérer dépend du signal d'excitation appliqué au volume de calcul). Quant à l'échantillonnage temporel, il résulte directement de l'échantillonnage spatial. En effet, on montre mathématiquement que le schéma numérique proposé n'est stable que si la période d'échantillonnage temporelle d_t vérifie la relation :

$$d_t < \frac{1}{c_{\max} \sqrt{\frac{1}{d_x^2} + \frac{1}{d_y^2} + \frac{1}{d_z^2}}}$$

(VII.11)

où c_{\max} représente la célérité maximale des ondes dans le volume de calcul (elle dépend notamment de la permittivité des matériaux présents). On remarquera qu'un maillage fin induit une discrétisation temporelle fine. Le nombre d'itérations temporelles nécessaires augmente donc en même temps que le nombre de mailles, ce qui peut rapidement conduire à des besoins informatiques irréalistes en terme de temps de calcul et/ou de place mémoire!

III.4 Traitements spécifiques

La simplicité du schéma ne doit cependant pas faire illusion. Dans un problème pratique, le volume de calcul ne se restreint jamais à un milieu uniforme. Les équations générales doivent donc être remplacées partiellement par des équations plus spécifiques rendant compte de conditions locales particulières. On a déjà entrevu qu'il était possible d'adapter la permittivité cellule par cellule, pour rendre compte de la présence de milieux diélectriques différents. Il

reste maintenant à envisager d'autres configurations spécifiques, nécessitant l'adaptation des équations de mise à jour.

- *Traitement d'un conducteur*

A titre d'exemple, on peut considérer le cas très simple d'un objet parfaitement conducteur occupant une partie du volume de calcul. La représentation d'un tel objet doit être assurée en annulant les composantes du champ à l'intérieur du volume occupé par l'objet ainsi que les composantes tangentielles du champ électrique et les composantes normales du champ magnétique à sa surface. Ces équations d'annulation se substituent alors aux équations générales de mise à jour du champ. Dans une telle opération, le traitement spécifique est en fait effectué sur les cellules du maillage associées à l'objet en question, ce qui implique que la géométrie de celui-ci soit approchée par une succession de cellules élémentaires (approximation « en escaliers » des contours de l'objet). On conçoit aisément qu'une telle approximation est d'autant plus précise que le maillage est fin, ce qui signifie que la finesse des détails géométriques à représenter peut imposer des contraintes de maillage plus sévères que celles résultant de la minimisation de la discrétisation numérique.

- *Traitement de l'excitation*

La représentation de l'excitation constitue une autre illustration des traitements spécifiques qui doivent être inclus dans un logiciel de FDTD. Si l'on revient à la problématique générale d'une simulation FDTD, l'objectif est en effet de calculer le champ en tout point de V et à tout instant de I , en réponse à une excitation donnée. Une fois précisées les règles d'évolution du champ dans V (équations de mise à jour établies ci-avant), il convient maintenant de préciser comment s'opère cette excitation.

On considère par exemple le cas très simple où l'excitation résulte de la présence d'un élément de courant électrique $\vec{J}(\vec{r}_0, t) = J_{exc}(t)\vec{e}_z$ positionné en un point \vec{r}_0 de l'espace. La troisième équation de (VII.4) devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} E_z(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial x} H_y(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial y} H_x(\vec{r}, t) - J_{exc}(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \right] \quad (\text{VII.12})$$

la distribution de Dirac servant à localiser l'élément de courant dans l'espace.

En pratique, lors de la discrétisation du problème, on s'arrangera pour que le point \vec{r}_0 coïncide avec une arête verticale du volume maillé et on notera (k_0, l_0, m_0) la cellule correspondante.

Ces précautions étant prises, (VII.12) se discrétise comme :

$$E_z^{n+1}(k_0, l_0, m_0) = E_z^n(k_0, l_0, m_0) + \frac{d_t}{\varepsilon(k_0, l_0, m_0)} \left\{ \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(k_0, l_0, m_0) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(k_0 - 1, l_0, m_0)}{d_x} - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(k_0, l_0, m_0) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(k_0, l_0 - 1, m_0)}{d_y} - J_{exci}^{n+\frac{1}{2}} \right\}$$

(VII.13)

L'excitation apparaît donc sous la forme d'un terme additionnel (J_{exci}) dans l'équation de mise à jour d'une composante particulière du champ (la composante E_z de la cellule (k_0, l_0, m_0)). Toutes les composantes de champ étant au début du calcul fixées à zéro, ce terme additionnel va initialiser la première composante non nulle de champ, qui de proche en proche va diffuser dans tout le volume de calcul, au rythme des mises à jour successives. Finalement, l'algorithme FDTD ne fait que reproduire les phénomènes physiques : le champ est créé dans une zone très localisée de l'espace grâce à un terme de source (VII.13) ; il se communique ensuite dans tout l'espace environnant grâce aux interactions qui relient les composantes de champ les unes aux autres (VII.10).

En pratique, la description de l'excitation peut être plus ou moins compliquée en fonction de la source d'alimentation réelle qu'elle est sensée représenter. Elle recouvre néanmoins toujours deux aspects : une distribution spatiale et une loi de variation temporelle. Comme son nom l'indique, la distribution spatiale précise la répartition du terme d'excitation dans le volume de calcul (c'est la traduction de la dépendance en \vec{r} de $\vec{J}_{exci}(\vec{r}, t)$). Elle se limite à quelques composantes du champ (une seule ici) lorsqu'il s'agit de simuler une source quasi-punctuelle (générateur à l'entrée d'une ligne par exemple) mais elle peut aussi impliquer une large zone du volume de calcul lorsque l'excitation est distribuée (excitation par une onde plane incidente par exemple). La loi de variation temporelle précise quant à elle l'évolution du terme d'excitation en fonction du temps (c'est la traduction de la dépendance en t de $\vec{J}_{exci}(\vec{r}, t)$). Le choix de la variation temporelle dépend essentiellement de la bande de fréquences que doit couvrir la simulation. On utilise une fonction sinusoïdale si l'on souhaite étudier la réponse de la structure étudiée à une seule fréquence et une fonction à plus large spectre (une impulsion gaussienne par exemple) si une caractérisation sur une large bande est

requis. Quoi qu'il en soit, c'est le spectre de l'excitation qui conditionne la fréquence maximale f_{\max} des ondes qui sont injectées dans le volume de calcul et donc le maillage compatible avec les contraintes de dispersion ($\lambda_{\min}=c/f_{\max}$ dans le vide). En pratique, l'excitation est généralement appliquée dès le premier instant de la simulation ($t=0$) en respectant un temps de montée compatible avec le spectre désiré.

- Traitement des limites du volume de calcul

Un dernier traitement spécifique qui devra systématiquement être considéré est celui des limites du volume de calcul. La limitation de l'espace dans lequel la résolution des équations de Maxwell est effectuée répond avant tout à un souci de limitation des ressources informatiques requises (minimisation du volume de calcul). La problématique introduite par cette troncature consiste à pouvoir rendre compte à l'intérieur du volume de calcul d'un éventuel effet de l'environnement situé à l'extérieur ! En d'autres termes, les conditions limites imposées pour le champ sur les parois du volume de calcul doivent permettre de rendre compte d'un certain environnement extérieur, dans lequel le champ n'est évidemment pas accessible numériquement.

Deux situations sont généralement distinguées :

- Dans la première, la troncature correspond à une réalité matérielle. C'est par exemple le cas lorsque l'on recherche la configuration des champs à l'intérieur d'une cavité blindée. La paroi du volume de calcul est alors simplement traitée pour ce qu'elle est véritablement : une surface parfaitement conductrice sur laquelle il suffit d'annuler un certain nombre de composantes du champ. Dans ce cas, ce sont bien sûr les dimensions intérieures de la cavité qui imposent la taille du volume de calcul.
- Dans la seconde, la troncature est complètement artificielle, au sens où elle ne correspond à aucune frontière matérielle réelle. On suppose alors le plus souvent que la structure étudiée est placée dans le vide infini (situation analogue à celle d'une antenne dans une chambre anéchoïque par exemple) et les conditions appliquées aux limites du volume de calcul doivent permettre aux ondes de s'en échapper sans subir la moindre réflexion numérique sur ses parois ! De telles conditions, appelées conditions aux limites absorbantes ou ABC (Absorbing Boundary Conditions), s'appuient évidemment sur des équations de mise à jour très particulières qui ne seront pas détaillées ici. Elles compliquent largement la programmation de la méthode FDTD et peuvent facilement représenter plus de la moitié des lignes de code. Un des exercices proposés en ANNEXES présente l'une des façons les plus efficaces de synthétiser des ABC. Lorsque des ABC

sont utilisées, ce sont les dimensions de la structure étudiée augmentées d'une distance de sécurité vis-à-vis des ABC (celles-ci perturbent d'autant moins la structure qu'elles en sont éloignées) qui déterminent la taille du volume de calcul.

III.5 Les post-traitements

A l'issue de la simulation, les résultats bruts disponibles sont globalement des tables de composantes de champ. En fonction des opérations de sauvegarde réalisées (à spécifier en début de simulation), plusieurs types de visualisation peuvent être envisagées :

- l'évolution du champ en fonction du temps en un ou plusieurs points stratégiques du volume de calcul,
- la répartition du champ dans tout le volume à un ou plusieurs instants cruciaux de l'intervalle d'observation.

En dépit de leur intérêt qualitatif évident, de tels résultats peuvent s'avérer insuffisants ou inappropriés pour l'utilisateur, notamment en conception de circuits où l'on s'intéresse plutôt à des grandeurs globales comme l'impédance, le coefficient de réflexion ou de transmission.

L'objectif des post-traitements qui complètent tout code de FDTD consiste à extraire des champs mémorisés les grandeurs pertinentes pour l'utilisateur. La nature des post-traitements dépend largement du domaine d'application visé, la façon de représenter et d'interpréter les phénomènes pouvant varier d'un domaine à l'autre. D'une manière générale, un passage dans le domaine fréquentiel est souvent nécessaire, les outils et techniques de caractérisation dans ce domaine étant de loin les plus fréquents. Par suite, l'élément central des post-traitements est un module de transformation de Fourier rapide (FFT). Une fois dans le domaine fréquentiel, de nombreuses grandeurs dérivées peuvent être calculées à partir des champs.

L'impédance entre deux points peut par exemple être évaluée comme le rapport entre la tension entre ces points et le courant circulant de l'un à l'autre. En première approximation, ces deux grandeurs se déduisent respectivement des champs électrique et magnétique à l'aide d'un simple calcul de circulation.

Parmi les post-traitements classiques, citons également la transformation champ proche / champ lointain, qui permet de calculer le champ produit à grande distance par une structure rayonnante. Une telle transformation, basée sur le principe d'équivalence, permet, à partir

d'échantillons de champs pris dans le volume de calcul, de calculer le champ résultant en dehors de celui-ci !

Finalement, on remarquera que la durée d'observation T a une incidence directe sur les résultats de simulation. En particulier, elle doit être suffisamment longue pour permettre à tous les champs de se stabiliser dans le volume de calcul V pendant l'intervalle de temps I : pour une excitation sinusoïdale, la stabilisation correspond à l'installation du régime permanent ; pour une excitation impulsionnelle, elle correspond plutôt à un retour à zéro de tous les champs après le passage de l'impulsion. Dans le second cas, ce retour à zéro est indispensable si l'on souhaite réaliser une FFT sur les champs (faire une FFT sur un signal tronqué équivaldrait à convoluer son spectre avec le spectre de la fenêtre de troncature...).

III.6 Structure générale d'un code FDTD

L'algorithme de la figure 7.11 résume la structure générale d'un logiciel FDTD.

Pour finir, il convient de préciser que la méthode FDTD, présentée ici sous sa forme rudimentaire, s'appuie aujourd'hui sur des logiciels commerciaux très élaborés, intégrant progressivement de nouveaux raffinements :

- utilisation de maillages non uniformes ou non cartésiens, de sous-maillages localisés, ...
- représentation de matériaux complexes (à pertes, anisotropes, dispersifs, ...)
- insertion de modèles spécifiques (fil métallique fin, charges localisées, ...)
- couplage avec des simulateurs électriques (pour le traitement de charges non linéaires) ...

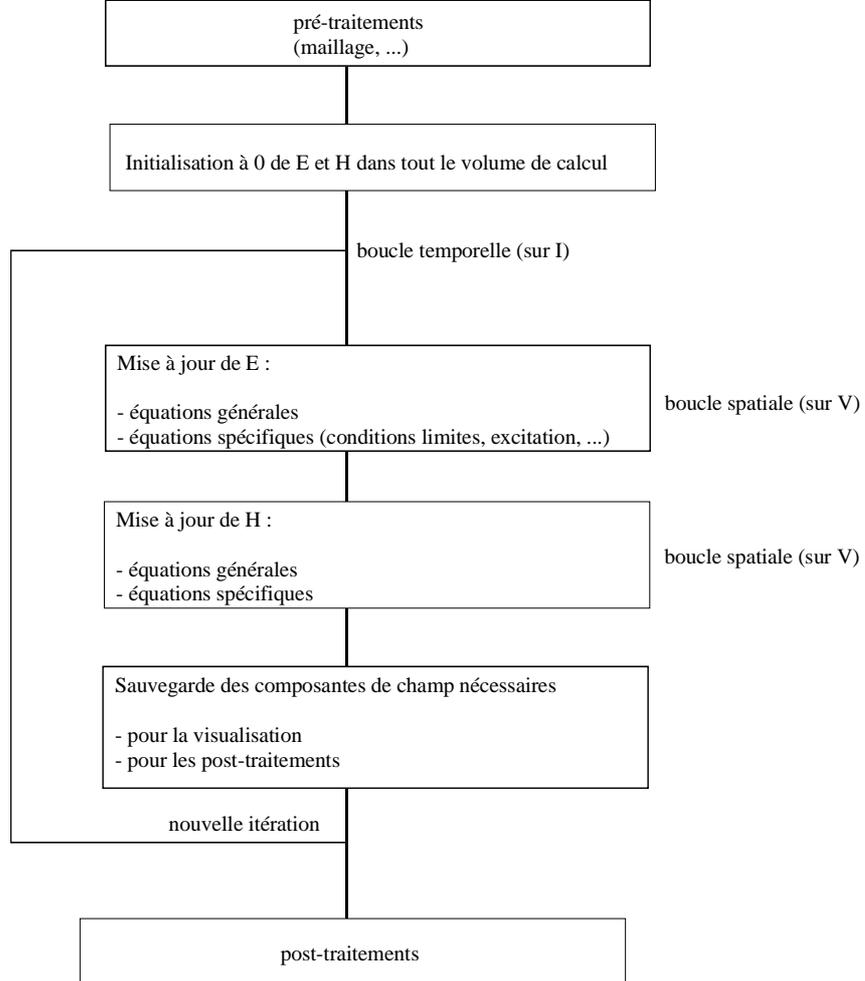


Figure 7.11 : structure générale d'un code FDTD

ANNEXE

Recueil de DS corrigés

3 ESC

Module : **M3S9**Date du contrôle : **vendredi 29 mai**Durée : **2 heures**Responsable : **Raphaël GILLARD**Documents autorisés : **tous documents****Exercice n°1**

Soit:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0(\vec{e}_x - j\vec{e}_y)\exp(-jk_0z)$$

le champ électrique complexe associé à une onde plane se propageant en espace libre.

