

Optimisation locale et globale

Rodolphe Le Riche^{1,3}, Stéphane Mottelet², Eric Touboul¹

¹ Ecole des Mines de Saint-Etienne

² Université de Technologie de Compiègne

³ CNRS

2010



Sommaire

I	Préambule et généralités sur l'optimisation	5
I.1	Préambule	6
I.2	Motivations	11
	Exemples du chapitre I	22
I.3	Formulations des problèmes d'optimisation	26
I.4	Généralités sur les optimiseurs	33
II	Notions fondamentales d'optimisation convexe	39
II.1	Formes quadratiques	40
II.2	Rappels de calcul différentiel	46
II.3	Notions sur la convexité	52
II.4	Résultats d'existence et d'unicité	60
II.5	Conditions nécessaires d'optimalité en l'absence de contraintes	64
	Exemples du chapitre II	68
	Exercices du chapitre II	77

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)



III	Les méthodes de gradient	82
III.1	Les méthodes de descente	83
III.2	Les méthodes de gradient	86
	Exemples du chapitre III	91
IV	La méthode du gradient conjugué	95
IV.1	Introduction	96
IV.2	La méthode du gradient conjugué	102
IV.3	Interprétation de la méthode du gradient conjugué	108
	Exemples du chapitre IV	115
V	Méthodes de recherche linéaire	119
V.1	introduction	120
V.2	Caractérisation de l'intervalle de sécurité	123
VI	Méthodes de Quasi-Newton	135
VI.1	Introduction	136
VI.2	Les méthodes de quasi-Newton	141
VI.3	Méthodes spécifiques pour les problèmes de moindres carrés	156
	Exemples du chapitre VI	160
VII	Conditions d'optimalité en optimisation avec contraintes	163
VII.1	Les conditions de Lagrange	164
VII.2	Les conditions de Kuhn et Tucker	176
VII.3	Exemples de problèmes	183
VII.4	Conditions suffisantes d'optimalité	190

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VIII	Méthodes primales	196
VIII.1	Contraintes d'égalité linéaires	197
VIII.2	Contraintes d'inégalité linéaires	204
VIII.3	Méthodes de pénalisation	208
VIII.4	Méthodes par résolution des équations de Kuhn et Tucker	216
	Exemples du chapitre VIII	222
IX	Méthodes utilisant la notion de dualité	225
IX.1	Elements sur la dualité	226
IX.2	Methodes duales	232
	Exemples du chapitre IX	236
X	Méthodes d'optimisation globale	238
X.1	Généralités sur l'optimisation globale	239
X.2	La méthode DIRECT	241
X.3	La méthode EGO	243
X.4	La méthode CMA-ES	245

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Chapitre I

Préambule et généralités sur l'optimisation

I.1	Préambule	6
I.2	Motivations	11
	Exemples du chapitre I	22
I.3	Formulations des problèmes d'optimisation	26
I.4	Généralités sur les optimiseurs	33

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

I.1 Préambule

I.1.1	Navigation par hyperliens	7
I.1.2	Remerciements	8
I.1.3	Historique du cours	9
I.1.4	Parcours possibles dans le cours	10

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

I.1.1 Navigation par hyperliens

Ce cours est réalisé en format pdf avec des renvois par hyperliens. Pour ne pas accroître inutilement le nombre de liens, la navigation par historique (e.g., revenir à la page lue précédemment) est laissée à la charge de votre lecteur de fichiers pdf. Il est donc conseillé de repérer cette fonction maintenant.

TODO Gregory : explication sur la lecture des scripts Scilab et des vidéos sur les différents systèmes d'exploitation.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

I.1.2 Remerciements

- Gregory Six (Ecole des Mines de Saint-Etienne) pour son aide dans la génération de ce cours.
- La Fondation UNIT qui a partiellement financé la rédaction de ce cours (convention no. 2009-20).

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

I.1.3 Historique du cours

- 2001 : cours de Stéphane Mottelet, “Optimisation Non Linéaire”, Université de Technologie de Compiègne (UTC).
- 2010 : fusion avec les cours d’Eric Touboul (optimisation locale) et Rodolphe Le Riche (optimisation globale), Ecole des Mines de Saint Etienne.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

I.1.4 Parcours possibles dans le cours

Voici quelques sous-parties du cours pouvant, parmi d'autres, constituer des cours d'optimisation donnés à partir de ce support.

Initiation à l'optimisation : [section formulations](#) → [section généralités](#) → [notions fondamentales d'optimisation convexe](#) → [méthodes de gradient](#) → [méthodes de quasi-Newton](#).

Optimisation non linéaire sous contraintes : comment traiter les contraintes d'optimisation. Les concepts introduits dans le parcours "initiation à l'optimisation" sont pré-requis. [Conditions d'optimalité avec contraintes](#) → [méthodes primales](#) → [méthodes duales](#)

Optimisation globale : Les concepts introduits dans le parcours "initiation à l'optimisation" sont pré-requis. [Optimisation locale vs. optimisation globale \(intro\)](#) → [Méthodes d'optimisation globales](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

I.2 Motivations

I.2.1	A quoi sert l'optimisation ?	12
I.2.2	Un exemple en régression non-linéaire	13
I.2.3	Un exemple de modélisation en mécanique	15
I.2.4	Le positionnement d'antennes : un exemple de conception optimale	18

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

I.2.1 A quoi sert l'optimisation ?

Cours :

[Formulation générale](#)

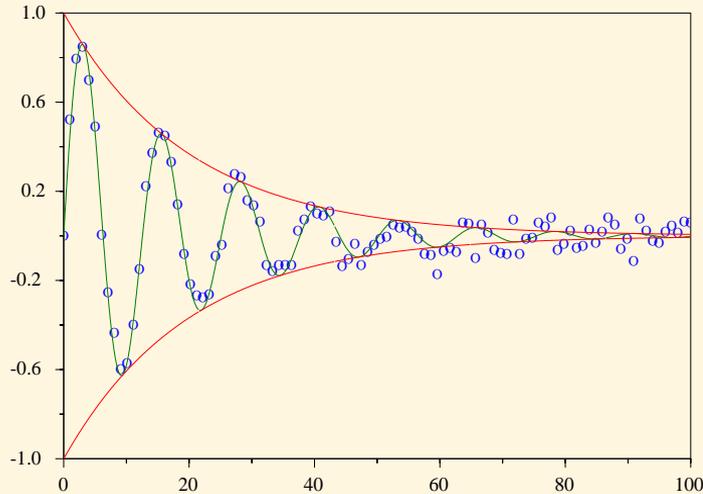
Optimisation = activité de minimiser, maximiser des fonctions en vérifiant des relations annexes. On peut distinguer trois grands usages.

1. La modélisation. Par exemple, la minimisation de l'énergie potentielle totale sert à trouver la position d'un système en mécanique. Cf. [Exemple de la position d'une corde](#).
2. La conception et le contrôle optimal : maximisation la performance d'un système sous des contraintes de résistance, qualité, fabrication, coût Cf. [Exemple du positionnement optimal des antennes dans la Loire](#).
3. L'identification : réglage des paramètres d'un modèle par minimisation de la distance entre ses réponses et des mesures expérimentales que le modèle est supposé reproduire. Cf. [Exemple d'identification par moindres carrés](#).

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

I.2.2 Un exemple en régression non-linéaire



On considère un problème d'identification des paramètres a, b, c et d d'un signal du type

$$y(t) = a \exp(-bt) \cos(ct + d),$$

à partir d'échantillons $[t_i, y_i]_{i=1\dots m}$ du signal $y(t)$ (ces échantillons sont représentés par les ronds sur la figure ci-dessus).

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

On propose de faire cette identification en minimisant la fonction

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (y_i - y(t_i))^2, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (y_i - a \exp(-bt_i) \cos(ct_i + d))^2. \end{aligned}$$

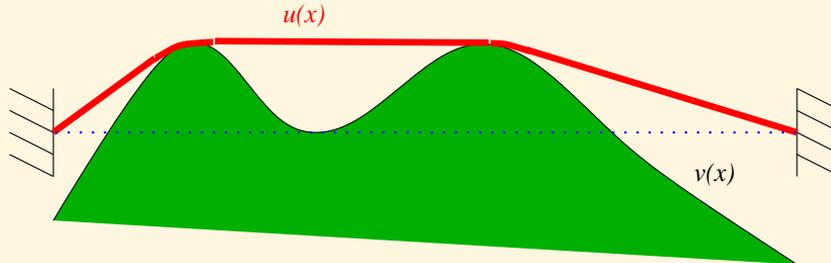
Le choix d'élever au carré la distance entre y_i et $y(t_i)$ est bien sûr arbitraire : on aurait pu prendre la valeur absolue, mais le carré permet d'obtenir une fonction f différentiable (ceci sera bien sûr clarifié dans la suite). Si nous n'ajoutons pas de conditions sur les paramètres a, b, c, d le problème posé est donc du type (P) , avec $x = [a, b, c, d]^T \in \mathbb{R}^4$. Ce problème est communément appelé un problème de moindres carrés (non linéaire).

Un exemple en régression non-linéaire

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

I.2.3 Un exemple de modélisation en mécanique



On considère une corde horizontale de longueur 1 tendue à ses deux extrémités, avec une tension τ . La déviation éventuelle de la corde par rapport à sa position d'équilibre est désignée par $u(x)$, pour $x \in [0, 1]$.