- 1- Préciser la polarisation de l'onde.
- 2- On considère que cette onde, issue d'une source située en $z = -\infty$, rencontre en $z=0$ un plan infini parfaitement conducteur. Calculer le champ électrique réfléchi et préciser la polarisation de l'onde réfléchie.
- 3- Calculer le vecteur de Poynting complexe associé au champ électromagnétique total. Quelle est la propriété de l'onde qui se déduit de ce calcul ?

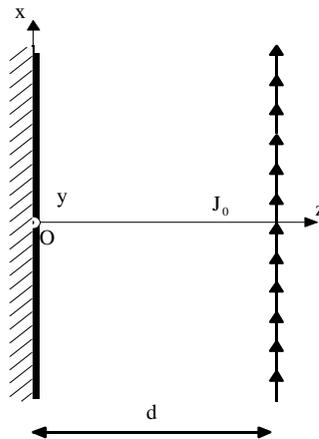
Exercice n°2

On se propose de démontrer la théorie des images dans le cas particulier présenté sur la figure ci-dessous.

La source réelle du champ est constituée par une feuille de courant électrique infinie située en $z=d$:

$$\vec{J}(\vec{r}) = \begin{cases} J_0 \vec{e}_x & \forall(x, y) \quad z = d \\ \vec{0} & \forall(x, y) \quad z \neq d \end{cases}$$

Un plan de masse (infini et parfaitement conducteur) est situé en $z=0$. Le milieu de propagation est l'espace libre.



- 1- Etablir, à partir d'un raisonnement simple, que le champ créé par la feuille de courant seule est constituée par une onde plane s'éloignant de cette feuille. Justifier la polarisation de l'onde (linéaire selon x).
- 2- Etablir l'expression des champs électrique et magnétique associés à cette onde, en fonction de J_0 , k_0 , η_0 , d et z (on distinguera les deux cas $z < d$ et $z > d$).
- 3- Déterminer, d'après la théorie des images, l'image de la feuille de courant.
- 4- Etablir l'expression des champs créés par cette image seule (on distinguera là encore deux cas).
- 5- Donner l'expression du champ total produit par la source réelle et son image pour $z > 0$.
- 6- Afin de vérifier la théorie des images, on se propose de retrouver le résultat de la question 5 en calculant directement le champ créé par la source réel en présence du plan de masse. Pour ce faire, justifier les expressions générales suivantes :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} A[\exp(jk_0z) - \exp(-jk_0z)]\vec{e}_x & \text{pour } 0 < z < d \\ B \exp(-jk_0z)\vec{e}_x & \text{pour } z > d \end{cases}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} -\frac{A}{\eta_0} [\exp(jk_0z) + \exp(-jk_0z)]\vec{e}_y & \text{pour } 0 < z < d \\ \frac{B}{\eta_0} \exp(-jk_0z)\vec{e}_y & \text{pour } z > d \end{cases}$$

- 7- Calculer A et B en appliquant les conditions aux limites adéquates. Conclure.
- 8- Que vaut le champ pour $z < 0$?

CORRIGE

Exercice n°1

1-

L'onde est polarisée circulairement à droite (cf IV.45). Pour s'en persuader, on peut revenir à l'expression du champ dans le domaine temps :

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \exp(-jk_0z) \begin{bmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}, t)\exp(j\omega t)] = |E_0| \begin{bmatrix} \cos(\omega t - k_0z + \angle E_0) \\ \sin(\omega t - k_0z + \angle E_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il est clair que la courbe décrite par le champ lorsque l'on regarde l'onde qui s'approche (c'est à dire lorsque l'on regarde vers les z négatifs) est parcourue dans le sens trigonométrique.

On peut d'ailleurs calculer :

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) = \omega |E_0| \begin{bmatrix} -\sin(\omega t - k_0z + \angle E_0) \\ \cos(\omega t - k_0z + \angle E_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

et :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) = \omega |E_0|^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ce qui montre bien que le trièdre $\{ \vec{E}, \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}, \vec{e}_z \}$ est direct.

2-

Pour un plan parfaitement conducteur, on sait que le coefficient de réflexion est égal à -1 . On en déduit l'expression du champ réfléchi (nécessaire pour que le champ total soit nul en $z=0$) :

$$\vec{E}^{\text{ref}}(\vec{r}) = -E_0 \exp(+jk_0z) \begin{bmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il s'agit d'après (IV.46) d'une polarisation circulaire gauche (puisque l'onde se propage ici vers les z négatifs).

Là encore, on peut vérifier par le calcul :

$$\vec{E}^{\text{ref}}(\vec{r}, t) = |E_0| \begin{bmatrix} -\cos(\omega t + k_0z + \angle E_0) \\ -\sin(\omega t + k_0z + \angle E_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{E}^{\text{ref}}(\vec{r}, t) = \omega |E_0| \begin{bmatrix} \sin(\omega t + k_0z + \angle E_0) \\ -\cos(\omega t + k_0z + \angle E_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}^{\text{ref}}(\vec{r}, t) \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}^{\text{ref}}(\vec{r}, t) = \omega |E_0|^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le trièdre $\{\vec{E}, \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}, -\vec{e}_z\}$ n'est pas direct ce qui confirme que la polarisation circulaire est gauche.

Le champ électrique total est la somme du champ incident et du champ réfléchi :

$$\begin{aligned} \vec{E}^{\text{tot}}(\vec{r}) &= E_0(\vec{e}_x - j\vec{e}_y)\exp(-jk_0z) - E_0(\vec{e}_x - j\vec{e}_y)\exp(+jk_0z) \\ &= E_0(\vec{e}_x - j\vec{e}_y)[\exp(-jk_0z) - \exp(+jk_0z)] \\ &= -2jE_0(\vec{e}_x - j\vec{e}_y)\sin(k_0z) \end{aligned}$$

Le champ magnétique total s'exprime de même :

$$\begin{aligned}
\vec{H}^{\text{tot}}(\vec{r}) &= \frac{E_0}{\eta_0} \vec{e}_z \times (\vec{e}_x - j\vec{e}_y) \exp(-jk_0 z) - \frac{E_0}{\eta_0} (-\vec{e}_z) \times (\vec{e}_x - j\vec{e}_y) \exp(+jk_0 z) \\
&= \frac{E_0}{\eta_0} (\vec{e}_y + j\vec{e}_x) \exp(-jk_0 z) + \frac{E_0}{\eta_0} (\vec{e}_y + j\vec{e}_x) \exp(+jk_0 z) \\
&= 2 \frac{E_0}{\eta_0} (\vec{e}_y + j\vec{e}_x) \cos(k_0 z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{R}(\vec{r}) &= \frac{1}{2} \vec{E}^{\text{tot}}(\vec{r}) \times \vec{H}^{\text{tot}*}(\vec{r}) \\
&= -j \frac{|E_0|^2}{\eta_0} (\vec{e}_x - j\vec{e}_y) \times (\vec{e}_y - j\vec{e}_x) \sin(2k_0 z) \\
&= -2j \frac{|E_0|^2}{\eta_0} \vec{e}_z \sin(2k_0 z)
\end{aligned}$$

La partie réelle du vecteur de Poynting, qui représente les flux de puissance, est nulle ce qui montre qu'il n'y a pas de propagation d'énergie. En fait, on est tout simplement en présence d'une onde stationnaire.

Exercice n°2

- 1- La source ne présente pas de variations selon x et y. Elle définit un plan de courant constant à $z=d$. Par suite, le champ créé n'a aucune raison de présenter des variations selon x et y. Il est donc constant dans tout plan $z=\text{cste}$. L'onde créée est une onde plane. Elle se propage à partir de la source donc vers les z positifs pour $z>d$ et vers les z négatifs pour $z<d$.

Le champ magnétique créé en \vec{r} par un élément de source situé en \vec{r}' est défini par la relation :

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \vec{J}(\vec{r}', t) \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

On considère le champ créé en un point $\vec{r} = z\vec{e}_z$ de l'axe (0,z), sachant que le champ est constant dans tout le plan $z=\text{cte}$.

La contribution du point de la feuille de courant situé en $\vec{r}' = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + d\vec{e}_z$ vaut:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} J_0 \vec{e}_x \times \frac{(z-d)\vec{e}_z - x\vec{e}_x - y\vec{e}_y}{[(z-d)^2 + x^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}}$$

soit

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} J_0 \frac{-(z-d)\vec{e}_y - y\vec{e}_z}{[(z-d)^2 + x^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Celle du point $\vec{r}' = x\vec{e}_x - y\vec{e}_y + d\vec{e}_z$ (image du premier point par rapport au plan (O,x,z))

vaut :

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} J_0 \vec{e}_x \times \frac{(z-d)\vec{e}_z - x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{[(z-d)^2 + x^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Soit

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} J_0 \frac{-(z-d)\vec{e}_y + y\vec{e}_z}{[(z-d)^2 + x^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}}$$

En combinant les contributions de ces deux points, on a :

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} J_0 \frac{-2(z-d)\vec{e}_y}{[(z-d)^2 + x^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}}$$

On en déduit que le champ magnétique est forcément orienté selon y puisque la contribution globale de la feuille peut être vue comme la contribution de deux demies feuilles symétriques par rapport au plan (O,x,z).

Le champ électrique est donc polarisé selon x (il est orthogonal à la fois au champ magnétique et à la direction de propagation).

2-

$z > d$

$$\vec{E}(\vec{r}) = A \exp(-jk_0 z) \vec{e}_x$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{A}{\eta_0} \exp(-jk_0 z) \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \frac{A}{\eta_0} \exp(-jk_0 z) \vec{e}_y$$

$z < d$

$$\vec{E}(\vec{r}) = B \exp(+jk_0 z) \vec{e}_x$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{B}{\eta_0} \exp(+jk_0 z) (-\vec{e}_z) \times \vec{e}_x = -\frac{B}{\eta_0} \exp(+jk_0 z) \vec{e}_y$$

conditions limites en $z = d$

continuité de la composante tangentielle du champ électrique:

$$A \exp(-jk_0 d) = B \exp(+jk_0 d)$$

discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique:

$$\vec{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s$$

avec :

$$\vec{n}_{12} = \vec{e}_z, \vec{J}_s = J_0 \vec{e}_x, \vec{H}_1 = \vec{H}(z < d), \vec{H}_2 = \vec{H}(z > d)$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_y \left[\frac{A}{\eta_0} \exp(-jk_0 d) + \frac{B}{\eta_0} \exp(+jk_0 d) \right] = J_0 \vec{e}_x$$

$$\frac{A}{\eta_0} \exp(-jk_0 d) + \frac{B}{\eta_0} \exp(+jk_0 d) = -J_0$$

D'où:

$$A = -\frac{J_0 \eta_0}{2} \exp(jk_0 d) \quad B = -\frac{J_0 \eta_0}{2} \exp(-jk_0 d)$$

Soit:

$z > d$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{J_0 \eta_0}{2} \exp(jk_0 d) \exp(-jk_0 z) \vec{e}_x$$

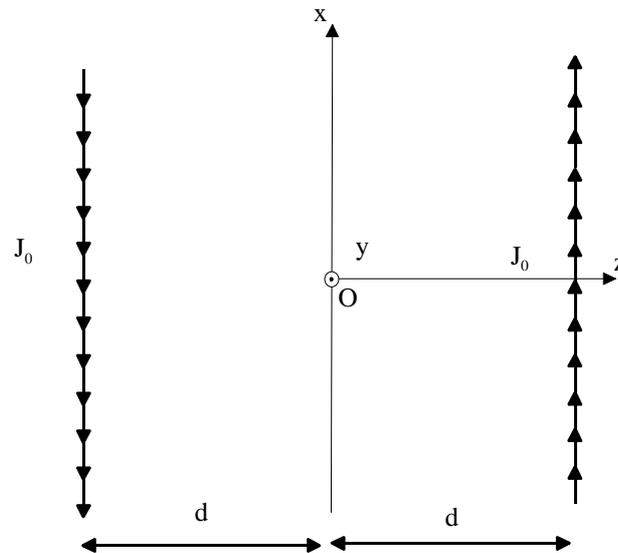
$$\vec{H}(\vec{r}) = -\frac{J_0}{2} \exp(jk_0 d) \exp(-jk_0 z) \vec{e}_y$$

$z < d$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{J_0 \eta_0}{2} \exp(-jk_0 d) \exp(+jk_0 z) \vec{e}_x$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{J_0}{2} \exp(-jk_0 d) \exp(+jk_0 z) \vec{e}_y$$

3-



4-

Champ créé par l'image:

$z > -d$

$$\vec{E}(\vec{r}) = A \exp(-jk_0 z) \vec{e}_x$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{A}{\eta_0} \exp(-jk_0 z) \vec{e}_y$$

$z < -d$

$$\vec{E}(\vec{r}) = B \exp(+jk_0 z) \vec{e}_x$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\frac{B}{\eta_0} \exp(+jk_0 z) \vec{e}_y$$

Conditions aux limites en $z = -d$

$$A \exp(+jk_0 d) = B \exp(-jk_0 d)$$

$$\frac{A}{\eta_0} \exp(+jk_0 d) + \frac{B}{\eta_0} \exp(-jk_0 d) = J_0$$

D'où:

$$A = \frac{J_0 \eta_0}{2} \exp(-jk_0 d) \quad B = \frac{J_0 \eta_0}{2} \exp(+jk_0 d)$$

Soit:

$z > -d$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{J_0 \eta_0}{2} \exp(-jk_0 d) \exp(-jk_0 z) \vec{e}_x$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{J_0}{2} \exp(-jk_0 d) \exp(-jk_0 z) \vec{e}_y$$

$z < -d$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{J_0 \eta_0}{2} \exp(+jk_0 d) \exp(+jk_0 z) \vec{e}_x$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\frac{J_0}{2} \exp(+jk_0 d) \exp(+jk_0 z) \vec{e}_y$$

5-

Par superposition:

$0 < z < d$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{J_0 \eta_0}{2} \exp(-jk_0 d) [\exp(-jk_0 z) - \exp(+jk_0 z)] \vec{e}_x$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{J_0}{2} \exp(-jk_0 d) [\exp(-jk_0 z) + \exp(+jk_0 z)] \vec{e}_y$$

$z > d$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{J_0 \eta_0}{2} \exp(-jk_0 z) [\exp(-jk_0 d) - \exp(+jk_0 d)] \vec{e}_x$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{J_0}{2} \exp(-jk_0 z) [\exp(-jk_0 d) - \exp(+jk_0 d)] \vec{e}_y$$

6-

Pour $z > d$: onde plane progressive vers les z positifs

Pour $z < d$: onde stationnaire (onde incidente vers z négatifs, coefficient réflexion -1)

7-

condition limite en $z=d$

continuité composante électrique tangentielle:

$$A[\exp(jk_0 d) - \exp(-jk_0 d)] = B \exp(-jk_0 d)$$

discontinuité composante magnétique tangentielle:

$$\frac{B}{\eta_0} \exp(-jk_0 d) + \frac{A}{\eta_0} [\exp(+jk_0 d) + \exp(-jk_0 d)] = -J_0$$

D'où:

$$A = -\frac{J_0 \eta_0}{2} \exp(-jk_0 d) \quad B = -\frac{J_0 \eta_0}{2} [\exp(+jk_0 d) - \exp(-jk_0 d)]$$

On retrouve la même expression que pour les champs calculés en sommant les contributions de la feuille de courant et de son image. Le résultat est conforme à la théorie des images grâce à laquelle le calcul du champ peut s'effectuer en remplaçant le plan de masse par les images des sources réelles.

8-

Champs nuls car au delà de l'écran formé par le plan de masse

3 ESC

Module : M3S9

Date du contrôle : lundi 7 juin

Durée : 2 heures

Responsable : Raphaël GILLARD

Documents autorisés : tous documents

Les trois parties sont indépendantes.

Première Partie

- 1- On considère deux milieux diélectriques de caractéristiques (ϵ_1, μ_0) et (ϵ_2, μ_0) positionnés comme indiqué sur la figure 1. Une onde plane harmonique issue du milieu 1 arrive sur l'interface avec une incidence normale. Rappeler l'expression des coefficients de réflexion Γ_{12} et de transmission T_{12} correspondants. Donner la relation qui permet d'exprimer T_{12} en fonction de Γ_{12} .

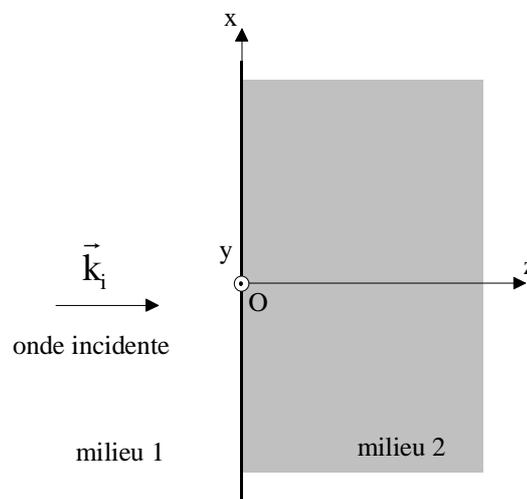


Figure 1

- 2- L'onde arrive maintenant du milieu 2, toujours sous incidence normale. Etablir l'expression de Γ_{21} et T_{21} , les coefficients de réflexion et transmission correspondants, en fonction de Γ_{12} .

- 3- Le milieu 2 est maintenant limité par un plan de masse infini et parfait, situé à une distance d de l'interface (figure 2). Calculer l'expression du coefficient de réflexion noté Γ_1 , pour une onde plane harmonique, sous incidence normale et issue du milieu 1 (on commencera par exprimer Γ_1 à l'aide d'une série représentant les réflexions multiples sur les diverses interfaces ; le résultat sera donné exclusivement en fonction de Γ_{12} , d et k_2 le nombre d'onde dans le milieu 2).

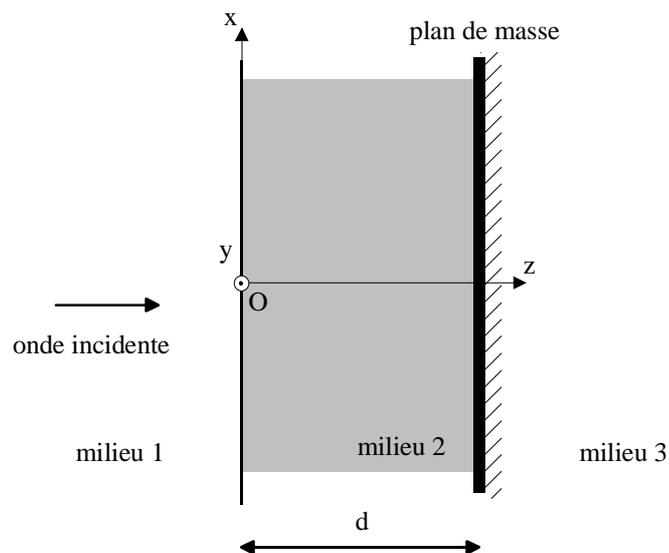


Figure 2

- 4- Que vaut le coefficient de transmission T_{13} entre le milieu 1 et le milieu 3, situé à droite du plan de masse ?

Deuxième partie

On se propose, dans les questions qui suivent (5,6 et 7), de retrouver les résultats des questions 3 et 4 à l'aide de la théorie des images.

- 5- On considère d'abord une nappe de courant, définie comme :

$$\vec{J}(\vec{r}) = \begin{cases} J_x \vec{e}_x & \forall (x, y) \quad z = -L \\ \vec{0} & \forall (x, y) \quad z \neq -L \end{cases}$$

Expliquer pourquoi une telle répartition de courant génère nécessairement une onde plane polarisée selon x et se propageant selon l'axe (O,z) .

- 6- On suppose dans la suite que l'onde plane considérée à partir de la question 3 est produite par la source définie ci-dessus (question 5), conformément à la figure 3. Appliquer la théorie des images pour définir un problème équivalent sans plan de masse (N.B : on commencera par remplacer les milieux diélectriques par des sources équivalentes avant d'appliquer la théorie des images ; toutes les étapes devront être clairement justifiées).

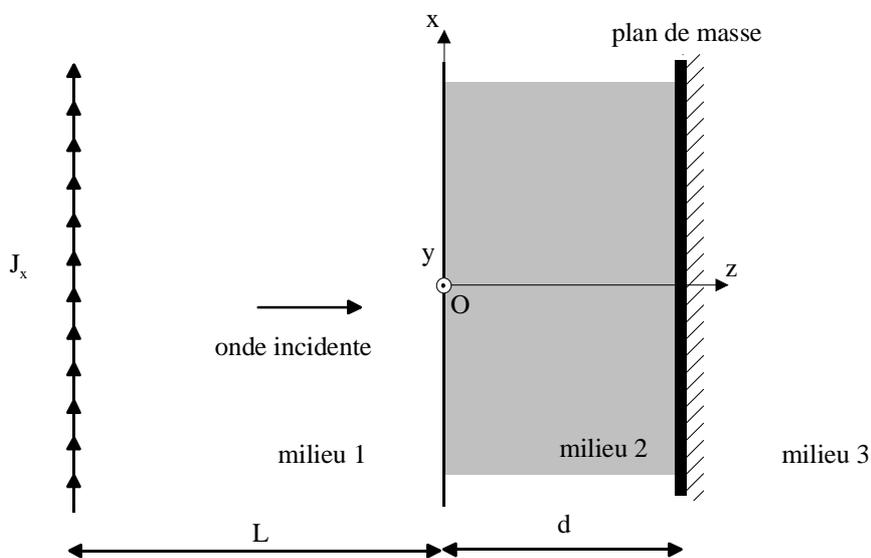


Figure 3

- 7- Utiliser le problème équivalent pour calculer Γ_1 et T_{13} .

Troisième partie

- 8- On considère maintenant le cas de l'incidence oblique θ_i et on se restreint à la polarisation parallèle. Exprimer le coefficient de réflexion Γ_1 en fonction des paramètres Γ_{12} , d et k_2 en précisant la nouvelle expression de Γ_{12} (un schéma et des explications clairs s'imposent).

CORRIGE

1-

$$\Gamma_{12} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad T_{12} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

$$\text{avec } \eta_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_i}}$$

$$T_{12} = 1 + \Gamma_{12}$$

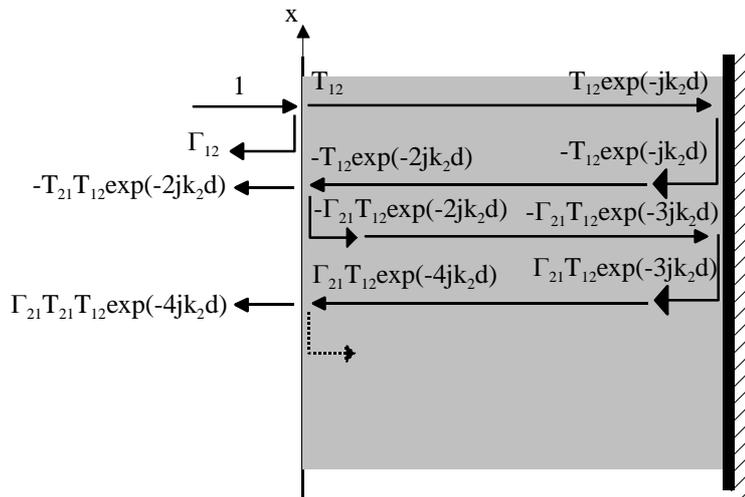
2-

$$\Gamma_{21} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = -\Gamma_{12}$$

$$T_{21} = 1 + \Gamma_{21} = 1 - \Gamma_{12}$$

3-

Représentation des réflexions multiples



$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \Gamma_{12} + T_{12} T_{21} (-1) \exp(-2jk_2 d) + T_{12} T_{21} (-1) \exp(-2jk_2 d) (-1) \Gamma_{21} \exp(-2jk_2 d) + \dots \\
&= \Gamma_{12} - T_{12} T_{21} \exp(-2jk_2 d) \sum_{n=0}^{+\infty} [-\Gamma_{21} \exp(-2jk_2 d)]^n \\
&= \Gamma_{12} - \frac{T_{12} T_{21} \exp(-2jk_2 d)}{1 + \Gamma_{21} \exp(-2jk_2 d)} \\
&= \Gamma_{12} - \frac{(1 + \Gamma_{12})(1 - \Gamma_{12}) \exp(-2jk_2 d)}{1 - \Gamma_{12} \exp(-2jk_2 d)} \\
&= \frac{\Gamma_{12} - \exp(-2jk_2 d)}{1 - \Gamma_{12} \exp(-2jk_2 d)}
\end{aligned}$$

4-

On vérifie aisément que le module de Γ_1 est égal à 1, ce qui démontre (si besoin était...) que la structure est entièrement réfléchissante :

$$|\Gamma_1| = \frac{\sqrt{[\Gamma_{12} - \cos(2k_2 d)]^2 + \sin^2(2k_2 d)}}{\sqrt{[1 - \Gamma_{12} \cos(2k_2 d)]^2 + \Gamma_{12}^2 \sin^2(2k_2 d)}} = \frac{\sqrt{\Gamma_{12}^2 - 2\Gamma_{12} \cos(2k_2 d) + 1}}{\sqrt{\Gamma_{12}^2 - 2\Gamma_{12} \cos(2k_2 d) + 1}} = 1$$

Le plan de masse (infini et parfait, ne l'oublions pas) joue donc le rôle d'un écran qui renvoie l'onde incidente vers la gauche. Cette réflexion ne s'effectue pas instantanément puisque l'intégralité de l'onde incidente n'est réfléchi qu'après un nombre infini d'allers-retours entre l'interface et le plan de masse (la partie de l'onde qui n'est pas immédiatement réfléchi par l'interface se trouve « piégée » dans le milieu 2 et ne s'évacue vers le milieu 1 que progressivement).

En définitive, rien n'est transmis dans le milieu 3 :

$$T_{13}=0$$

5-

La source du champ est indépendante des variables spatiales x et y . Le champ résultant possède nécessairement la même propriété : les plans $z=cste$ sont donc des plans d'onde (équi-amplitude et équiphase) ce qui conduit à une onde plane se propageant selon l'axe (O,z) .

La polarisation du champ peut être déterminée en écrivant la condition aux limites en $z=-L$ pour la composante tangentielle du champ magnétique :

$$\vec{e}_x [\vec{H}(-L^-) - \vec{H}(-L^+)] = J_x \vec{e}_x$$

Cette équation montre que le champ magnétique est orienté selon (Oy) et que, par suite, le champ électrique est orienté selon (Ox) ; il doit en effet être orthogonal à la fois au champ magnétique et à la direction de propagation.

6-

La théorie des images ne donne a priori aucune règle pour traiter l'image d'un milieu matériel (ici le diélectrique). En pratique, il convient donc d'abord de remplacer le milieu matériel par des sources équivalentes puis, ensuite, de déterminer les images de ces sources.

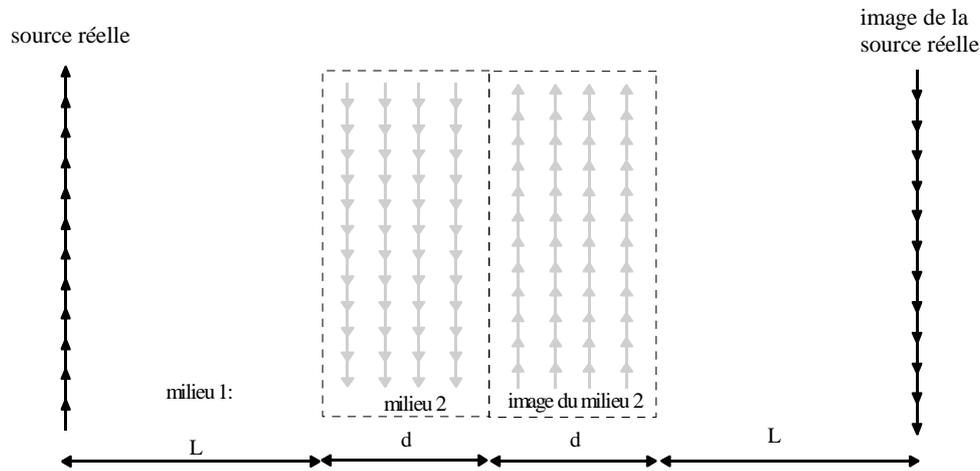
Dans un premier temps, le diélectrique est donc remplacé par des courants électriques de polarisation (on ne s'intéresse qu'aux courants, les charges s'en déduisant par application du principe de conservation de la charge) :

$$\vec{J}_p(\vec{r}) = j\omega\vec{P}(\vec{r}) = j\omega\epsilon_0\chi_e\vec{E}(\vec{r})$$

Comme le montre cette expression, les courants de polarisation sont colinéaires au champ électrique : ils sont donc ici orientés selon la direction (Ox). En toute rigueur, leur sens est opposé à celui des courants d'excitation (c'est le sens du champ électrique, contraire à celui des courants – penser à l'orientation relative du courant et de la tension dans une charge -).