[Attention aux notations : nous utilisons dans cet exemple la notation usuelle de la mécanique où u est un déplacement et x une coordonnée spatiale. En optimisation par contre, x désigne les variables d'optimisation].

Les extrémités étant fixées, on aura toujours $u(0) = u(1) = 0$. On négligera le poids propre de la corde par rapport à la tension τ , cela permet d'affirmer qu'en l'absence d'action extérieure, la corde est au repos et on a donc $u(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$.

Supposons maintenant que la corde est écartée de sa position d'origine. Alors on peut montrer que l'énergie potentielle associée à cette déformation (supposée petite) est

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \tau \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx. \quad (\text{I.2.1})$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

En l'absence d'obstacle, la position de repos $u(x) = 0$ minimise cette énergie. Il peut alors être intéressant d'étudier un problème où un obstacle empêche la corde de prendre la position triviale $u(x) = 0$. Intuitivement, on voit bien que la corde va toucher l'obstacle en certains points, mais pas forcément en tous les points de l'intervalle $[0, 1]$ (cela va dépendre de la forme de l'obstacle)

Supposons par exemple que cet obstacle peut être représenté par une fonction $v(x) \geq 0$. Alors la présence de l'obstacle se traduit par la condition

$$u(x) \geq v(x), x \in]0, 1[. \quad (\text{I.2.2})$$

Si on veut connaître la déformation $u(x)$ de la corde lorsque l'obstacle est présent, on peut donc penser qu'il est raisonnable de considérer le problème

$$\begin{cases} \min_u \frac{1}{2} \int_0^1 \tau \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx, \\ u(0) = u(1) = 0, \\ u(x) \geq v(x), x \in]0, 1[. \end{cases} \quad (\text{I.2.3})$$

Il s'agit, techniquement parlant, d'un problème de calcul des variations, et donc l'inconnue est une fonction (la fonction $u(x)$). Il paraît donc pour l'instant impossible de le mettre sous forme standard. Cependant, on peut essayer de résoudre un problème approché, en utilisant la méthode des éléments finis :

Approximation avec la méthode des éléments finis

Puisque l'on est en dimension 1 d'espace, la méthode est très simple à mettre en oeuvre. D'une part, on discrétise l'intervalle $[0, 1]$: on considère les abscisses

$$x_k = \frac{k}{N}, k = 0 \dots N.$$

Un exemple de modélisation en mécanique

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

On considère le vecteur $U = [U_1, \dots, U_{N-1}]^\top$, ainsi que la fonction $u_N(x)$ définie par :

$$u_N(x_k) = U_k, u_N(0) = u_N(1) = 0, \text{ de plus } u_N \text{ est continue et affine par morceaux.}$$

On peut alors montrer que

$$E(u_N) = \frac{1}{2}U^\top AU,$$

où A est la matrice (définie positive)

$$A = \tau N^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut donc proposer la version approchée du problème (I.2.3) :

$$\begin{cases} \min_U \frac{1}{2}U^\top AU, \\ v(x_k) - U_k \leq 0, \quad k = 1 \dots N - 1. \end{cases} \quad (\text{I.2.4})$$

Il s'agit donc d'un problème se mettant assurément sous la forme (PCI). De plus la fonction $f(U) = \frac{1}{2}U^\top AU$ est assez particulière : il s'agit d'une forme quadratique (nous y reviendrons plus tard). La fonction g permettant d'exprimer les contraintes d'inégalité, définie par

$$g(U) = \begin{pmatrix} v(x_1) - U_1 \\ \vdots \\ v(x_{N-1}) - U_{N-1} \end{pmatrix},$$

est de plus *linéaire*. Nous aborderons des méthodes tenant compte de ces particularités.

Un exemple de modélisation en mécanique

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

I.2.4 Le positionnement d'antennes : un exemple de conception optimale

Cours :
[A quoi sert l'optimisation ?](#)

Exemples :
[Exemple I.1](#)

Une station de radio veut positionner son antenne émettrice de façon à couvrir une surface maximum dans un département donné. On suppose que le département est plan, et que la surface couverte par l'antenne est un disque de rayon donné (voir figure). Le problème revient à chercher la position d'un point P, centre d'un disque de rayon R, tel que la surface de l'intersection du disque et du département soit maximale.

On pourra généraliser le problème avec plusieurs antennes sur le département.

On demande d'écrire un programme en Scilab qui sera capable de :

- calculer automatiquement la position optimale de l'antenne
- visualiser le résultat, ou mieux, l'évolution des itérations y conduisant

Le rayon étant donné, l'aire S est déterminée par la position du centre P du cercle dans le plan. C'est un problème à deux dimension. Si on note (x,y) les coordonnées de P dans un repère, le problème revient à :

$$\min_{x,y} -S(x, y)$$

Ici, S n'est pas une fonction analytique. S(x,y) devra être calculé numériquement à partir de la donnée du contour du département et de la position du point P (cf. [notes sur le calcul de la surface d'un polygone](#)). Il en sera de même pour les gradients de S , et autres dérivées éventuellement nécessaires selon la méthode d'optimisation utilisée.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

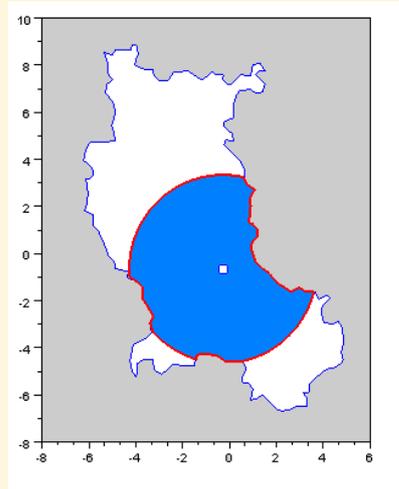


FIG. I.2.1 – Intersection disque/département

Dans ce problème en dimension 2, on peut facilement représenter les isovaleurs de la fonction coût. Celle-ci est relativement régulière à cause de la morphologie du département, et les techniques d'optimisation classique ne devaient rencontrer aucun problème particulier.

**Le positionnement
d'antennes :
un exemple de
conception
optimale**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

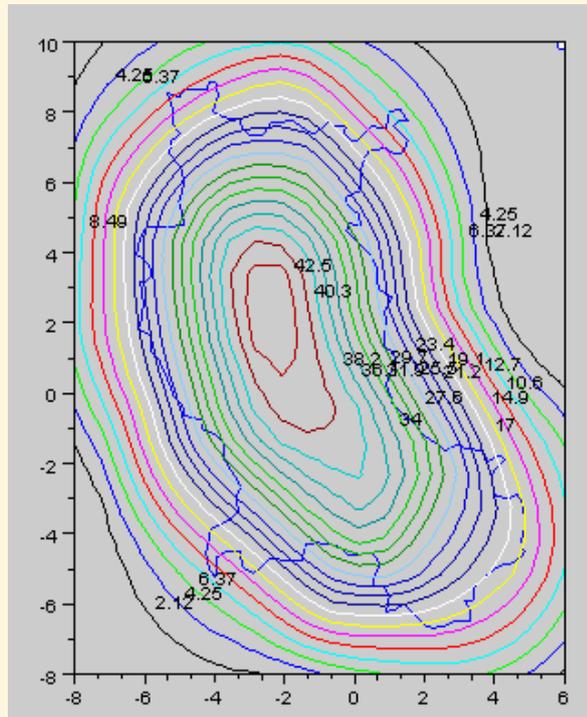


FIG. I.2.2 – Lignes de niveau de la fonction coût

**Le positionnement
d'antennes :
un exemple de
conception
optimale**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Le positionnement d'antennes : un exemple de conception optimale

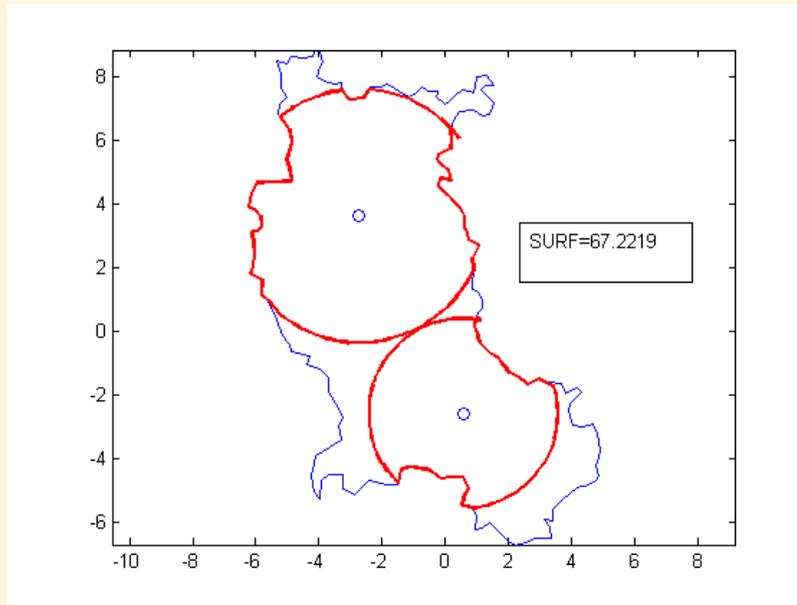


FIG. I.2.3 – Avec deux antennes. Contrainte : pas d'intersection des disques.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemples du chapitre I

I.1	Calcul de la surface d'un polygone	23
-----	--	----

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemple I.1 Calcul de la surface d'un polygone

Calcul numérique de la surface $S(x,y)$

Plusieurs méthodes numériques sont envisageables. Ce point n'étant pas au centre du sujet, nous proposons une méthode relativement simple et rapide, mais présentant quelques imprécisions. Le lecteur pourra de lui même développer une méthode plus performante. L'intérêt ici est d'avoir à optimiser une fonction "coût" obtenue par calcul numérique, comme c'est très souvent le cas dans la pratique. Soulignons que bien souvent cette fonction est relativement complexe et longue à évaluer informatiquement (par exemple : la fonction coût est obtenue par un calcul par éléments finis en mécanique), ce qui met en évidence l'intérêt d'obtenir une certaine rapidité de méthodes d'optimisation.