Dans un deuxième temps, la présence du plan de masse peut être prise en compte en appliquant la théorie des images. Tous les courants électriques définis précédemment (sources réelles et sources induites) sont donc complétés par leurs images.

Au final, on remarque que la partie droite de la figure est l'antisymétrique de la gauche : l'image des courants de polarisation représente donc un milieu diélectrique image du milieu diélectrique réel, avec les mêmes propriétés géométriques et physiques. Le problème équivalent est donc réductible à une lame diélectrique (d'épaisseur 2d) excitée de part et d'autre par des sources opposées.



Problème équivalent par application de la théorie des images

7-

L'onde réfléchie vers le milieu 1 peut être calculée en considérant le problème équivalent (voir question 6) et en sommant toutes les ondes se propageant vers la gauche, à savoir :

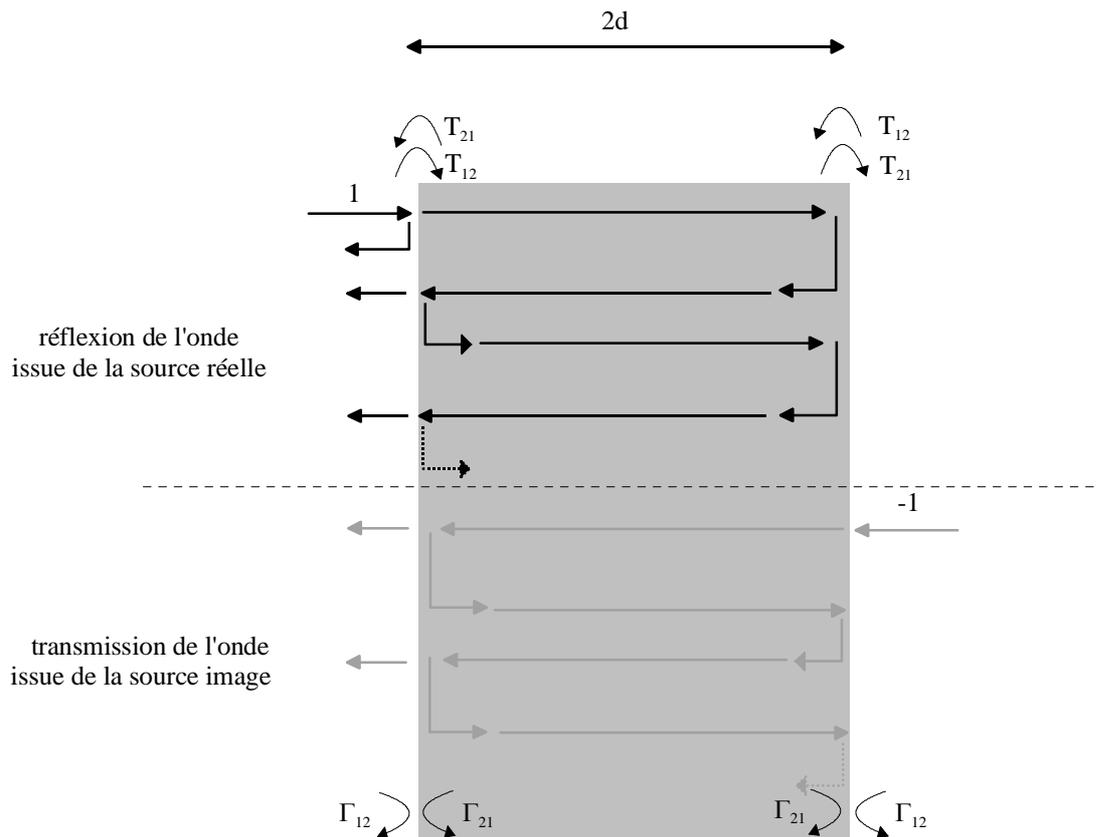
- l'onde issue de la source réelle qui se réfléchit sur la lame diélectrique
- l'onde issue de la source image qui traverse la lame diélectrique

On s'intéresse d'abord à la partie de l'onde issue de la source réelle (à gauche) qui est réfléchie par la lame diélectrique. Le principe de calcul est le même qu'à la question 3. La principale différence tient au fait que, dans le problème équivalent, le milieu diélectrique est limité à droite par une interface diélectrique/air (coefficient de réflexion Γ_{21}) et non plus par un plan de masse (coefficient de réflexion -1). Pour une onde incidente normalisée à 1, l'onde réfléchie s'exprime donc :

$$\begin{aligned}
 & \Gamma_{12} + T_{12} T_{21} \Gamma_{21} \exp(-4jk_2 d) + T_{12} T_{21} \Gamma_{21} \exp(-4jk_2 d) \exp(-4jk_2 d) \Gamma_{21}^2 + \dots \\
 &= \Gamma_{12} + T_{12} T_{21} \Gamma_{21} \exp(-4jk_2 d) \sum_{n=0}^{+\infty} [\Gamma_{21}^2 \exp(-4jk_2 d)]^n \\
 &= \Gamma_{12} + \frac{T_{12} T_{21} \Gamma_{21} \exp(-4jk_2 d)}{1 - \Gamma_{21}^2 \exp(-4jk_2 d)} \\
 &= \Gamma_{12} - \frac{(1 + \Gamma_{12})(1 - \Gamma_{12}) \Gamma_{12} \exp(-4jk_2 d)}{1 - \Gamma_{12}^2 \exp(-4jk_2 d)} \\
 &= \Gamma_{12} \frac{1 - \exp(-4jk_2 d)}{1 - \Gamma_{12}^2 \exp(-4jk_2 d)}
 \end{aligned}$$

On s'intéresse maintenant à l'onde issue de la source image, transmise de la droite vers la gauche, au travers de la lame diélectrique. Pour une onde incidente normalisée à -1 (la source image est en opposition de phase avec la source réelle), l'onde transmise vaut :

$$\begin{aligned}
 & -T_{21}T_{12} \exp(-2jk_2d) - T_{21}T_{12} \exp(-2jk_2d)\Gamma_{21}^2 \exp(-4jk_2d) - \dots \\
 &= -T_{21}T_{12} \exp(-2jk_2d) \sum_{n=0}^{\infty} [\Gamma_{21}^2 \exp(-4jk_2d)]^n \\
 &= \frac{-T_{21}T_{12} \exp(-2jk_2d)}{1 - \Gamma_{21}^2 \exp(-4jk_2d)} \\
 &= \frac{-(1 - \Gamma_{12})(1 + \Gamma_{12}) \exp(-2jk_2d)}{1 - \Gamma_{12}^2 \exp(-4jk_2d)} \\
 &= \frac{-(1 - \Gamma_{12}^2) \exp(-2jk_2d)}{1 - \Gamma_{12}^2 \exp(-4jk_2d)}
 \end{aligned}$$



Les phénomènes contribuant à la réflexion vers la gauche

En sommant les deux ondes, on obtient l'onde réfléchie vers le milieu 1 pour une onde incidente normalisée à 1 (source réelle) :

$$\begin{aligned} & \Gamma_{12} \frac{1 - \exp(-4jk_2d)}{1 - \Gamma_{12}^2 \exp(-4jk_2d)} - \frac{(1 - \Gamma_{12}^2) \exp(-2jk_2d)}{1 - \Gamma_{12}^2 \exp(-4jk_2d)} \\ &= \frac{[1 + \Gamma_{12} \exp(-2jk_2d)][\Gamma_{12} - \exp(-2jk_2d)]}{[1 - \Gamma_{12} \exp(-2jk_2d)][1 + \Gamma_{12} \exp(-2jk_2d)]} \\ &= \frac{\Gamma_{12} - \exp(-2jk_2d)}{1 - \Gamma_{12} \exp(-2jk_2d)} \end{aligned}$$

Ce qui correspond bien au coefficient de réflexion Γ_1 calculé à la question 3.

Attention : la théorie des images ne permet pas de calculer le coefficient de transmission puisque le problème équivalent n'est valable que pour le calcul du champ à gauche du plan de masse.

8-

Le calcul est sensiblement le même qu'à la question 3 et l'on a donc de même :

$$\Gamma_1 = \Gamma_{12} - \frac{T_{12} T_{21} \exp(-j\phi)}{1 + \Gamma_{21} \exp(-j\phi)}$$

Néanmoins, dans cette expression, les coefficients de réflexion Γ_{12} et de transmission T_{12} et T_{21} sont ceux correspondant à l'incidence oblique (formules de Fresnel en polarisation parallèle) :

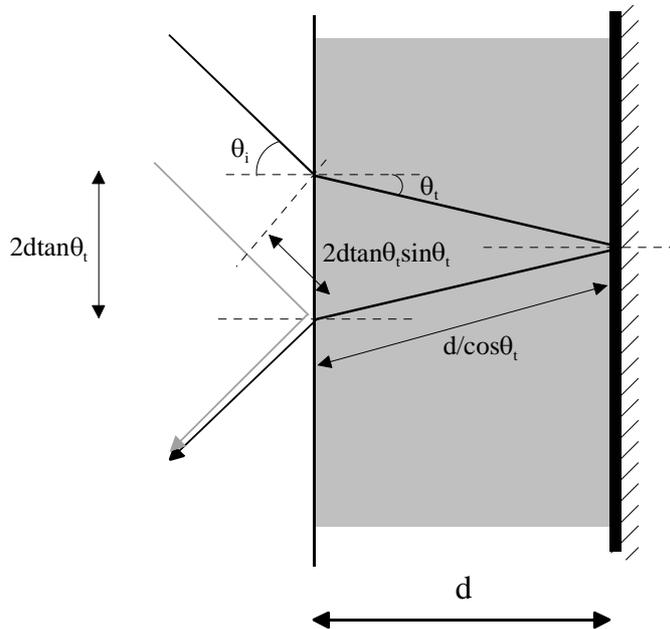
$$\Gamma_{12} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$$

et :

$$\Gamma_{21} = -\Gamma_{12} \quad T_{12} = \frac{\eta_2}{\eta_1} (1 - \Gamma_{12}) \quad T_{21} = \frac{\eta_1}{\eta_2} (1 + \Gamma_{12})$$

De plus, ϕ représente le déphasage subi par l'onde lors d'un aller-retour à l'intérieur du diélectrique. Attention : lors du calcul de ce déphasage, on doit intégrer le fait que l'onde qui se réfléchit directement sur l'interface (en trait gris sur la figure) a parcouru une distance dans le milieu 1 plus importante que l'onde issue de la réflexion sur le plan de masse (en trait noir) avec laquelle elle se recombine :

$$\phi = k_2 \frac{2d}{\cos \theta_t} - k_2 2d \tan \theta_t \sin \theta_t = k_2 2d \cos \theta_t$$



Représentation des deux ondes se recombinaut

On peut donc finalement écrire :

$$\Gamma_1 = \frac{\Gamma_{12} - \exp(-2jk_2 d \cos \theta_t)}{1 - \Gamma_{12} \exp(-2jk_2 d \cos \theta_t)}$$

Remarque (hors DS) : à propos des ondes de surface

Un cas particulièrement intéressant doit être mentionné. Si l'on a simultanément :

$$\Gamma_{12} = 1 \quad \text{et} \quad \exp(-2jk_2d \cos \theta_t) = 1$$

le calcul de Γ_1 devient impossible car on se trouve en présence d'une forme indéterminée.

On considère par souci de simplification que $\varepsilon_{r1}=1$ et que $\varepsilon_{r2}=\varepsilon_r$ (le premier milieu est constitué d'air et le second est un diélectrique). Dans ces conditions, d'après (V.32) :

$$\Gamma_{12} = \frac{\sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \theta_i} - \varepsilon_r \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}}{\sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \theta_i} + \varepsilon_r \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}}$$

Pour que ce coefficient de réflexion soit égal à 1, il faut :

$$\theta_i = \frac{\pi}{2}$$

ce qui correspond au cas de l'incidence rasante. On sait d'après (V.27) que, dans ces conditions :

$$\cos \theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}}$$

Pour que l'exponentielle soit égale à 1, il faut donc que :

$$2k_2d \frac{\sqrt{\varepsilon_r - 1}}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 2n\pi$$

soit :

$$\left(\frac{2\pi f}{c} \sqrt{\varepsilon_r} \right) d \frac{\sqrt{\varepsilon_r - 1}}{\sqrt{\varepsilon_r}} = n\pi$$

d'où l'on tire :

$$f = f_n = \frac{cn}{2d\sqrt{\varepsilon_r - 1}}$$

Ces fréquences représentent les fréquences de coupure des modes de surface TM_n pouvant circuler dans une lame diélectrique bordée par un plan de masse.

3 ESC

Module : M3S9

Date du contrôle : vendredi 8 juin

Durée : 2 heures

Responsable : Raphaël GILLARD

Documents autorisés : tous documents

En cas de blocage, le problème peut être repris à la question 10, en utilisant les résultats de la question 3

On considère un matériau anisotrope caractérisé par les tenseurs de permittivité $[\varepsilon]$ et de perméabilité $[\mu]$ tels que :

$$[\varepsilon] = \varepsilon \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \text{ et } [\mu] = \mu \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

où ε et μ sont des nombres réels ; a, b, c et d des nombres éventuellement complexes.

- 1- Indiquer la nature de l'anisotropie du matériau. Préciser l'axe optique (1pt)
- 2- On considère la propagation d'une onde plane harmonique dans ce matériau et l'on note :

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{bmatrix}, \vec{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ H_y \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \vec{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{bmatrix}$$

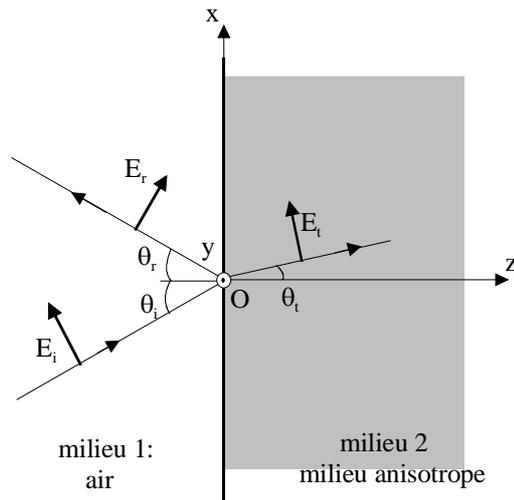
Préciser la nature (TE, TM ou autre, en indiquant l'axe de référence) de l'onde considérée (1pt).

- 3- En utilisant les équations de Maxwell rotationnelles, montrer que la relation de dispersion associée à l'onde considérée est donnée par :

$$\omega^2 \varepsilon \mu - (k_z)^2 b^{-1} d^{-1} - (k_x)^2 a^{-1} d^{-1} = 0$$

(2pt)

- 4- On considère une interface plane séparant deux milieux. Le premier est constitué d'air (ε_0, μ_0) et le second est le matériau anisotrope étudié précédemment (voir figure).



On suppose qu'une onde plane harmonique, issue du milieu 1, et vérifiant :

$$\vec{H}_i = H_0 \vec{e}_y \exp[-j(k_{1x}x + k_{1z}z)]$$

est incidente sur l'interface.

Rappeler brièvement l'expression reliant k_{1x} , k_{1z} , ω , ϵ_0 et μ_0 (1pt).

5- Rappeler brièvement les expressions reliant k_{1x} et k_{1z} à θ_i , l'angle d'incidence (1pt).

6- En utilisant les résultats des questions précédentes et les propriétés de l'onde plane, exprimer le champ électrique incident \vec{E}_i en fonction de k_{1x} , k_{1z} , ω , ϵ_0 et H_0 (1pt).

7- Déterminer (en fonction des mêmes paramètres et du coefficient de réflexion Γ) l'expression des champs électrique et magnétique réfléchis (2 pts).

N.B : On adoptera impérativement la convention consistant à orienter les composantes tangentielles des différents champs électriques (incident, réfléchi et transmis pour la question suivante) dans le même sens.

8- Déterminer (en fonction de k_x , k_z , ω , ϵ , a , b , H_0 et du coefficient de transmission T) l'expression des champs électrique et magnétique transmis dans le milieu 2 (k_x , k_z , a , b et ϵ sont ceux des questions 1 à 3) (2pts).

NB : On calculera d'abord \vec{H}_t puis on en déduira \vec{E}_t en exploitant les relations existant entre \vec{E} et \vec{H} dans le milieu 2 (voir question 3).

9- On pose $\varepsilon=\varepsilon_0$ et $\mu=\mu_0$. Montrer que le coefficient de réflexion Γ peut s'écrire :

$$\Gamma = \frac{k_z b^{-1} - k_{1z}}{k_z b^{-1} + k_{1z}}$$

(1pt)

10- Montrer, en utilisant l'équation de dispersion, que, si $d=b$ et $a^{-1}=b$, alors $k_z=bk_{1z}$ (1pt).

11- En déduire que $\Gamma=0$ indépendamment de l'angle d'incidence (1pt).

12- On pose, en plus, $b = 1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_0}$. En remarquant que b représente la permittivité relative du milieu associée à la composante E_x (ou E_y), préciser la propriété du milieu que traduit une telle expression (1pt).

13- On adopte pour le champ magnétique transmis dans le milieu 2 l'expression suivante :

$$\vec{H}_t = H_0' \vec{e}_y \exp(-jk_x x) \exp(-jk_z z)$$

Dans les conditions imposées aux questions 10 et 11, reformuler cette expression en fonction de k_{1z} , k_x , σ , ω et ε_0 . (on utilisera notamment le résultat de la question 10) (1pt).

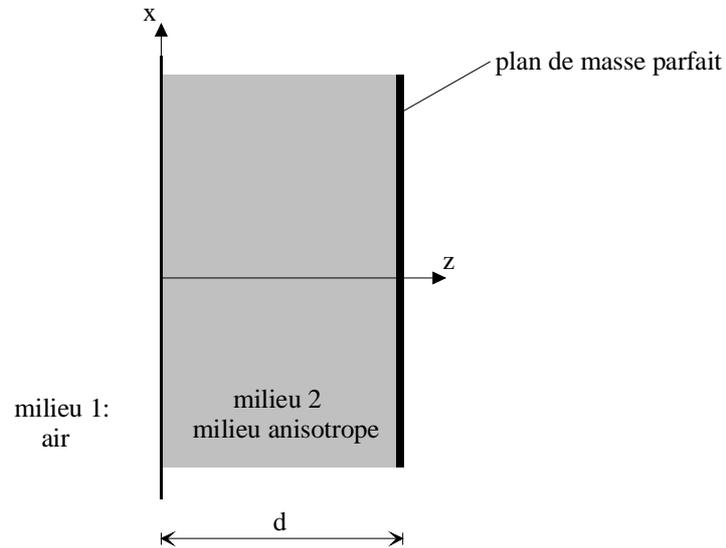
14- Montrer que :

$$\frac{k_{1z}}{\omega\varepsilon_0} = \eta_0 \cos \theta_i$$

(1pt)

15- Déduire des questions 13 et 14 que le champ s'atténue dans le milieu 2 dans la direction normale à l'interface (Oz), et ceci de façon indépendante de la fréquence (1pt).

16- On suppose maintenant que le milieu 2 est limité à une couche de matériau d'épaisseur d plaquée sur un plan de masse parfait (voir figure). Déterminer le coefficient de réflexion global à l'interface air/milieu 2 (le calcul est très simple si l'on remarque que $\Gamma=0$ et $T=1$, du milieu 1 vers le milieu 2 et réciproquement) (1pt).



17- Une telle couche est habituellement appelée « couche parfaitement adaptée ». Justifier cette appellation (1pt).

Remarque : Les couches parfaitement adaptées ne sont pas réalisables physiquement. Par contre, elles sont couramment utilisées en simulation, dans les problèmes de rayonnement, pour tronquer un volume de calcul sans générer de réflexions parasites.

CORRIGE

- 1- Milieu uniaxial diélectrique et magnétique. Axe optique (O,z).
- 2- Onde TE_y : le champ électrique appartient au plan de normale (O,y).
NB : A ce stade du problème, il n'y a pas encore de plan d'incidence défini ; impossible donc d'utiliser une nomenclature relative à un tel plan.
- 3- NB : le fait de parler de nombre d'ondes suffit à montrer que l'on est en régime harmonique.

$$-j \begin{bmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{bmatrix} = -j\omega\mu \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ H_y \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow k_z E_x - k_x E_z = \omega\mu d H_y$$

$$-j \begin{bmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ H_y \\ 0 \end{bmatrix} = j\omega\varepsilon \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} k_z H_y = \omega\varepsilon b E_x \\ -k_x H_y = \omega\varepsilon a E_z \end{cases}$$

d'où :

$$\frac{k_z^2}{\omega\varepsilon b} + \frac{k_x^2}{\omega\varepsilon a} = \omega\mu d$$

soit :

$$0 = \omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2 b^{-1} d^{-1} - k_x^2 a^{-1} d^{-1}$$

4-

$$k_{1x}^2 + k_{1z}^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$$

(équation de dispersion dans le milieu 1)

5-

$$k_{1x} = k_1 \sin \theta_i$$

$$k_{1z} = k_1 \cos \theta_i$$

6-

$$\vec{E}_i = -\frac{\vec{k}_i}{\omega\epsilon_0} \times \vec{H}_i = \frac{H_0}{\omega\epsilon_0} (k_{1z} \vec{e}_x - k_{1x} \vec{e}_z) \exp[-j(k_{1x}x + k_{1z}z)]$$

7-

$$\vec{E}_r = \frac{\Gamma H_0}{\omega\epsilon_0} (k_{1z} \vec{e}_x + k_{1x} \vec{e}_z) \exp[-j(k_{1x}x - k_{1z}z)]$$

$$\vec{H}_r = -\Gamma H_0 \vec{e}_y \exp[-j(k_{1x}x - k_{1z}z)]$$

8-

On pose (N.B : T est défini ici par rapport au champ magnétique) :

$$\vec{H}_t = TH_0 \vec{e}_y \exp[-j(k_x x + k_z z)]$$

D'après la question 3 :

$$E_x = \frac{k_z}{\omega\epsilon b} H_y$$

$$E_z = -\frac{k_x}{\omega\epsilon a} H_y$$

D'où

$$\vec{E}_t = TH_0 \left(\frac{k_z}{\omega\epsilon b} \vec{e}_x - \frac{k_x}{\omega\epsilon a} \vec{e}_z \right) \exp[-j(k_{1x}x + k_{1z}z)]$$

9- En appliquant la continuité des champs tangentiels à l'interface, on a :

$$T = 1 - \Gamma$$

$$T \frac{k_z}{b} = k_{1z} (1 + \Gamma)$$

soit

$$\Gamma = \frac{k_z b^{-1} - k_{1z}}{k_z b^{-1} + k_{1z}}$$

10-

$$\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - (k_z)^2 b^{-2} - (k_x)^2 = 0$$

et

$$k_x = k_{1x} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - k_{1z}^2}$$

d'où

$$k_{1z} = k_z b^{-1}$$

11- Immédiat en reportant dans l'expression de Γ issue de 9

12- Dans le milieu anisotrope b joue le rôle de ϵ_r pour la composante E_x ou E_y .

$$b = \epsilon_r = 1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0} = 1 - j \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}$$

Par identification avec (II.76) du cours, il s'agit d'un matériau diélectrique avec une conductivité (donc des pertes).

13-

$$k_z = b k_{1z} = k_{1z} - j \frac{\sigma k_{1z}}{\omega\epsilon_0}$$

$$\vec{H}_t = TH_0 \vec{e}_y \exp(-jk_x x) \exp(-jk_{1z} z) \exp\left(-\frac{\sigma k_{1z}}{\omega\epsilon_0} z\right)$$

14-

$$\frac{k_{1z}}{\omega\epsilon_0} = \frac{k_1 \cos \theta_i}{\omega\epsilon_0} = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \cos \theta_i}{\omega\epsilon_0} = \eta_0 \cos \theta_i$$

15-

$$\vec{H}_t = TH_0 \vec{e}_y \exp(-jk_x x) \exp(-jk_{1z} z) \exp(-\sigma \eta_0 \cos \theta_i z)$$

Le dernier terme exponentiel traduit une atténuation (selon z) indépendante de ω .

16-Le calcul du coefficient de réflexion pour une couche de matériau court-circuité conduit à :

$$\Gamma = \Gamma_{12} - \frac{T_{12} T_{21} \exp(-j2k_z d)}{1 + \Gamma_{21} \exp(-j2k_z d)}$$

ici :

$$\Gamma = -\exp(-2jk_z d)$$

soit :

$$\Gamma = -\exp(-2jk_{1z} d) \exp(-2\sigma \eta_0 \cos \theta_i d)$$

18-Pour peu que σd soit grand, le module de Γ est très faible. La couche ne réfléchit donc rien d'où l'appellation de couche parfaitement adaptée.

Attention, plus l'incidence est élevée, plus l'épaisseur de la couche doit être importante.

Module : M3S9

Date du contrôle : vendredi 31 mai 2002

Durée : 2 heures

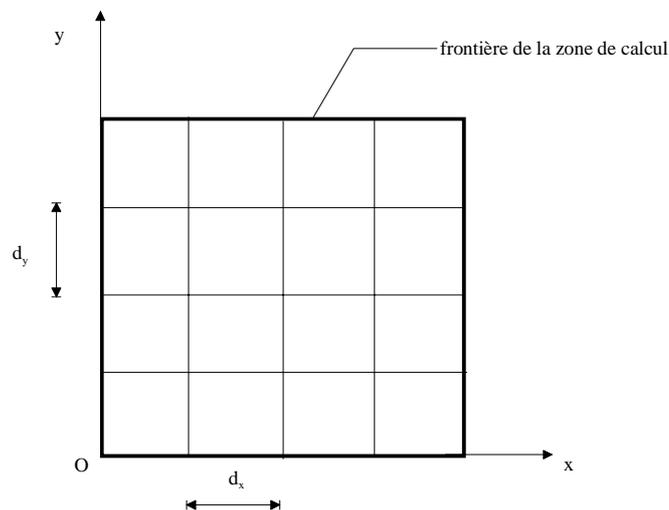
Responsable : Raphaël GILLARD

Documents autorisés : tous documents

EXERCICE (8pts): FDTD en 2D

On considère un problème d'électromagnétisme 2D résolu dans le plan (O,x,y) . L'onde considérée est de type TEz.

- 1- Donner la forme générale des champs électrique $\vec{E}(x,y,t)$ et magnétique $\vec{H}(x,y,t)$ associés à une onde TEz. (1pt)
- 2- On suppose que le problème est traité par FDTD. On note d_x , d_y et d_t les pas de discrétisation spatiaux et temporel. On ne considère pour l'instant que des points réguliers de l'espace, caractérisé par une permittivité ϵ et une perméabilité μ_0 . Donner les équations générales de mise à jour des trois composantes non nulles de champ (on particularisa les équations vues en cours dans le cas 3D). (1,5pt)
- 3- La zone de calcul est en fait constituée par un carré de 4x4 cellules rectangulaires (voir figure 1). Indiquer sur un schéma les points où sont calculées les différentes composantes non nulles de champ, pour la cellule (1,1). (1pt)

**Figure 1**

- 4- Calculer le nombre total de composantes de champ à mettre à jour à chaque itération (attention à bien comptabiliser les composantes de champ sur les frontières de la zone de calcul). (1,5pt)

- 5- On suppose que la zone de calcul est limitée par une paroi métallique parfaitement conductrice. Donner l'équation de mise à jour à utiliser sur cette paroi en indiquant précisément toutes les composantes de champ concernées (par exemple $E_x(1,1)$). (2pts)
- 6- On suppose que $d_x=d_y=1$ mm et $\epsilon=\epsilon_0$, donner le nombre minimal d'itérations nécessaires pour étudier le problème sur une durée de 1 ms (N.B : le critère de stabilité pour la FDTD 2D se déduit immédiatement de celui de la FDTD 3D en supprimant la dépendance en d_z). (1pt)

PROBLEME (12pts): Réflexion sur une interface diélectrique et polarisation

(N.B. : la question 8 peut être traitée indépendamment)

On considère l'interface entre deux milieux diélectriques, notés 1 et 2, de caractéristiques (ϵ_1, μ_0) et (ϵ_2, μ_0) . On note (O, z) la normale à l'interface et on s'intéresse à la réflexion d'une onde plane issue du milieu 1. Le plan d'incidence est le plan (O, x, z) et l'angle d'incidence est noté θ_i .