Calcul de la surface d'un polygone

Un polygone D (fermé, pas forcément convexe, mais suffisamment régulier - pas de recouvrement par exemple) étant donné par n points consécutifs, $(M_i)_{i=1\dots n}$, de coordonnées (x_i, y_i) son aire A peut être calculée comme une somme d'aires algébriques de triangles, à partir d'un point P quelconque.

Si les sommets du polygone sont numérotés dans le sens trigonométrique, comme sur la figure, l'aire du triangle $(P, M_i M_{i+1})$ sera positive si le on passe de $(PM_i$ à $PM_{i+1})$ en tournant dans le sens trigonométrique, c'est à dire si le déterminant de la matrice formée par les coordonnées en colonne des deux vecteurs dans l'ordre est positif. D'autre part, ce déterminant donne le double de l'aire algébrique, si bien que, si on ferme le polygone (ie : $M_i = M_{i+1}$), et si on note (x, y) les coordonnées du point P :

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)



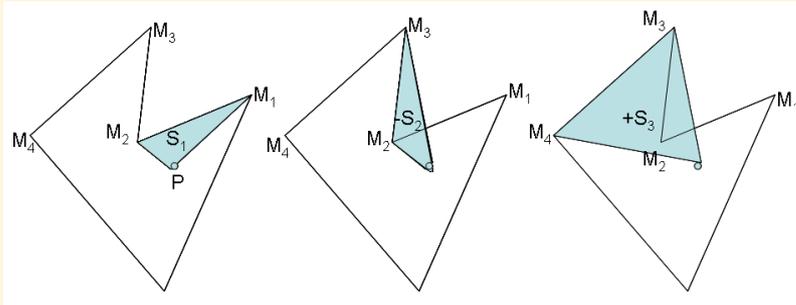
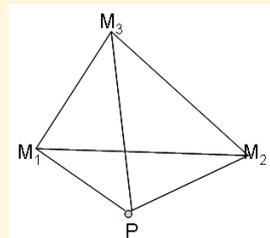


FIG. I.2.4 – Calcul de surface

$$A(D) = \frac{1}{2} \sum_{i=1,n} (x_i - x)(y_i - y)$$

Exemple pour un triangle et un point P extérieur :



Le lecteur se convaincra que les aires "négatives" contrebalancent exactement le "trop" d'aires

Exemple I.1
Calcul de la surface d'un polygone

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

positives provenant de la non convexité du polygone (si le point P est intérieur et le polygone convexe, toutes les aires algébriques sont positives).

Le département D sera considéré comme un polygone donné par les coordonnées de points consécutifs sur sa frontière, numérotés en tournant dans le sens trigonométrique : M_i et fermé.

Calcul numérique approché de la surface S

La surface $S(x,y)$ est la surface de l'intersection du disque de centre $P(x,y)$ et du polygone D (département). La méthode proposée ici pour l'approcher est de générer un polygone approchant l'intersection, puis de calculer la surface de ce polygone par la méthode précédemment décrite.

Pour approcher ce polygone, on considère chaque segment PM_i . Si $\|PM_i\| < R$, on garde le point M_i , sinon on le remplace par le point N_i tel que (voir figure) :

$$PN_i = R \frac{PM_i}{\|PM_i\|}$$

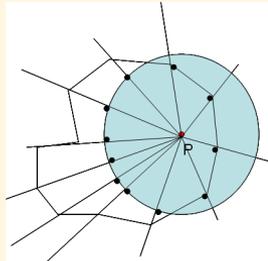


FIG. I.2.5 – Calcul de surface

[Retour au grain](#)

Exemple I.1
Calcul de la surface d'un polygone

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

I.3 Formulations des problèmes d'optimisation

I.3.1	Formulation générale des problèmes d'optimisation non linéaire	27
I.3.2	Optimiseurs et simulateurs	29
I.3.3	Optimisations locale et globale	31

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

I.3.1 Formulation générale des problèmes d'optimisation non linéaire

La *formulation générale* d'un problème d'optimisation est la suivante :

$$(PC) \left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \\ \text{sous les contraintes} \\ g(x) \leq 0, \\ h(x) = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (I.3.1) \\ \\ (I.3.2) \\ (I.3.3) \end{array}$$

où x sont les *variables d'optimisation*. La ou les solutions de (PC) sont généralement symbolisées par x^* . Notons que nous nous intéressons ici à l'*optimisation continue* puisque les variables sont prises dans \mathbb{R}^n . f désigne la(les) *fonction(s) coût(s)*. g (équation I.3.2) désigne ce que nous appellerons les *contraintes d'inégalité* et h (équation I.3.3) les *contraintes d'égalité*. f , g et h constituent les *critères d'optimisation*. Dans le cadre de ce cours, f , g et h seront typiquement non-linéaires.

L'objet de ce cours est la présentation de techniques permettant de résoudre le problème (PC) . Pour cela, nous nous intéresserons à des sous-problèmes sans contraintes, ou alors avec un seul des deux types de contraintes. Nous noterons ainsi ces familles de problèmes :

- (PC) problème général, avec contraintes d'inégalité et d'égalité,
- (PCE) problème avec contraintes d'égalité,
- (PCI) problème avec contraintes d'inégalité,
- (P) problème sans contraintes.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Il va de soi que la plupart des problèmes réels ou industriels ne sont pas initialement sous une des formes proposées. C'est pourquoi un des premiers travaux consiste en général à mettre le problème initial sous une forme standard. Par exemple, un problème donné sous la forme

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} g(x),$$

se mettra sous la forme standard (P) en posant $f(x) = -g(x)$. La mise sous forme standard nécessite en général un peu plus de travail, comme nous pouvons le voir dans les exemples [moindres carrés](#), [positionnement d'antennes](#), ou [équilibre d'une corde](#).

Formulation générale des problèmes d'optimisation non linéaire

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

I.3.2 Optimiseurs et simulateurs

Cours :

[Formulation générale](#)

Les problèmes d'optimisation peuvent parfois être résolus analytiquement mais, le plus souvent, on approche leur(s) solution(s) avec des méthodes numériques **itératives** programmées dans des logiciels que nous appellerons *optimiseurs*.

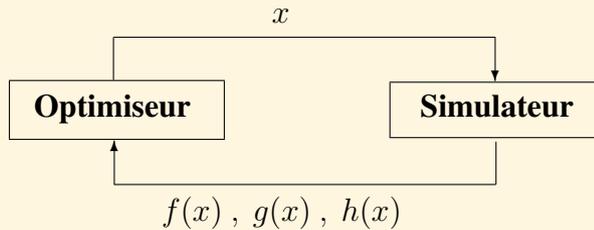
Après t calculs des critères d'optimisation, l'optimiseur calcule le prochain *itéré des variables d'optimisation*,

$$x^{t+1} = \text{Optimiseur} \left(\left[\begin{array}{c} f(x^1) \\ x^1, g(x^1) \\ h(x^1) \end{array} \right], \dots, \left[\begin{array}{c} f(x^t) \\ x^t, g(x^t) \\ h(x^t) \end{array} \right] \right) . \quad (\text{I.3.4})$$

Les critères d'optimisation f , g et h sont le plus souvent calculés à partir des sorties d'un logiciel, le *simulateur*. Par exemple, le simulateur est un logiciel de calculs par éléments finis, volumes finis, éléments frontières, simulations de Monte Carlo ... Notons y les sorties du simulateur. Alors, $f(x)$ est en fait la notation contractée de $f(x, y(x))$ (idem avec g et h). Les itérations entre optimiseur et simulateur peuvent être représentées graphiquement par

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)



Exemple :

x , dimensions d'une structure soumise à un chargement.

y , déplacements verticaux de la structure sous le chargement. Résultats d'une exécution du simulateur.

f , volume de la structure avant chargement, donc ici f dépend de x mais pas de y .

g , limitation sur le déplacement vertical maximal, $g(x) \equiv \max(y(x)) - y^{\text{maxi}}$.