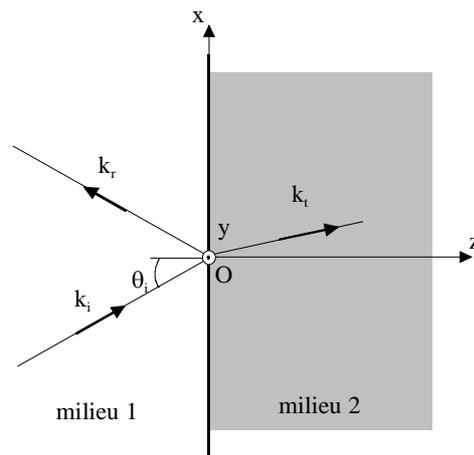


Figure 2

- 1- Donner l'expression du nombre d'ondes k_1 dans le milieu 1 en fonction de ω , ϵ_1 et μ_0 . (1pt)
- 2- Calculer les vecteurs d'onde \vec{k}_i et \vec{k}_r , respectivement associés aux ondes incidente et réfléchie, en fonction de k_1 et θ_i . (1pt)
- 3- Donner l'expression du champ électrique incident pour une polarisation TE (on notera E_0 son amplitude et on choisira sa phase nulle à l'origine du repère O). (1,5pt)
- 4- Donner l'expression du champ électrique incident pour une polarisation TM (on notera E_0 son amplitude et on choisira sa phase égale à $\pi/2$ à l'origine du repère O). (1,5pt)
- 5- On considère le champ électrique obtenu en superposant les ondes TE et TM considérées en 3 et 4. Donner son expression. Indiquer précisément sa polarisation (N.B.: un changement de repère est conseillé). (2pts)

- 6- Déterminer l'expression du champ électrique réfléchi obtenu lorsque que le champ défini en 5 est utilisé comme champ incident. On donnera l'expression de ce champ réfléchi en fonction de E_0 , Γ_{TE} , Γ_{TM} sans re-démontrer les résultats du cours. (1pt)
- 7- Quelle est la polarisation de ce champ réfléchi? (N.B.: un changement de repère est conseillé). (1pt)
- 8- On considère un milieu anisotrope, de permittivité ϵ_1 , de perméabilité μ_0 et de tenseur conductivité dans un repère orthonormé (Ω, u, y, w)

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On s'intéresse à une onde plane se propageant dans ce milieu selon l'axe (Ω, w) . On note $\vec{E}(\vec{r}) = E_u(w)\vec{e}_u + E_y(w)\vec{e}_y$ et $\vec{H}(\vec{r}) = H_u(w)\vec{e}_u + H_y(w)\vec{e}_y$ les champs électrique et magnétique associés. Montrer que la propagation de la composante E_u se fait sans atténuation alors que celle de la composante E_y se fait avec une atténuation. Montrer que la constante de phase pour les deux composantes est la même si $\sigma_y \ll \omega\epsilon_1$. (2pts)

- 9- En déduire que la structure présentée sur la figure 3 permettrait de rétablir la polarisation circulaire pour l'onde réfléchie (on néglige les phénomènes de réflexion aux interfaces avec le milieu anisotrope et on considère que $\Gamma_{TE} > \Gamma_{TM}$). Etablir la condition correspondante pour l'épaisseur du matériau anisotrope. (1pt)

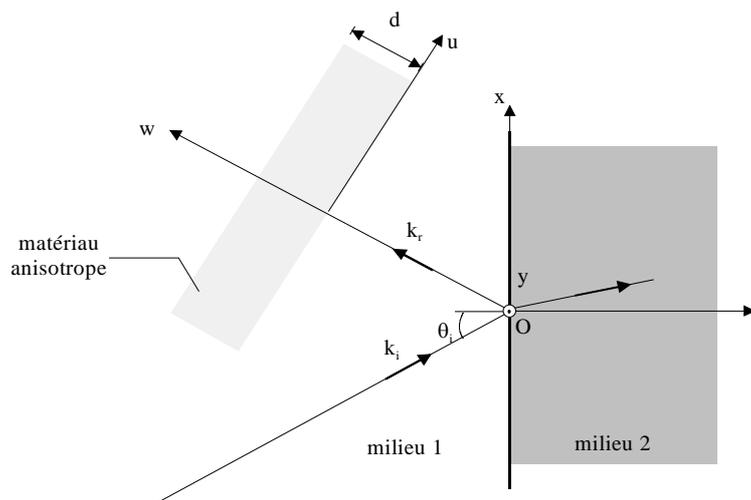


Figure 3

CORRIGE

EXERCICE

1- $\vec{E}(x, y, t) = [E_x(x, y, t) \quad E_y(x, y, t) \quad 0]^T$

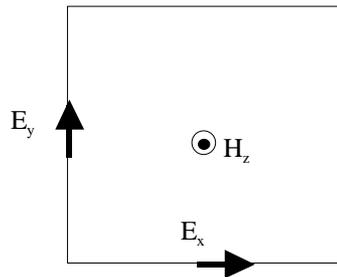
$\vec{H}(x, y, t) = [0 \quad 0 \quad H_z(x, y, t)]^T$

2- $E_x^{n+1}(k, l) = E_x^n(k, l) + \frac{d_t}{\varepsilon} \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(k, l) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(k, l-1)}{d_y} \right]$

$E_y^{n+1}(k, l) = E_y^n(k, l) + \frac{d_t}{\varepsilon} \left[-\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(k, l) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(k-1, l)}{d_x} \right]$

$H_z^{n+\frac{1}{2}}(k, l) = H_z^{n-\frac{1}{2}}(k, l) + \frac{d_t}{\mu_0} \left\{ \frac{E_x^n(k, l+1) - E_x^n(k, l)}{d_y} - \frac{E_y^n(k+1, l) - E_y^n(k, l)}{d_x} \right\}$

3- Localisation des composantes de champ



4- Composantes E_x : $4 \times 5 = 20$

Composantes E_y : $5 \times 4 = 20$

Composantes H_z : $4 \times 4 = 16$

Soit au total 56 composantes.

5- Annulation des composantes pour:

$E_x(1,1), E_x(2,1), E_x(3,1), E_x(4,1)$

$E_x(1,5), E_x(2,5), E_x(3,5), E_x(4,5)$

$E_y(1,1), E_y(1,2), E_y(1,3), E_y(1,4)$

$E_y(5,1), E_y(5,2), E_y(5,3), E_y(5,4)$

6- Le pas de temps maximal est donné par le critère de stabilité:

$$d_{t_{\max}} = \frac{d_x}{c\sqrt{2}} = 2,357 \times 10^{-12} \text{ s}$$

d'où $N_{\min} = T/d_{t_{\max}} = 10^{-3}/2,357 \times 10^{-12} = 424.265.000$ itérations

PROBLEME

$$1- k_1 = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_0}$$

$$2- \vec{k}_i = k_1[\sin\theta_i\vec{e}_x + \cos\theta_i\vec{e}_z]$$

$$\vec{k}_r = k_1[\sin\theta_i\vec{e}_x - \cos\theta_i\vec{e}_z]$$

$$3- \vec{E}_i^{\text{TE}} = E_0\vec{e}_y \exp[-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)]$$

$$4- \vec{E}_i^{\text{TM}} = jE_0(\cos\theta_i\vec{e}_x - \sin\theta_i\vec{e}_z)\exp[-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)]$$

$$5- \vec{E}_i = E_0(\vec{e}_y + j\cos\theta_i\vec{e}_x - j\sin\theta_i\vec{e}_z)\exp[-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)]$$

On considère le repère $(0,x',y,z')$ défini par:

$$\vec{e}_z = -\sin\theta_i\vec{e}_{x'} + \cos\theta_i\vec{e}_{z'}$$

$$\vec{e}_x = \cos\theta_i\vec{e}_{x'} + \sin\theta_i\vec{e}_{z'}$$

$$z' = x\sin\theta_i + z\cos\theta_i$$

Il vient:

$$\vec{E}_i = E_0(\vec{e}_y + j\vec{e}_{x'})\exp(-jk_1z') \text{ ou encore } \vec{E}_i = E_0(\vec{e}_{x'} - j\vec{e}_y)\exp(-jk_1z')$$

La propagation se fait selon l'axe (O,z') vers les z' positifs. L'expression est caractéristique d'une polarisation circulaire droite.

$$6- \vec{E}_r = E_0(\Gamma_{\text{TE}}\vec{e}_y + j\Gamma_{\text{TM}}\cos\theta_i\vec{e}_x + j\Gamma_{\text{TM}}\sin\theta_i\vec{e}_z)\exp[-jk_1(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)]$$

7- On considère le repère $(0,x'',y,z'')$ défini par:

$$\vec{e}_z = \sin\theta_i\vec{e}_{x''} + \cos\theta_i\vec{e}_{z''}$$

$$\vec{e}_x = \cos\theta_i\vec{e}_{x''} - \sin\theta_i\vec{e}_{z''}$$

$$z'' = -x\sin\theta_i + z\cos\theta_i$$

Il vient:

$$\vec{E}_i = E_0(\Gamma_{\text{TE}}\vec{e}_y + j\Gamma_{\text{TM}}\vec{e}_{x''})\exp(+jk_1z'') \text{ ou encore } \vec{E}_i = E_0(\Gamma_{\text{TM}}\vec{e}_{x''} - j\Gamma_{\text{TE}}\vec{e}_y)\exp(+jk_1z'')$$

La propagation se fait selon l'axe (O,z'') vers les z'' négatifs. L'expression est caractéristique d'une polarisation elliptique (elle serait circulaire si Γ_{TE} était égal à Γ_{TM}). L'hélicité est gauche si Γ_{TE} et Γ_{TM} sont positifs.

8- Les équations de Maxwell rotationnelles dans le milieu anisotrope conduisent à :

$$-\frac{\partial}{\partial w} E_y(w) = -j\omega\mu_0 H_u(w)$$

$$\frac{\partial}{\partial w} E_u(w) = -j\omega\mu_0 H_y(w)$$

$$-\frac{\partial}{\partial w} H_y(w) = j\omega\varepsilon_1 E_u(w)$$

$$\frac{\partial}{\partial w} H_u(w) = j\omega\varepsilon_1 E_y(w) + \sigma_y E_y(w)$$

On en déduit:

$$\frac{\partial^2}{\partial w^2} E_y(w) = -k^2 E_y(w)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial w^2} E_u(w) = -k_0^2 \varepsilon_{r1} E_y(w)$$

$$\text{avec } k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1 - j\sigma_y \omega \mu_0$$

Il vient:

$$\alpha \approx \frac{\sigma_y}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}} \quad \text{et} \quad \beta \approx k_0 \sqrt{\varepsilon_{r1}}$$

9- Puisque Γ_{TE} est supérieur à Γ_{TM} , il faut atténuer la composante du champ selon y, ce que permet de faire la couche de matériau anisotrope. La constante de phase dans les deux directions étant la même, la quadrature de phase est conservée. Soit d l'épaisseur de la couche. L'amplitude des champs pour les deux polarisations linéaires orthogonales, à la sortie du milieu est:

$$|\Gamma_{TM}| \quad \text{et} \quad |\Gamma_{TE}| \exp\left(-\frac{\sigma_y}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}} d\right)$$

Pour avoir la même amplitude, il faut:

$$d = \frac{2}{\sigma_y} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} \ln\left(\left|\frac{\Gamma_{TE}}{\Gamma_{TM}}\right|\right)$$

Module : M3S9

Date du contrôle : mercredi 11 juin 2003

Durée : 2 heures

Responsable : Raphaël GILLARD

Documents autorisés : tous documents

EXERCICE n°1

On considère un milieu diélectrique uniaxial. On note (O,x) l'axe optique et ϵ_r la permittivité relative associée. La permittivité relative selon les directions y et z est supposée égale à 1. La perméabilité est μ_0 .

1- Donner l'expression du tenseur permittivité dans le milieu.

$$[\epsilon] = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2- Soit une onde plane harmonique de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_z$.

a) Donner la forme générale des champs complexes associés à cette onde (On se contentera à ce stade de préciser les composantes non nulles des champs électrique et magnétique).

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{bmatrix} E_x(z) \\ E_y(z) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \begin{bmatrix} H_x(z) \\ H_y(z) \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Etablir les équations scalaires vérifiées par ces composantes lorsque la propagation s'effectue dans le milieu anisotrope de la question 1 (en partant des équations de Maxwell rotationnelles).

$$-j \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{bmatrix} = -j\omega\mu_0 \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} -kE_y = \omega\mu_0 H_x \\ kE_x = \omega\mu_0 H_y \end{cases}$$

$$-j \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ 0 \end{bmatrix} = j\omega\epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} kH_y = \omega\epsilon_0\epsilon_r E_x \\ kH_x = -\omega\epsilon_0 E_y \end{cases}$$

c) En déduire les caractéristiques du milieu (nombre d'ondes et impédance) en considérant deux cas distincts :

- l'onde se propageant selon z est polarisée linéairement selon x
- l'onde se propageant selon z est polarisée linéairement selon y

Polarisation selon x : (E_x, H_y)

$$k = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r} = k_0\sqrt{\epsilon_r}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_r}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Polarisation selon y : (E_y, H_x)

$$k = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = k_0$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \eta_0$$

3- On considère une onde plane, en régime harmonique. L'onde se propage selon l'axe z, vers les z positifs et est polarisée circulairement à gauche. La propagation s'effectue dans l'air (ϵ_0, μ_0).

a) Etablir l'expression du champ électrique complexe. On notera E_0 l'amplitude du champ et on choisira la phase de E_x nulle en $z=0$.

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + j\vec{e}_y) \exp(-jk_0 z)$$

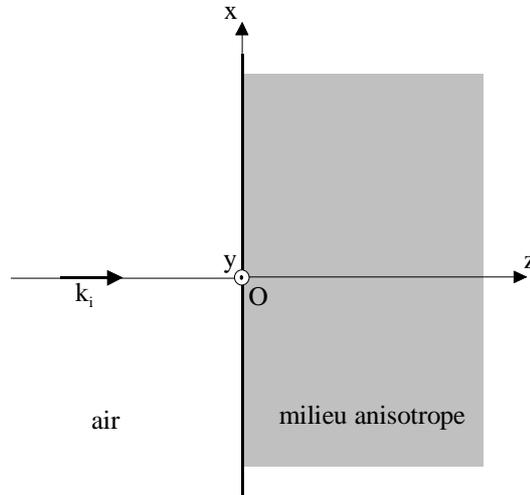
b) Donner l'expression du champ magnétique complexe associé.

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\eta_0} \vec{e}_z \times \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{\eta_0 \sqrt{2}} (\vec{e}_y - j\vec{e}_x) \exp(-jk_0 z)$$

c) En déduire le vecteur de Poynting complexe.

$$\vec{R}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}^*(\vec{r}, t) = \frac{1}{4} \frac{E_0^2}{\eta_0} (\vec{e}_x + j\vec{e}_y) \times (\vec{e}_y + j\vec{e}_x) = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta_0} \vec{e}_z$$

- 4- On considère une interface plane entre l'air et le milieu anisotrope de la question 1. L'interface est confondue avec le plan (O,x,y). L'onde définie à la question 2 est incidente sur cette interface.