Optimiseurs et simulateurs

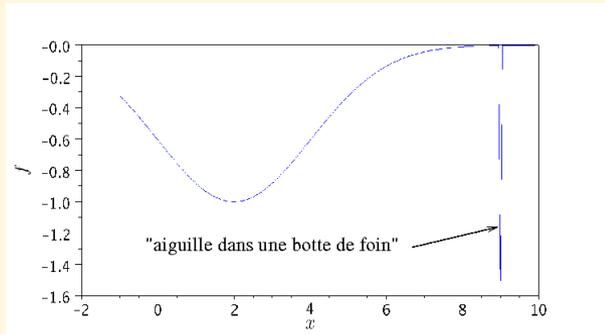
[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

I.3.3 Optimisations locale et globale

Trouver la ou les solutions, x^* , du problème (PC) (ou de ses versions simplifiées (P) , (PCI) , (PCE)) est, dans l'absolu, un problème d'optimisation globale.

Ce problème peut être arbitrairement compliqué, typiquement quand il y a des solutions isolées :



Pour éviter les complications liées à la multi-modalité de la fonction et permettre l'élaboration d'algorithmes plus rapides (requérant moins d'appels au simulateur), on diminue les ambitions en

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

I.4 Généralités sur les optimiseurs

I.4.1	Pourquoi, en pratique, l'optimisation est souvent difficile ? . . .	34
I.4.2	Mise en garde au sujet des représentations graphiques	36
I.4.3	Les grands mécanismes des optimiseurs	38

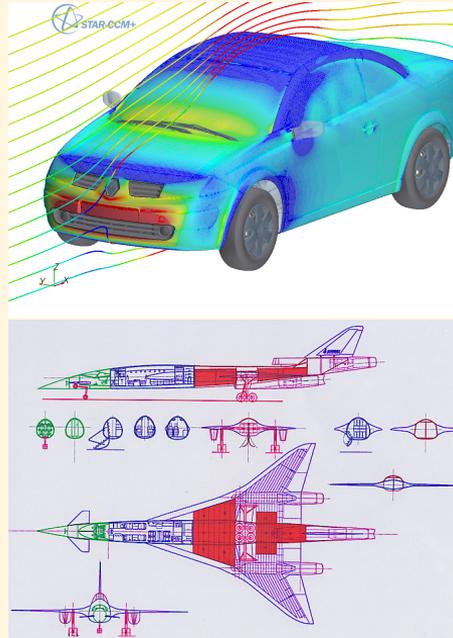
[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

I.4.1 Pourquoi, en pratique, l'optimisation est souvent difficile ?

Les difficultés pratiques de l'optimisation sont en général liées aux éléments suivants.

Le coût de calcul du simulateur, qui peut grandement restreindre le nombre d'évaluations des critères d'optimisation. Exemple d'une simulation aérodynamique externe d'un véhicule (projet ANR/OMD2).

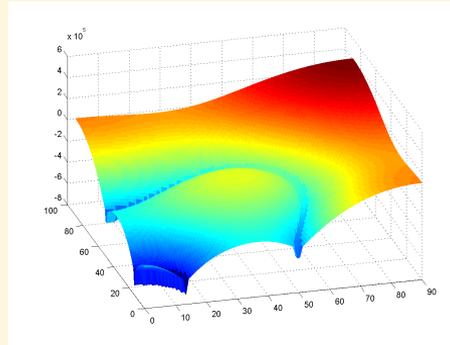


Un grand nombre de variables n .
Exemple d'un avion.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

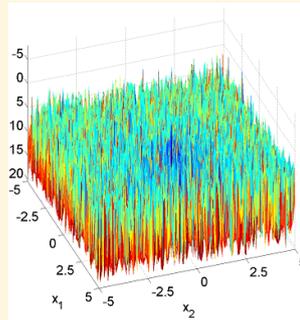
La multimodalité, qui génère des optima locaux (cf. [optimisation locale vs. globale](#)). Exemple d'une fonction liée à la conception de stratifiés composites (de [1]).



Le mauvais conditionnement numérique.



Un bruit affectant les critères d'optimisation. Ce bruit peut provenir d'un simulateur dont les convergences numériques sont partielles ou de critères qui utilisent des mesures entachées d'erreurs.



Pourquoi, en pratique, l'optimisation est souvent difficile ?

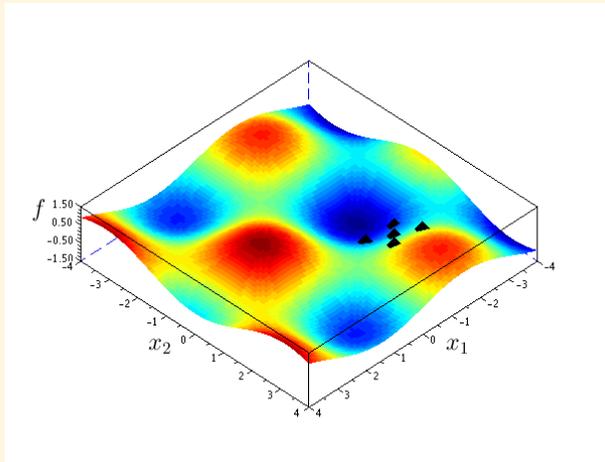
[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

I.4.2 Mise en garde au sujet des représentations graphiques

Le support écrit nous contraint parfois à dessiner les fonctions que l'on minimise en une ou deux dimensions. Par exemple, dessinons la fonction en deux dimensions

$$f(x) = \sin(x_1) \cos(x_2) + 0.1x_1 \quad \text{dans} \quad [-4, 4]^2$$



Editer le script du graphe dans Scilab
(linux)

Editer le script du graphe dans Scilab
(windows)

(En cas de problème, ouvrir puis exécuter le fichier
`./scilab/plot_3d_cours.sce`
avec Scilab)

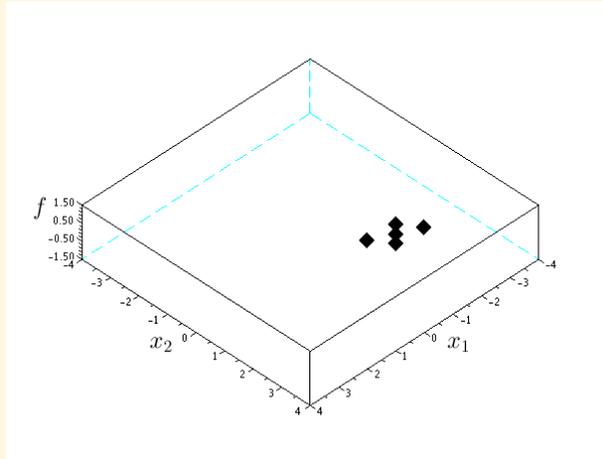
La solution peut être ici directement lue sur le graphe de la fonction ($x^* = [-4, \pm\pi]$) et dans ce cas l'utilisation d'un algorithme itératif d'optimisation n'a pas d'intérêt. Il ne s'agit là que d'une représentation à des fins pédagogiques. Dans les vrais problèmes d'optimisation, l'évaluation de

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

la fonction coût est numériquement coûteuse ou le nombre de variables d'optimisation est grand (problème en haute dimension) ce qui rend de telles représentations impossibles.

De manière plus réaliste, un algorithme d'optimisation ne connaît que quelques évaluations de points pendant l'exécution, ce qui sur la fonction précédente pourrait donner :



**Mise en garde
au sujet des re-
présentations
graphiques**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

I.4.3 Les grands mécanismes des optimiseurs

Cours :
[Formulation générale](#)

Les optimiseurs globaux quantifient et manipulent deux propriétés définies en tout point de l'espace de recherche (en tout x), une **connaissance des critères d'optimisation** (f , g et h) et une **l'incertitude sur les critères d'optimisation**. Les optimiseurs locaux s'affranchissent du traitement explicite de l'incertitude sur les critères en ne considérant que des voisinages de points explorés, donc supposés suffisamment bien connus.

Les optimiseurs déterministes construisent des fonctions qui approchent connaissance et incertitude de critères. Ces fonctions sont utilisées pour décider des prochains [itérés de l'optimiseur](#).

Par exemple les [méthodes newtoniennes](#) appliquées au problème (P) réalisent une approximation de Taylor à l'ordre 2 autour du point courant,

$$f(x) \approx f(x^t) + \nabla f(x^t)(x - x^t) + \frac{1}{2}(x - x^t)^T \nabla^2 f(x^t)(x - x^t) \quad (\text{I.4.1})$$

TODO Rodolphe, lien avec newton en exo

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Chapitre II

Notions fondamentales d'optimisation convexe

II.1	Formes quadratiques	40
II.2	Rappels de calcul différentiel	46
II.3	Notions sur la convexité	52
II.4	Résultats d'existence et d'unicité	60
II.5	Conditions nécessaires d'optimalité en l'absence de contraintes	64
	Exemples du chapitre II	68
	Exercices du chapitre II	77

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

II.1 Formes quadratiques

II.1.1	Définition d'une forme quadratique	41
II.1.2	Propriétés des formes quadratiques définies positives	43

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

II.1.1 Définition d'une forme quadratique

Cours :

[exemple en mécanique](#)

L'exemple précédent nous donne une idée, à partir d'un problème particulier, de la forme que peut prendre la fonction f . Une telle fonction s'appelle une forme quadratique. Nous allons maintenant étudier leurs propriétés.

Définition II.1.1. Soit A une matrice symétrique $n \times n$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On appelle forme quadratique la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x.$$

Lorsque la matrice A possède certaines propriétés, la fonction f peut prendre un nom particulier. La propriété à laquelle nous allons nous intéresser est la positivité :

Définition II.1.2. Soit A une matrice symétrique $n \times n$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On dit que A est semi-définie positive et on note $A \geq 0$, quand

$$x^\top Ax \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

On dit que A est définie positive et on note $A > 0$, quand

$$x^\top Ax > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0.$$

Cette définition peut être reliée aux valeurs propres de la matrice A :

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Propriété II.1.3. Soit A une matrice symétrique $n \times n$. On note $\{\lambda_i\}_{i=1\dots n}$ ses valeurs propres (réelles). On a les équivalences suivantes :

$$A \geq 0 \iff \lambda_i \geq 0, \quad i = 1 \dots n,$$

$$A > 0 \iff \lambda_i > 0, \quad i = 1 \dots n.$$

Lorsque la matrice A est définie positive (resp. semi-définie positive), on dira que $f(x)$ est une forme quadratique définie positive (resp. semi-définie positive). Dans le cas où A est définie positive la fonction f possède un certain nombre de propriétés. Nous nous intéressons dans un premier temps aux surfaces $f(x) = c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Définition d'une forme quadratique

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

II.1.2 Propriétés des formes quadratiques définies positives

Exemples :

[Exemple II.1](#)

Propriété II.1.4. Soit A une matrice symétrique $n \times n$, définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. Considérons la forme quadratique

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x.$$

On considère la famille de surfaces définie par

$$\gamma_c = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = c\},$$

pour $c \in \mathbb{R}$, et on définit le vecteur \hat{x} solution de

$$A\hat{x} = b.$$

Alors γ_c est définie de la façon suivante :

- Si $c < f(\hat{x})$ alors $\gamma_c = \emptyset$.
- Si $c = f(\hat{x})$ alors $\gamma_c = \{\hat{x}\}$.
- Si $c > f(\hat{x})$ alors γ_c est un ellipsoïde centré en \hat{x} .

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Démonstration : La matrice A étant diagonalisable, il existe une matrice P (la matrice des vecteurs propres) orthogonale telle que

$$P^T A P = D,$$

où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$. On fait le changement de variable $y = x - \hat{x}$: cela donne

$$f(\hat{x} + y) = f(\hat{x}) + (A\hat{x} - b)^T y + \frac{1}{2} y^T A y,$$

et puisque $A\hat{x} = b$, on a

$$f(x) = f(\hat{x}) + \frac{1}{2} (x - \hat{x})^T A (x - \hat{x}).$$

On fait maintenant le changement de variable $(x - \hat{x}) = Pz$, ce qui donne

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\hat{x}) + \frac{1}{2} z^T P^T A P z, \\ &= f(\hat{x}) + \frac{1}{2} z^T D z, \\ &= f(\hat{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2. \end{aligned}$$

La surface γ_c est donc définie par

$$\gamma_c = \left\{ z \in \mathbb{R}^n, \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2 = c - f(\hat{x}) \right\}.$$

**Propriétés des
formes
quadratiques
définies
positives**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Si $c - f(\hat{x}) < 0$ il est clair qu'il n'y a pas de solution à l'équation

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2 = c - f(\hat{x}),$$

puisque le second membre est toujours positif ! Si $c = f(\hat{x})$ la seule solution est $z = 0$, c'est à dire $x = \hat{x}$. Si $c > f(\hat{x})$ l'équation définit bien un ellipsoïde, puisque les λ_i sont positifs. \square

Nous avons en fait démontré un résultat très intéressant qui caractérise la valeur minimale prise par $f(x)$ quand x parcourt \mathbb{R}^n :

Théorème II.1.5. *Soit A une matrice symétrique $n \times n$ définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$, et soit f la forme quadratique associée, définie par*

$$f(x) = \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x.$$

Soit \hat{x} le vecteur (unique) vérifiant $A\hat{x} = b$, alors \hat{x} réalise le minimum de f , c'est à dire

$$f(\hat{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ce résultat est une conséquence directe de la propriété [II.1.4](#).

Propriétés des formes quadratiques définies positives

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

II.2 Rappels de calcul différentiel

II.2.1	Définition de la différentiabilité	47
II.2.2	Calcul de la dérivée première	49
II.2.3	Dérivée seconde	51

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

II.2.1 Définition de la différentiabilité

Dans \mathbb{R}^n on note x le vecteur colonne

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

et la notation $\|\cdot\|$ désignera, sauf indication du contraire, la norme euclidienne

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Avant de donner la définition de la différentiabilité, il est important de rappeler celle de la *continuité* :

Définition II.2.1. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, on dit que f est continue au point $a \in \mathbb{R}^n$ si pour tout réel $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon.$$

Voici maintenant la définition de la différentiabilité :

Définition II.2.2. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ représentée dans la base canonique de \mathbb{R}^m par le vecteur

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{II.2.1})$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

continue en $a \in \mathbb{R}^n$. On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire, notée $f'(a)$, telle que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on ait

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \|h\| \epsilon(h), \quad (\text{II.2.2})$$

où $\epsilon(\cdot)$ est une fonction continue en 0 vérifiant $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$. On appelle $f'(a)$ dérivée de f au point a .

La notation $f'(a)h$ doit être prise au sens “ $f'(a)$ appliquée à h ”. Cette notation devient assez naturelle lorsque l'on représente $f'(a)$ par sa matrice dans les bases canoniques de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m , comme le montre plus bas la proposition [II.2.2](#).

Définition de la différentiabilité

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

II.2.2 Calcul de la dérivée première

Exemples :

[Exemple II.3](#)

[Exemple II.2](#)

[Exemple II.4](#)

Exercices :

[Exercice II.2](#)

[Exercice II.1](#)

On peut d'ores et déjà donner un résultat "pratique" permettant de calculer directement la dérivée à partir du développement (II.2.2) :

Proposition II.2.1. *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable en a , alors*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} = f'(a)h.$$

Démonstration : On a $f(a + th) = f(a) + tf'(a)h + |t| \|h\| \epsilon(th)$, d'où

$$f'(a)h = \frac{f(a + th) - f(a)}{t} \pm \|h\| \epsilon(th).$$

Il suffit de noter que $\lim_{t \rightarrow 0} \epsilon(th) = 0$ pour conclure. □

Cette méthode d'estimation du gradient est souvent appelée *différences finies*. La quantité $f'(a)h$ est la *dérivée directionnelle* de f au point a dans la direction h . La proposition suivante fait le lien entre la matrice de $f'(a)$ et les dérivées partielles de f au point a :

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Proposition II.2.2. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable en a , alors on peut représenter $f'(a)$ par sa matrice dans les bases canoniques de \mathbb{R}^n et de \mathbb{R}^m et on a

$$[f'(a)]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

Démonstration : On note $\{e^1, \dots, e^n\}$ la base canonique de \mathbb{R}^n . Par définition de la matrice, la $j^{\text{ème}}$ colonne de $f'(a)$ est obtenue en appliquant $f'(a)$ au $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n . On obtient donc le vecteur

$$f'(a)e^j = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te^j) - f(a)}{t},$$

grâce à la proposition II.2.1. La définition de f donnée par (II.2.1) permet d'écrire que

$$\begin{aligned} [f'(a)e^j]_i &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(a + te^j) - f_i(a)}{t}, \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(a_1, \dots, a_j + t, \dots, a_n) - f_i(a_1, \dots, a_n)}{t}, \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a). \end{aligned}$$

□

On appelle souvent $f'(a)$ la matrice jacobienne de f au point a . Lorsque $m = 1$ on adopte une notation et un nom particuliers : le gradient est le vecteur noté $\nabla f(a)$ et défini par

$$f'(a) = \nabla f(a)^\top,$$

et on a

$$f(a + h) = f(a) + \nabla f(a)^\top h + \|h\| \epsilon(h).$$

II.2.3 Dérivée seconde

Exemples :

[Exemple II.5](#)

Exercices :

[Exercice II.4](#)

[Exercice II.3](#)

On se place maintenant dans le cas $m = 1$, soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition II.2.3. L'application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite deux fois différentiable s'il existe une matrice symétrique $\nabla^2 f(a)$ telle que

$$f(a + h) = f(a) + \nabla f(a)^\top h + h^\top \nabla^2 f(a) h + \|h\|^2 \epsilon(h).$$

On appelle $\nabla^2 f(a)$ matrice hessienne de f au point a . Comme l'énonce le théorème suivant (non démontré), cette matrice s'obtient à partir des dérivées secondes de f :

Théorème II.2.4. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable en un point a . Si on note $g(x) = \nabla f(x)$ alors la matrice hessienne est définie par $\nabla^2 f(a) = g'(a)$, soit

$$[\nabla^2 f(a)]_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

II.3 Notions sur la convexité

II.3.1	Définition de la convexité	53
II.3.2	Fonctions convexes	55
II.3.3	Caractérisation de la convexité en termes du hessien	57
II.3.4	Caractérisation de la convexité en termes du gradient	59

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

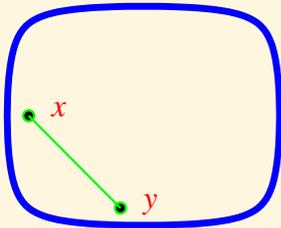
II.3.1 Définition de la convexité

Exemples :

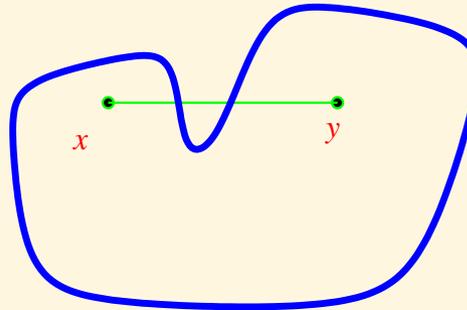
[Exemple II.6](#)

La convexité est à la base une propriété géométrique, assez intuitive d'ailleurs, qui permet de caractériser certains objets. On voit assez bien ce qu'est un objet convexe dans un espace à deux ou trois dimensions. Nous allons maintenant montrer comment cette propriété peut aussi s'appliquer aux fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

objet convexe



objet non convexe



Définition II.3.1. Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est dit convexe si pour tout couple $(x, y) \in K^2$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$ on a

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in K.$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Cette définition peut s'interpréter en disant que le segment reliant x et y doit être dans K . Elle se généralise de la façon suivante : on dira qu'un vecteur y est une combinaison convexe des points $\{x^1, \dots, x^p\}$ si on a

$$y = \sum_{i=1}^p \lambda_i x^i,$$

avec $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$.