- a) Etablir l'expression des champs électrique et magnétique réfléchis.
Composante du champ polarisé selon x

$$\vec{E}_{\text{inc}}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \vec{e}_x \exp(-jk_0 z)$$

$$\vec{H}_{\text{inc}}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{\eta_0 \sqrt{2}} \vec{e}_y \exp(-jk_0 z)$$

$$\vec{E}_{\text{ref}}(\vec{r}, t) = \Gamma_x \frac{E_0}{\sqrt{2}} \vec{e}_x \exp(+jk_0 z)$$

$$\vec{H}_{\text{ref}}(\vec{r}, t) = -\frac{\Gamma_x E_0}{\eta_0 \sqrt{2}} \vec{e}_y \exp(+jk_0 z)$$

$$\Gamma_x = \frac{\frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} - \eta_0}{\frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} + \eta_0} = \frac{1 - \sqrt{\epsilon_r}}{1 + \sqrt{\epsilon_r}}$$

Composante du champ polarisé selon y

$$\vec{E}_{\text{inc}}(\vec{r}, t) = j \frac{E_0}{\sqrt{2}} \vec{e}_y \exp(-jk_0 z)$$

$$\vec{H}_{\text{inc}}(\vec{r}, t) = -j \frac{E_0}{\eta_0 \sqrt{2}} \vec{e}_x \exp(-jk_0 z)$$

$$\vec{E}_{\text{ref}}(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

$$\vec{H}_{\text{ref}}(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

$$\Gamma_y = 0$$

b) Etablir l'expression des champs électrique et magnétique transmis.

Composante du champ polarisé selon x

$$\vec{E}_{\text{trans}}(\vec{r}, t) = T_x \frac{E_0}{\sqrt{2}} \vec{e}_x \exp(-jk_0 \sqrt{\epsilon_r} z)$$

$$\vec{H}_{\text{trans}}(\vec{r}, t) = T_x \frac{E_0}{\eta_0 \sqrt{2}} \sqrt{\epsilon_r} \vec{e}_y \exp(-jk_0 \sqrt{\epsilon_r} z)$$

$$T_x = \frac{2 \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}}}{\frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} + \eta_0} = \frac{2}{1 + \sqrt{\epsilon_r}}$$

Composante du champ polarisé selon y

$$\vec{E}_{\text{trans}}(\vec{r}, t) = jT_y \frac{E_0}{\sqrt{2}} \vec{e}_y \exp(-jk_0 z)$$

$$\vec{H}_{\text{trans}}(\vec{r}, t) = -jT_y \frac{E_0}{\eta_0 \sqrt{2}} \vec{e}_x \exp(-jk_0 z)$$

$$T_y = 1$$

N.B. : il est conseillé dans cette question de décomposer le champ incident sur deux polarisations linéaires orthogonales (selon x et y). On distinguera les deux coefficients de réflexion et de transmission correspondants : Γ_x , Γ_y , T_x et T_y .

5- Discuter la polarisation des champs réfléchi et transmis

a) dans le cas général

Le champ réfléchi est polarisé linéairement selon x et le champ transmis est polarisé elliptiquement.

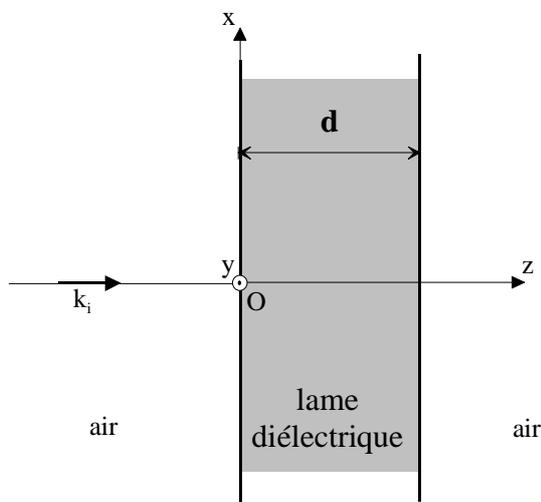
b) dans le cas où $\epsilon_r \gg 1$

Le champ réfléchi est polarisé linéairement selon x et le champ transmis est polarisé linéairement selon y.

EXERCICE n°2

Soit une lame de diélectrique de permittivité ϵ_r et d'épaisseur d placée dans l'air (ϵ_0, μ_0).

On considère une onde plane harmonique, à la pulsation $\omega=2\pi f$, issue de l'air et arrivant sur la lame, sous incidence normale.



- 1- Donner l'expression de k , nombre d'onde dans la lame en fonction de f , de c (vitesse de la lumière) et de ϵ_r .

$$k = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\epsilon_r}$$

- 2- Donner l'expression du coefficient de réflexion Γ_{12} sur l'interface air/lame en fonction de ϵ_r .

$$\Gamma_{12} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \eta_0 - \eta_0}{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \eta_0 + \eta_0} = \frac{1 - \sqrt{\epsilon_r}}{1 + \sqrt{\epsilon_r}}$$

- 3- Donner l'expression du coefficient de transmission T_{12} à l'interface air/lame en fonction de Γ_{12} puis de ϵ_r .

$$T_{12} = 1 + \Gamma_{12} = \frac{2}{1 + \sqrt{\epsilon_r}}$$

- 4- Donner l'expression du coefficient de réflexion Γ_{21} sur l'interface lame/air en fonction de Γ_{12} puis de ϵ_r .

$$\Gamma_{12} = -\Gamma_{21} = \frac{\sqrt{\epsilon_r} - 1}{\sqrt{\epsilon_r} + 1}$$

- 5- Donner l'expression du coefficient de transmission T_{21} à l'interface lame/air en fonction de Γ_{12} puis de ϵ_r .

$$T_{12} = 1 + \Gamma_{21} = 1 - \Gamma_{12} = \frac{2\sqrt{\epsilon_r}}{1 + \sqrt{\epsilon_r}}$$

- 6- En déduire l'expression du coefficient de réflexion total Γ sur la lame en fonction de Γ_{12} , de k et de d .

$$\Gamma = \Gamma_{12} + T_{21}\Gamma_{21}T_{12}e^{-j2kd} + T_{21}(\Gamma_{21}^2e^{-j2kd})\Gamma_{21}T_{12}e^{-j2kd} + T_{21}(\Gamma_{21}^2e^{-j2kd})(\Gamma_{21}^2e^{-j2kd})\Gamma_{21}T_{12}e^{-j2kd} + \dots$$

$$\Gamma = \Gamma_{12} + T_{21}T_{12}\Gamma_{21}e^{-j2kd} \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_{21}^2e^{-j2kd})^n$$

$$\Gamma = \Gamma_{12} + \frac{T_{21}T_{12}\Gamma_{21}e^{-j2kd}}{1 - \Gamma_{21}^2e^{-j2kd}}$$

$$\Gamma = \Gamma_{12} - \frac{(1 + \Gamma_{12})(1 - \Gamma_{12})\Gamma_{12}e^{-j2kd}}{1 - \Gamma_{12}^2e^{-j2kd}}$$

$$\Gamma = \Gamma_{12} - \frac{(1 - \Gamma_{12}^2)\Gamma_{12}e^{-j2kd}}{1 - \Gamma_{12}^2e^{-j2kd}}$$

$$\Gamma = \Gamma_{12} \left[1 - \frac{(1 - \Gamma_{12}^2)e^{-j2kd}}{1 - \Gamma_{12}^2e^{-j2kd}} \right]$$

$$\Gamma = \Gamma_{12} \left[\frac{1 - e^{-j2kd}}{1 - \Gamma_{12}^2e^{-j2kd}} \right]$$

- 7- Déduire également l'expression du coefficient de transmission T d'un côté de la lame à l'autre en fonction de Γ_{12} , de k et de d .

$$T = T_{21} T_{12} e^{-jkd} + T_{21} (\Gamma_{21}^2 e^{-j2kd}) \Gamma_{12} e^{-jkd} + T_{21} (\Gamma_{21}^2 e^{-j2kd}) (\Gamma_{21}^2 e^{-j2kd}) \Gamma_{12} e^{-jkd} + \dots$$

$$T = T_{21} T_{12} e^{-jkd} \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_{21}^2 e^{-j2kd})^n$$

$$T = \frac{T_{21} T_{12} e^{-jkd}}{1 - \Gamma_{21}^2 e^{-j2kd}}$$

$$T = \frac{(1 - \Gamma_{12}^2) e^{-jkd}}{1 - \Gamma_{12}^2 e^{-j2kd}}$$

- 8- Déterminer les valeurs de d permettant d'annuler la réflexion sur la lame, en fonction c , f et ϵ_r .

$$1 = e^{-j2kd}$$

$$2 \frac{2\pi}{\lambda} d = 2n\pi$$

$$d = n \frac{\lambda}{2} = n \frac{c}{2f\sqrt{\epsilon_r}}$$

- 9- Que devient alors le coefficient de transmission?

$$T = \frac{(1 - \Gamma_{12}^2) e^{-jkd}}{1 - \Gamma_{12}^2} = \pm 1$$

- 10- On considère dans la suite une onde de type TM incidente sur la lame diélectrique.

- a) Donner l'expression de Γ_{12} pour cette nouvelle configuration (en fonction de ϵ_r et θ_i l'angle d'incidence).

$$\Gamma_{12} = \frac{\sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta_i} - \epsilon_r \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}}{\sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta_i} + \epsilon_r \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}}$$

- b) Exprimer Γ_{21} , T_{12} et T_{21} en fonction de Γ_{12} et de ϵ_r .

$$\Gamma_{21} = -\Gamma_{12}$$

$$T_{12} = \frac{\eta_2}{\eta_1} (1 - \Gamma_{12}) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} (1 - \Gamma_{12})$$

$$T_{21} = \frac{\eta_1}{\eta_2} (1 - \Gamma_{21}) = \sqrt{\epsilon_r} (1 + \Gamma_{12})$$

- c) Calculer le coefficient de réflexion total Γ en fonction de Γ_{12} , k , d et θ_t , l'angle de réfraction.

$$\Gamma = \Gamma_{12} + \frac{T_{21}T_{12}\Gamma_{21}e^{-j\phi}}{1 - \Gamma_{21}^2e^{-j\phi}}$$

$$\Gamma = \Gamma_{12} \left[\frac{1 - e^{-j\phi}}{1 - \Gamma_{12}^2 e^{-j\phi}} \right]$$

avec $\phi = 2kd \cos \theta_t$

- d) Montrer qu'il existe deux façons différentes d'annuler le coefficient de réflexion total. Discuter les avantages et inconvénients de chacune.

On peut soit annuler Γ_{12} , c'est-à-dire choisir une incidence égale à l'angle de Brewster, soit choisir $1 = e^{-j\phi}$.

La première méthode n'est valable que pour une valeur particulière de l'incidence. La seconde méthode est sélective en fréquence.

Module : M3S9

Date du contrôle : **lundi 7 juin 2004**

Durée : **2 heures**

Responsable : **Raphaël GILLARD**

Documents autorisés : **tous documents**

EXERCICE (8pts)

On considère le champ électrique complexe, en régime harmonique, à la pulsation ω :

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 (\vec{e}_x + j\vec{e}_y) \exp[+j(k_0 z + \phi_0)]$$

où E_0 , k_0 et ϕ_0 sont des coefficients réels.

L'onde se propage dans le vide.

- 1- Indiquer la direction et le sens de propagation de l'onde.
- 2- Donner l'expression du champ électrique réel $\vec{E}(\vec{r}, t)$.
- 3- En déduire la polarisation de l'onde.
- 4- Donner l'expression du champ magnétique complexe.
- 5- Calculer le vecteur de Poynting complexe.
- 6- Calculer le flux de puissance électromagnétique (flux moyen sur une période) à travers une surface d'aire S et de normale $-\vec{e}_z$.

PROBLEME (12pts)

On considère une onde plane électromagnétique en régime harmonique à la pulsation ω . Le champ électrique est polarisé selon y . Son amplitude est égale à E_0 (coefficient réel positif) et sa phase est choisie nulle à l'origine O du repère. La propagation s'effectue dans l'air (ϵ_0, μ_0).

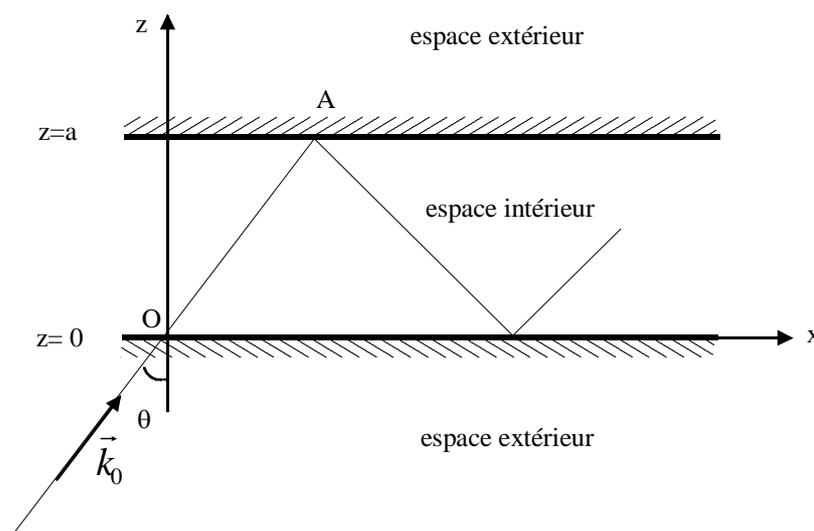
- 1- On note $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$, le vecteur d'onde. Compte-tenu des caractéristiques de l'onde considérée, déduire un maximum de propriétés des composantes du vecteur d'onde.

- 2- Donner l'expression du champ électrique, dans le repère cartésien (O,x,y,z) , en fonction de E_0 et des composantes non nulles de \vec{k} .

On considère deux interfaces planes situées en $z=0$ et en $z=a$. L'espace compris entre les deux interfaces ($0 < z < a$) est appelé espace intérieur. L'espace situé en amont de la première interface ($z < 0$) ou en aval de la seconde ($z > a$) est appelé espace extérieur. Le milieu ambiant (pour les espaces intérieur et extérieur) est constitué d'air (ϵ_0, μ_0). Les deux interfaces ont la propriété suivante : elles sont transparentes pour toute onde se propageant du milieu extérieur vers le milieu intérieur ; elles sont partiellement réfléchissantes pour une onde se propageant du milieu intérieur vers le milieu extérieur. On note dans ce cas Γ le coefficient de réflexion défini dans le plan de l'interface, et on le suppose indépendant de l'angle d'incidence.

On considère l'onde de la première partie (questions 1 et 2) incidente sur l'interface située en $z=0$. L'angle d'incidence est noté θ (voir figure). L'objectif des questions 3 à 10 est d'établir progressivement l'expression générale du champ dans le milieu intérieur, en considérant les réflexions multiples entre les deux interfaces. En cas de blocage, il est possible de reprendre l'exercice à la question 11 en utilisant le résultat donné dans la question 10.

- 3- Etablir l'expression du champ électrique incident (noté \vec{E}_1^{inc}) en tout point de l'espace intérieur en fonction de E_0 , k_0 et θ (Rappel : l'interface située en $z=0$ est supposée transparente pour l'onde issue de l'espace extérieur).



- 4- En déduire l'expression de \vec{E}_1^{inc} en A, le point de coordonnées $x=atan \theta$ et $z=a$. L'expression sera donnée en fonction de E_0 , k_0 , a et de $\cos \theta$.