On peut citer quelques cas particuliers : \mathbb{R}^n tout entier est un ensemble convexe, de même qu'un singleton $\{a\}$.

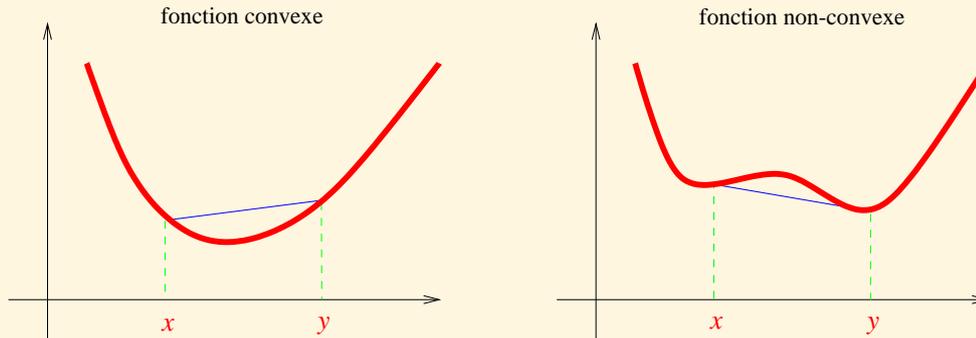
Propriété II.3.2. *Soit une famille $\{K_i\}_{i=1\dots p}$ d'ensembles convexes et $S = \bigcap_{i=1}^p K_i$. Alors S est convexe.*

Définition de la convexité

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

II.3.2 Fonctions convexes



Définition II.3.3. On dit qu'une fonction $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur un ensemble convexe K , est convexe si elle vérifie

$$\forall (x, y) \in K^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

On dira que f est strictement convexe si

$$\forall (x, y) \in K^2, x \neq y, \forall \lambda \in]0, 1[, f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Lorsque $n = 1$ cette définition s'interprète bien géométriquement : le graphe de la fonction est toujours en dessous du segment reliant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Corollaire II.3.4. On définit pour $(x, y) \in K^2$, où K est un ensemble convexe, la fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\varphi(t) = f(tx + (1 - t)y).$$

Alors on a l'équivalence

$$\varphi(t) \text{ convexe sur } [0, 1], \forall (x, y) \in K^2 \Leftrightarrow f \text{ convexe sur } K.$$

Démonstration : Si $\varphi(t)$ est convexe sur $[0, 1]$ on a en particulier

$$\varphi(\lambda) \leq \lambda\varphi(1) + (1 - \lambda)\varphi(0), \forall \lambda \in [0, 1],$$

ce qui donne exactement

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

La réciproque est admise. □

II.3.3 Caractérisation de la convexité en termes du hessien

Exemples :

[Exemple II.7](#)

Dans le cas où $f : K \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on a le résultat suivant :

Propriété II.3.5. *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est 2 fois continûment dérivable sur K convexe alors f est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0, \forall x \in K$ et strictement convexe si et seulement si $f''(x) > 0, \forall x \in K$ (sauf éventuellement en des points isolés).*

Ce résultat se généralise pour $n > 1$: le résultat suivant fait le lien entre le hessien et la propriété de convexité :

Théorème II.3.6. *Soit $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable, alors f est convexe si et seulement si $\nabla^2 f(x) \geq 0, \forall x \in K$, et strictement convexe si et seulement si $\nabla^2 f(x) > 0, \forall x \in K$.*

Démonstration : *La démonstration fait appel à un résultat obtenu dans l'exercice II.1 : si on définit $\varphi(t) = f(x + ty)$ alors on a*

$$\varphi''(t) = y^\top \nabla^2 f(x + ty)y,$$

et on sait grâce à la propriété II.3.5 que f convexe si $\varphi''(t) \geq 0, \forall t$. On aura donc f convexe si et seulement si

$$y^\top \nabla^2 f(x + ty)y \geq 0, \forall (x, y) \in K^2,$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

d'où le résultat. □

Le corrolaire suivant est immédiat :

Propriété II.3.7. Soit f une forme quadratique définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x,$$

alors f est convexe si et seulement si $A \geq 0$, et strictement convexe si et seulement si $A > 0$.

Cela provient du fait que $\nabla^2 f(x) = A$ (voir l'exemple [II.5](#)).

Caractérisation de la convexité en termes du hessien

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

II.3.4 Caractérisation de la convexité en termes du gradient

Dans le cas où la fonction f n'est supposée qu'une fois différentiable, on a le résultat suivant :

Théorème II.3.8. *Soit $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction une fois différentiable, alors f est convexe si et seulement si*

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x), \forall (x, y) \in K^2.$$

La fonction f est strictement convexe si et seulement si

$$f(y) > f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x), \forall (x, y) \in K^2, x \neq y.$$

On voit bien l'interprétation géométrique de ce dernier résultat quand $n = 1$: le graphe d'une fonction convexe f se trouve toujours au-dessus de la tangente en un point donné.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

II.4 Résultats d'existence et d'unicité

II.4.1	Théoremes généraux d'existence	61
II.4.2	Unicité	63

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

II.4.1 Théorèmes généraux d'existence

Considérons notre problème d'optimisation [I.3.1](#) introduit au début du cours, que l'on écrira pour l'occasion un peu différemment, en mettant les contraintes sous la forme $x \in K \subset \mathbb{R}^n$:

$$\min_{x \in K} f(x). \quad (\text{II.4.1})$$

Nous allons donner deux résultats très généraux d'existence d'une solution au problème ([II.4.1](#)). Auparavant nous avons besoin de la définition d'un ensemble compact :

Définition II.4.1. *Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est dit compact si, de toute suite $\{x_k\}$, où $x_k \in K$, $\forall k$, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Nous donnons le théorème suivant sans démonstration :

Théorème II.4.2. *Un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si il est fermé et borné.*

Dans \mathbb{R} , les intervalles fermés du type $[a, b]$ (ou des réunions de tels intervalles) sont compacts. La notion de fermeture signifie qu'une suite $\{x_k\}$, où $x_k \in K$, $\forall k$, doit converger vers une limite $x \in K$. Pour illustrer sur un exemple qu'un intervalle ouvert dans \mathbb{R} ne peut pas être compact, on peut considérer l'exemple suivant.

Soit $K =]0, 1[$ et la suite $x_k = 1/k$, on a bien $x_k \in K$ mais $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \notin K$.

Voici maintenant deux résultats d'existence, dont les démonstrations peuvent être consultées dans les documents.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Théorème II.4.3. Si $f : K \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et si de plus K est un ensemble compact, alors le problème (II.4.1) admet une solution optimale $\hat{x} \in K$, qui vérifie donc

$$f(\hat{x}) \leq f(x), \forall x \in K.$$

Le second résultat est moins général car il considère le cas particulier $K = \mathbb{R}^n$:

Théorème II.4.4. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathbb{R}^n . Si

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

alors (II.4.1) admet une solution optimale \hat{x} .

Démonstration : Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Puisque $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ il existe $M > 0$ tel que $\|x\| > M \Rightarrow f(x) > f(x_0)$, donc

$$\exists M > 0, f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow \|x\| \leq M.$$

Puisque \hat{x} est caractérisé par $f(\hat{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$, on a donc forcément $\|\hat{x}\| \leq M$. Donc \hat{x} est solution du problème

$$\min_{\|x\| \leq M} f(x),$$

et le théorème précédent s'applique, la boule $\{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq M\}$ étant compacte. □

Théorèmes généraux d'existence

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

II.4.2 Unicité

L'unicité résulte en général de propriétés de convexité (de f et de K).