- 5- Donner la forme générale du champ électrique produit par la première réflexion (sur l'interface situé en $z=a$). On notera \vec{E}_1^{ref} ce champ et on le définira pour tout point de l'espace intérieur en fonction de k_0 , θ et d'un coefficient arbitraire complexe noté G .
- 6- Déterminer G en fonction de Γ , E_0 , k_0 , a et de $\cos \theta$ en exprimant la relation entre \vec{E}_1^{inc} et \vec{E}_1^{ref} au point A.
- 7- En déduire l'expression précise de \vec{E}_1^{ref} en tout point de l'espace intérieur en fonction de Γ , E_0 , k_0 , a et θ .
- 8- Expliquer pourquoi le champ réfléchi observé en O est déphasé de $-2k_0 a \cos \theta$ par rapport au champ incident (en plus du déphasage éventuellement apporté par Γ).
- 9- Donner l'expression du champ issu de la seconde réflexion (réflexion de \vec{E}_1^{ref} sur l'interface située en $z=0$). On notera \vec{E}_2^{inc} ce champ et on l'exprimera en tout point de l'espace intérieur en fonction de Γ , E_0 , k_0 , a et θ .
- 10- Déduire des calculs précédents que le champ total dans l'espace intérieur peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{E}^{tot} = E_0' \exp[-jk_0 x \sin \theta] \{ \exp[-jk_0(z-a)\cos \theta] + \Gamma \exp[+jk_0(z-a)\cos \theta] \}$$
 où E_0' est un coefficient complexe (incluant notamment une série géométrique).
- 11- Dans l'hypothèse où les interfaces se comportent comme des parois métalliques parfaites pour l'onde circulant dans l'espace intérieur, simplifier l'expression du champ électrique total (N.B. : on traitera E_0' comme un coefficient arbitraire sans se préoccuper de la convergence de la série).
- 12- En déduire la condition à vérifier sur $k_z = k_0 \cos \theta$ pour assurer le respect des conditions limites sur les interfaces (assimilées à des parois métalliques).

EXERCICE

1-

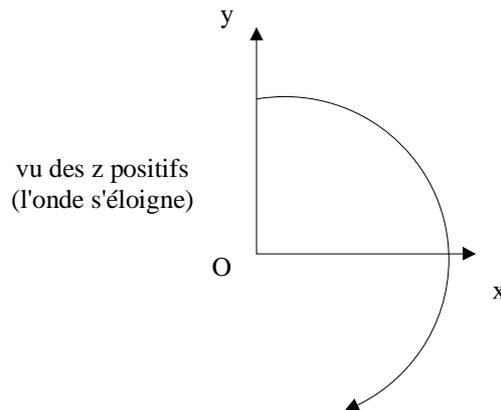
L'onde se propage selon l'axe (O,z) car la phase varie en fonction de z. La propagation se fait vers les z négatifs (+jk₀z).

2-

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re e \left\{ E_0 \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ 0 \end{bmatrix} \exp j(k_0 z + \omega t + \phi_0) \right\} = E_0 \begin{bmatrix} \cos(k_0 z + \omega t + \phi_0) \\ -\sin(k_0 z + \omega t + \phi_0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

3-

L'onde est polarisée circulairement. Pour un observateur voyant l'onde s'approcher (cas inverse de la figure), le champ tourne dans le sens trigonométrique : l'hélicité est donc droite.



4-

Le champ magnétique est donnée par :

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\eta_0} (-\vec{e}_z) \times \vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{E_0}{\eta_0} (-\vec{e}_z) \times (\vec{e}_x + j\vec{e}_y) \exp[+j(k_0 z + \phi_0)]$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{E_0}{\eta_0} (-\vec{e}_y + j\vec{e}_x) \exp[+j(k_0 z + \phi_0)]$$

5-

$$\vec{R}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})$$

$$\vec{R}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta_0} (\vec{e}_x + j\vec{e}_y) \times (-\vec{e}_y + j\vec{e}_x)^* = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\eta_0} (\vec{e}_x + j\vec{e}_y) \times (-\vec{e}_y - j\vec{e}_x)$$

$$\boxed{\vec{R}(\vec{r}) = \frac{E_0^2}{\eta_0} (-\vec{e}_z)}$$

6-

$$\boxed{P = \frac{E_0^2}{\eta_0} S}$$

PROBLEME

1-

Champ polarisé selon y : le vecteur d'onde (perpendiculaire au champ électrique) n'a pas de composante selon y :

$$\boxed{k_y = 0}$$

Propagation dans l'air :

$$\boxed{k_x^2 + k_y^2 = k_0^2}$$

2-

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \vec{e}_y \exp[-j(k_x x + k_z z)]}$$

3-

$$\boxed{\vec{E}_1^{inc} = E_0 \vec{e}_y \exp[-jk_0(x \sin \theta + z \cos \theta)]}$$

4-

En A : $z = a$; $x = a \tan \theta$

$$\vec{E}_1^{inc}(A) = E_0 \vec{e}_y \exp\left[-jk_0 a \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \cos \theta\right)\right]$$

$$\boxed{\vec{E}_1^{inc}(A) = E_0 \vec{e}_y \exp\left[-jk_0 a \left(\frac{1}{\cos \theta}\right)\right]}$$

5-

$$\boxed{\vec{E}_1^{ref} = G \vec{e}_y \exp[-jk_0(x \sin \theta - z \cos \theta)]}$$

6-

$$\vec{E}_1^{ref}(A) = G\vec{e}_y \exp\left[-jk_0 a \left(\frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\cos \theta}\right)\right]$$

$$\vec{E}_1^{ref}(A) = G\vec{e}_y \exp\left[-jk_0 a \left(\frac{2\sin^2 \theta - 1}{\cos \theta}\right)\right]$$

$$\vec{E}_1^{ref}(A) = G\vec{e}_y \exp\left[-jk_0 a \left(\frac{-\cos 2\theta}{\cos \theta}\right)\right]$$

$$G \exp\left[jk_0 a \left(\frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}\right)\right] = \Gamma E_0 \exp\left[-jk_0 a \left(\frac{1}{\cos \theta}\right)\right]$$

$$G = \Gamma E_0 \exp\left[-jk_0 a \left(\frac{1}{\cos \theta}\right) - jk_0 a \left(\frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}\right)\right] = \Gamma E_0 \exp\left[-jk_0 a \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{\cos \theta}\right)\right]$$

$$= \Gamma E_0 \exp\left[-jk_0 a \left(\frac{2\cos^2 \theta}{\cos \theta}\right)\right] = \Gamma E_0 \exp[-jk_0 a 2 \cos \theta]$$

$$\boxed{G = \Gamma E_0 \exp[-jk_0 a 2 \cos \theta]}$$

7-

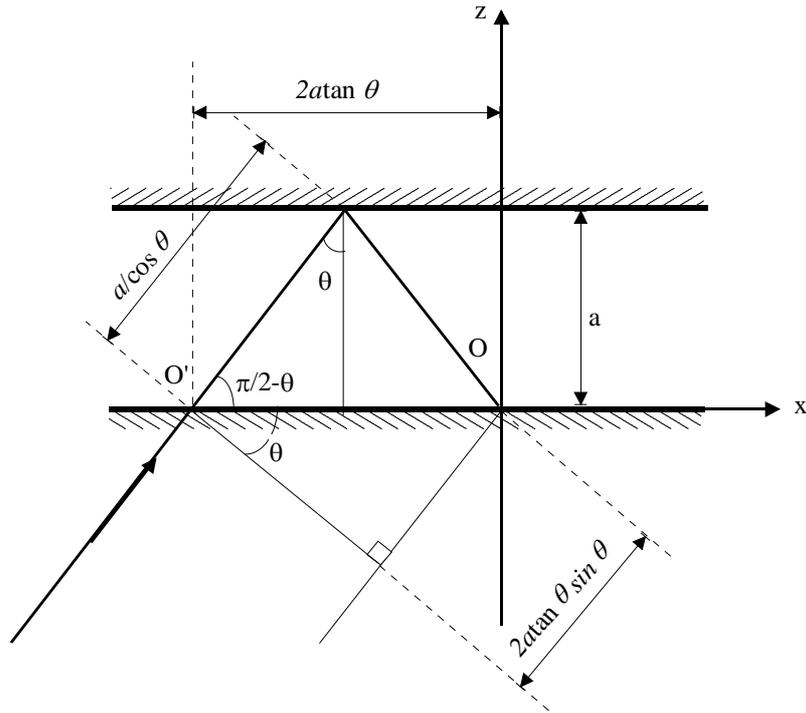
$$\boxed{\vec{E}_1^{ref} = \Gamma E_0 \exp[-jk_0 a 2 \cos \theta] \vec{e}_y \exp[-jk_0 (x \sin \theta - z \cos \theta)]}$$

8-

Par convention, on sait que la phase de l'onde incidente en O est nulle. L'onde réfléchie arrivant en O a parcouru une distance égale à $2a/\cos \theta$ dans le milieu intérieur. Elle accuse donc un retard de $2ak_0/\cos \theta$ par rapport à l'onde incidente en O'. Par contre, celle-ci est en avance de $2ak_0 \tan \theta \sin \theta$ par rapport à l'onde incidente en O. Au final, la phase de l'onde réfléchie en O (par rapport à l'onde incidente au même point) est :

$$\Delta\phi = -\frac{2ak_0}{\cos \theta} + 2ak_0 \tan \theta \sin \theta = 2ak_0 \frac{-1 + \sin^2 \theta}{\cos \theta} = 2ak_0 \frac{-\cos^2 \theta}{\cos \theta}$$

$$\boxed{\Delta\phi = -2ak_0 \cos \theta}$$



N.B : ce calcul ne concerne que la différence de marche ; il convient en plus d'ajouter le déphasage apporté par le coefficient de réflexion.

Solution plus directe :

On ne considère que la résultante de la propagation selon la direction z (problème de ligne de transmission équivalente). La constante de propagation est $k_z = k_0 \cos \theta$ et la distance parcourue est $2a$. Le résultat est immédiat.

9.

1^{ère} solution

en B :

$$z = 0; \quad x = 2a \tan \theta$$

$$\vec{E}_1^{ref} = \Gamma E_0 \vec{e}_y \exp[-jk_0 2a(\cos \theta + \tan \theta \sin \theta)] = \Gamma E_0 \vec{e}_y \exp\left[-jk_0 2a\left(\cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}\right)\right]$$

$$= \Gamma E_0 \vec{e}_y \exp\left[-jk_0 2a\left(\frac{1}{\cos \theta}\right)\right]$$

$$\vec{E}_2^{inc} = G \vec{e}_y \exp[-jk_0(x \sin \theta + z \cos \theta)]$$

$$\vec{E}_2^{inc}(B) = G \vec{e}_y \exp[-jk_0(2a \tan \theta \sin \theta)]$$

$$G \exp[-jk_0(2a \tan \theta \sin \theta)] = \Gamma^2 E_0 \exp\left[-jk_0 2a\left(\frac{1}{\cos \theta}\right)\right]$$

$$G = \Gamma^2 E_0 \exp\left[-jk_0 2a \left(\frac{1}{\cos \theta} - \tan \theta \sin \theta\right)\right] = \Gamma^2 E_0 \exp\left[-jk_0 2a \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}\right)\right]$$

$$= \Gamma^2 E_0 \exp[-jk_0 2a \cos \theta]$$

$$\boxed{\vec{E}_2^{inc} = \Gamma^2 E_0 \exp(-jk_0 2a \cos \theta) \vec{e}_y \exp[-jk_0 (x \sin \theta + z \cos \theta)]}$$

2^{ème} solution (en se ramenant en O) :

$$\vec{E}_1^{ref}(O) = \Gamma E_0 \exp[-jk_0 a 2 \cos \theta] \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_2^{inc} = G \vec{e}_y \exp[-jk_0 (x \sin \theta + z \cos \theta)]$$

$$\vec{E}_2^{inc}(O) = G \vec{e}_y$$

$$G = \Gamma^2 E_0 \exp[-jk_0 a 2 \cos \theta]$$

$$\boxed{\vec{E}_2^{inc} = \Gamma^2 E_0 \exp(-jk_0 2a \cos \theta) \vec{e}_y \exp[-jk_0 (x \sin \theta + z \cos \theta)]}$$

10-

On peut alors reprendre l'étape 1 en remplaçant

$$E_0 \text{ par } \Gamma^2 E_0 \exp(-jk_0 2a \cos \theta)$$

Il vient

$$\vec{E}_2^{ref} = \Gamma^3 E_0 \exp(-jk_0 4a \cos \theta) \vec{e}_y \exp[-jk_0 (x \sin \theta - z \cos \theta)]$$

Et par suite

$$\vec{E}_3^{inc} = \Gamma^4 E_0 \exp(-jk_0 4a \cos \theta) \vec{e}_y \exp[-jk_0 (x \sin \theta + z \cos \theta)]$$

Finalement :

$$\vec{E}^{inc} = E_0 \exp[-jk_0 (x \sin \theta + z \cos \theta)] \left\{ 1 + \Gamma^2 \exp(-jk_0 2a \cos \theta) + [\Gamma^2 \exp(-jk_0 2a \cos \theta)]^2 + \dots \right\}$$

$$\vec{E}^{ref} = \Gamma E_0 \exp(-jk_0 2a \cos \theta) \exp[-jk_0 (x \sin \theta - z \cos \theta)] \left\{ 1 + \Gamma^2 \exp(-jk_0 2a \cos \theta) + [\Gamma^2 \exp(-jk_0 2a \cos \theta)]^2 + \dots \right\}$$

En notant A le terme entre accolades, on a:

$$\boxed{\vec{E}^{tot} = A \exp(-jk_0 a \cos \theta) E_0 \left\{ \exp[-jk_0 (x \sin \theta + z \cos \theta)] \exp(+jk_0 a \cos \theta) + \right.}$$

$$\left. \Gamma \exp[-jk_0 (x \sin \theta - z \cos \theta)] \exp(-jk_0 a \cos \theta) \right\}}$$

11-

Pour $\Gamma = -1$, on a :

$$\vec{E}^{tot} = AE_0 \exp(-jk_0 a \cos \theta) \exp(-jk_0 x \sin \theta) \{ \exp[-jk_0 \cos \theta (z - a)] - \exp[+jk_0 \cos \theta (z - a)] \}$$

$$\boxed{\vec{E}^{tot} = -2jAE_0 \exp(-jk_0 a \cos \theta) \exp(-jk_0 x \sin \theta) \sin[k_0 (z - a) \cos \theta]}$$

12-

Le champ total s'annule bien en $z=a$ ainsi qu'en $z=0$ si :

$$k_0 a \cos \theta = n\pi \Rightarrow k_0 \cos \theta = k_z = \frac{n\pi}{a}$$