Théorème II.4.5. *Soit $f : K \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ strictement convexe sur K convexe. Le minimum de f sur K , s'il existe, est unique.*

Démonstration : Soit donc $\hat{x} \in K$ tel que $f(\hat{x}) \leq f(x), \forall x \in K$. Supposons qu'il existe $\hat{y} \neq \hat{x}$ tel que $f(\hat{y}) \leq f(x), \forall x \in K$. Formons pour $\lambda \in]0, 1[$ le vecteur

$$u = \lambda \hat{y} + (1 - \lambda) \hat{x}.$$

D'après la stricte convexité de f et puisque nécessairement $f(\hat{y}) = f(\hat{x})$ on a

$$f(u) < \lambda f(\hat{y}) + (1 - \lambda) f(\hat{x}) = f(\hat{x}),$$

ce qui contredit le fait que \hat{x} soit un minimum. On a donc $\hat{x} = \hat{y}$. □

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

II.5 Conditions nécessaires d'optimalité en l'absence de contraintes

II.5.1	Conditions nécessaires	65
II.5.2	Conditions nécessaires et suffisantes	66

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

II.5.1 Conditions nécessaires

On va maintenant regarder de plus près le cas où $K = \mathbb{R}^n$, c'est à dire le problème sans contraintes (P). Dans le cas où f est différentiable, on a le résultat suivant :

Théorème II.5.1. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable et \hat{x} vérifiant

$$f(\hat{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

alors on a nécessairement

$$\nabla f(\hat{x}) = 0.$$

Démonstration : Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$f(\hat{x}) \leq f(\hat{x} + th).$$

On a donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\hat{x}) - f(\hat{x} + th)}{t} = \nabla f(\hat{x})^\top h \leq 0,$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(\hat{x}) - f(\hat{x} + th)}{t} = \nabla f(\hat{x})^\top h \geq 0,$$

donc $\nabla f(\hat{x})^\top h = 0, \forall h \in \mathbb{R}^n$, donc $\nabla f(\hat{x}) = 0$ (prendre par exemple $h = \nabla f(\hat{x})$). □

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

II.5.2 Conditions nécessaires et suffisantes

La condition de gradient nul devient suffisante dans le cas où f est convexe :

Théorème II.5.2. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et différentiable. Si \hat{x} vérifie

$$\nabla f(\hat{x}) = 0,$$

alors on a $f(\hat{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration : Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0, 1]$. Puisque f est convexe on a

$$f(\lambda\hat{x} + (1 - \lambda)x) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(\hat{x}).$$

On retranche $f(\hat{x})$ de chaque côté de l'inégalité, on note que

$$\lambda x + (1 - \lambda)\hat{x} = \hat{x} + \lambda(x - \hat{x}),$$

puis on divise par λ , ce qui donne l'inégalité

$$\frac{f(\hat{x} + \lambda(x - \hat{x})) - f(\hat{x})}{\lambda} \leq f(x) - f(\hat{x}).$$

Et si on fait tendre λ vers 0 on obtient

$$\nabla f(\hat{x})^\top (x - \hat{x}) \leq f(x) - f(\hat{x}),$$

donc $0 \leq f(x) - f(\hat{x})$. □

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Lorsque la fonction n'est pas convexe, on ne peut donner qu'une condition nécessaire et suffisante d'optimalité locale. On désignera par minimum local (que l'on oppose au minimum global) un vecteur vérifiant les conditions suivantes :

Définition II.5.3. On appellera x^* minimum local de f , s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x, \|x - x^*\| \leq \delta.$$

Dans le cas où f est deux fois différentiable on peut alors donner le résultat suivant :

Théorème II.5.4. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable. Si

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) = 0, \\ \nabla^2 f(x^*) > 0, \end{cases}$$

alors x^* est un minimum local de f .

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} f(x^* + th) &= f(x^*) + t\nabla f(x^*)^\top h + \frac{t^2}{2} h^\top \nabla^2 f(x^*) h + t^2 \|h\|^2 \varepsilon(th), \\ &= f(x^*) + \frac{t^2}{2} h^\top \nabla^2 f(x^*) h + t^2 \|h\|^2 \varepsilon(h). \end{aligned}$$

On a donc pour $t > 0$

$$\frac{f(x^* + th) - f(x^*)}{t^2} = \frac{1}{2} h^\top \nabla^2 f(x^*) h + \|h\|^2 \varepsilon(th).$$

Donc si t est suffisamment petit on aura bien $f(x^* + th) - f(x^*) > 0$ puisque $\nabla^2 f(x^*) > 0$. \square

Conditions nécessaires et suffisantes

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemples du chapitre II

II.1	Courbes de niveau d'une forme quadratique dans \mathbb{R}^2	69
II.2	Gradient d'une fonction quadratique	71
II.3	Dérivée d'une fonction affine	72
II.4	Calcul numérique du gradient	73
II.5	Matrice hessienne d'une fonction quadratique	74
II.6	Combinaison convexe de points dans le plan	75
II.7	Convexité d'une fonction quadratique	76

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemple II.1 Courbes de niveau d'une forme quadratique dans \mathbb{R}^2

On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ où A est une matrice symétrique 2×2 définie positive. On note P la matrice des vecteurs propres et $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ les deux valeurs propres. Notons \hat{x} la solution du système linéaire $A\hat{x} = b$. On a montré que les courbes iso-valeurs sont définies par l'équation

$$\frac{1}{2}(\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2) = c - f(\hat{x}),$$

où on a effectué le changement de variable $z = P(x - \hat{x})$. Si on a $c - f(\hat{x})$, l'équation ci-dessus définit une ellipse dans le repère (z_1, z_2) , dont l'équation "canonique" est donnée par

$$\frac{z_1^2}{a} + \frac{z_2^2}{b} = 1,$$

avec

$$a = \sqrt{\frac{2(c - f(\hat{x}))}{\lambda_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{2(c - f(\hat{x}))}{\lambda_2}}.$$

On sait que l'on peut décrire cette ellipse par la courbe paramétrique $z(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ avec

$$z(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix},$$

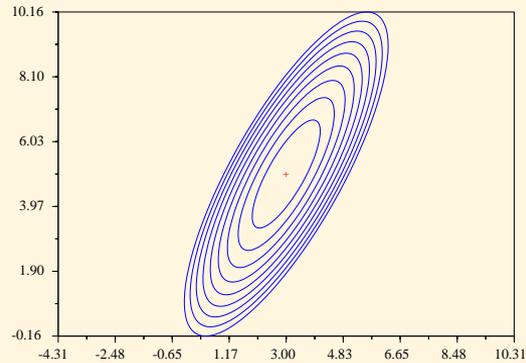
donc l'équation paramétrique de la courbe $x(t)$ dans le repère original est

$$x(t) = \hat{x} + P \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}.$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Lancer la simulation



Retour au grain

Exemple II.1
Courbes de
niveau d'une
forme
quadratique
dans \mathbb{R}^2

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemple II.2 Gradient d'une fonction quadratique

On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ où A est une matrice carrée symétrique $n \times n$.
On a

$$\begin{aligned}f(x + th) &= \frac{1}{2}x^\top Ax + \frac{1}{2}t^2h^\top Ah + tx^\top Ah + b^\top(x + th), \\ &= f(x) + t(x^\top A - b^\top)h + \frac{1}{2}t^2h^\top Ah,\end{aligned}$$

on a donc

$$\frac{f(x + th) - f(x)}{t} = (Ax - b)^\top h + \frac{1}{2}th^\top Ah.$$

Puisque $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}th^\top Ah = 0$, on a donc $\nabla f(x) = Ax - b$.

[Retour au grain](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemple II.3 Dérivée d'une fonction affine

On considère la fonction $f(x) = Cx + d$ où C est une matrice $m \times n$. On a $f(x + h) = Cx + Ch + d = f(x) + Ch$. Donc $f'(x) = C, \forall x \in \mathbb{R}^n$. On notera qu'ici f est différentiable pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, ce qui n'est pas forcément le cas quand f est quelconque.

[Retour au grain](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemple II.4 Calcul numérique du gradient

Voici un exemple de fonction Scilab calculant le gradient d'une fonction nommée "nomfonc" de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

```
0  function Cg=calgrad(nomfonc,x,epsi)
1  // nomfonc: fonction de Rn dans R
2  // x: point de Rn ou le gradient est calcule
3  // epsi : parametre du calcul discret des derivees
4  ndim=length(x);
5  val0=nomfonc(x);
6  for i=1:ndim
7      y=x;
8      y(i)=y(i)+epsi;
9      Cg(i)= (nomfonc(y)-val0)/epsi;
10 end
11 endfunction
```

[Retour au grain](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemple II.5 Matrice hessienne d'une fonction quadratique

$n \times n$. L'exemple précédent nous a donné $\nabla f(x) = Ax - b$. Puisque la matrice hessienne est la dérivée du gradient on a donc $\nabla^2 f(x) = A$.

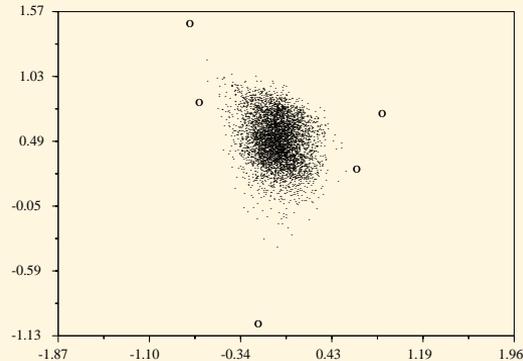
[Retour au grain](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemple II.6 Combinaison convexe de points dans le plan

Lancer la simulation



Considérons un ensemble de points du plan $\{x^1, \dots, x^p\}$. La simulation qui est proposée ici permet de générer aléatoirement un très grand nombre de points de la forme

$$y^k = \sum_{i=1}^p \lambda_i x^i,$$

en tirant aléatoirement les coefficients $\{\lambda_i\}_{i=1\dots p}$ suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$, renormalisés en les divisant par leur somme, de façon à ce que l'on ait toujours $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$. Le polygone “limite” contenant tous les points générés s'appelle l'*enveloppe convexe* des points $\{x^1, \dots, x^p\}$.

[Retour au grain](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemple II.7 Convexité d'une fonction quadratique

On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ où A est une matrice carrée symétrique. Puisque $\nabla^2 f(x) = A$ (voir l'exemple précédent), f est convexe si et seulement si $A \geq 0$, strictement convexe lorsque $A > 0$

[Retour au grain](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercices du chapitre II

II.1	Calcul d'une dérivée composée	78
II.2	Calcul du gradient d'une fonction quadratique	79
II.3	Calcul d'une dérivée seconde composée	80
II.4	Calcul du hessien d'une fonction quadratique	81

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice II.1 Calcul d'une dérivée composée

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par et $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. On définit la fonction réelle $g(t) = f(x(t))$. Calculer $g'(t)$.

[Retour au grain](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice II.2 Calcul du gradient d'une fonction quadratique

On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ où A est une matrice $n \times n$. Montrer que l'on a

$$\nabla f(x) = \frac{1}{2}(A + A^\top)x - b.$$

[Retour au grain](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice II.3 Calcul d'une dérivée seconde composée

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par et $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. On définit la fonction réelle $g(t) = f(x(t))$. Calculer $g''(t)$ dans le cas où $x(t) = (u + tv)$ où u et v sont deux vecteurs de \mathbb{R}^n , puis pour $x(t)$ quelconque.

[Retour au grain](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice II.4 Calcul du hessien d'une fonction quadratique

On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ où A est une matrice $n \times n$. Montrer que l'on a

$$\nabla^2 f(x) = \frac{1}{2}(A + A^\top).$$

[Retour au grain](#)

[Aide 1](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Chapitre III

Les méthodes de gradient

III.1	Les méthodes de descente	83
III.2	Les méthodes de gradient	86
	Exemples du chapitre III	91

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

III.1 Les méthodes de descente

III.1.1 Principe des méthodes de descente 84

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

III.1.1 Principe des méthodes de descente

Définition III.1.1. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. On dira qu'un vecteur d est une direction de descente en x s'il existe $\bar{t} > 0$ tel que

$$f(x + td) < f(x), \quad t \in]0, \bar{t}].$$

Le principe d'une méthode de descente consiste à faire les itérations suivantes

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k, \quad t_k > 0, \quad (\text{III.1.1})$$

tout en assurant la propriété

$$f(x_{k+1}) < f(x_k).$$

Le vecteur d_k est la direction de descente en x_k . Le scalaire t_k est appelé le *pas* de la méthode à l'itération k . On peut caractériser les directions de descente en x_k à l'aide du gradient :

Proposition III.1.1. Soit $d \in \mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\nabla f(x)^\top d < 0,$$

alors d est une direction de descente en x .

Démonstration : on a pour $t > 0$

$$f(x + td) = f(x) + t \nabla f(x)^\top d + t \varepsilon(t),$$

donc si on écrit

$$\frac{f(x + td) - f(x)}{t} = \nabla f(x)^\top d + \varepsilon(t),$$

on voit bien que pour t suffisamment petit on aura $f(x + td) - f(x) < 0$. □

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Dans la méthode (III.1.1) le choix de t_k est lié à la fonction

$$\varphi(t) = f(x_k + td_k),$$

en particulier, une façon de choisir t_k peut être de résoudre le problème d'optimisation (à une seule variable)

$$\min_{t>0} \varphi(t).$$

Le pas \hat{t}_k obtenu ainsi s'appelle le pas optimal. La fonction $\varphi(t) = f(x_k + td_k)$ étant différentiable, on a alors nécessairement

$$\varphi'(\hat{t}_k) = \nabla f(x_k + \hat{t}_k d_k)^\top d_k = 0.$$

Principe des méthodes de descente

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

III.2 Les méthodes de gradient

III.2.1	Principe des méthodes de gradient	87
III.2.2	La méthode du gradient à pas optimal	89
III.2.3	Calcul du pas optimal dans le cas quadratique	90

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

III.2.1 Principe des méthodes de gradient

Exemples :

[Exemple III.1](#)

On cherche à déterminer la direction de descente qui fait décroître $\varphi(t) = f(x + td)$ le plus vite possible (au moins localement). Pour cela on va essayer de minimiser la dérivée de $\varphi(t)$ en 0. On a

$$\varphi'(0) = \nabla f(x)^\top d,$$

et on cherche d solution du problème

$$\min_{d \in \mathbb{R}^n, \|d\|=1} \varphi'(0).$$

La solution est bien sûr

$$d = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|},$$

en vertu de l'inégalité de Schwartz.

Il y a ensuite de nombreuses façon d'utiliser cette direction de descente. On peut par exemple utiliser un pas fixé a priori $t_k = \rho > 0, \forall k$.

On obtient alors la méthode du gradient simple :

$$\begin{cases} d_k &= -\nabla f(x_k), \\ x_{k+1} &= x_k + \rho d_k. \end{cases}$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Sous certaines hypothèses de régularité (f deux fois différentiable) cette méthode converge si ρ est choisi assez petit.

Principe des méthodes de gradient

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

III.2.2 La méthode du gradient à pas optimal

La méthode du gradient à pas optimal consiste à faire les itérations suivantes

$$\begin{cases} d_k &= -\nabla f(x_k), \\ x_{k+1} &= x_k + t_k d_k, \end{cases} \quad (\text{III.2.1})$$

où t_k est choisi de manière à ce que

$$f(x_k + t_k d_k) \leq f(x_k + t d_k), \quad \forall t > 0. \quad (\text{III.2.2})$$

Cette méthode possède une propriété intéressante :

Proposition III.2.1. *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Les directions de descente d_k générées par la méthode (III.2.1)-(III.2.2) vérifient*

$$d_{k+1}^\top d_k = 0.$$

Démonstration : *Si on introduit la fonction $\varphi(t) = f(x_k + t d_k)$, on a*

$$\varphi'(t) = \nabla f(x_k + t d_k)^\top d_k,$$

et puisque φ est dérivable on a nécessairement $\varphi'(t_k) = 0$ donc

$$\nabla f(x_k + t_k d_k)^\top d_k = \nabla f(x_{k+1})^\top d_k = -d_{k+1}^\top d_k = 0.$$

□

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

III.2.3 Calcul du pas optimal dans le cas quadratique

Exemples :

[Exemple III.2](#)

Exemples :

[Exemple III.3](#)

On a $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ avec $A > 0$ et on note $\varphi(t) = f(x_k + td_k)$. Le pas optimal t_k est caractérisé par

$$\varphi'(t_k) = 0,$$

on a donc

$$\nabla f(x_k + t_k d_k)^\top d_k = (A(x_k + t_k d_k) - b)^\top d_k = 0,$$

soit

$$(\nabla f(x_k) + t_k A d_k)^\top d_k = 0,$$

on obtient donc

$$t_k = -\frac{\nabla f(x_k)^\top d_k}{d_k^\top A d_k},$$

qui est bien positif car d_k est une direction de descente et $d_k^\top A d_k > 0$ (car $A > 0$).

La méthode du gradient à pas optimal peut donc s'écrire (dans le cas quadratique)

$$\begin{cases} d_k &= b - Ax_k, \\ t_k &= \frac{d_k^\top d_k}{d_k^\top A d_k}, \\ x_{k+1} &= x_k + t_k d_k. \end{cases} \quad (\text{III.2.3})$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemples du chapitre III

III.1	Méthode du gradient simple dans le cas quadratique	92
III.2	Méthode du gradient à pas optimal dans le cas quadratique .	93
III.3	Méthode du gradient à pas optimal pour l'exemple des antennes	94

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

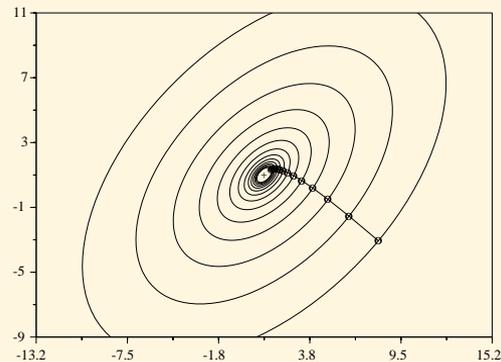
Exemple III.1 Méthode du gradient simple dans le cas quadratique

Dans le cas où $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ la méthode du gradient simple peut s'écrire

$$\begin{cases} d_k &= b - Ax_k, \\ x_{k+1} &= x_k + \rho d_k, \end{cases} \quad (\text{III.2.4})$$

où $\rho > 0$ est fixé a priori. Il existe bien sûr des conditions sur ρ pour que la méthode converge. Nous illustrons ici le fonctionnement de la méthode dans le cas $n = 2$ sur une petite simulation.

Lancer la simulation



[Retour au grain](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

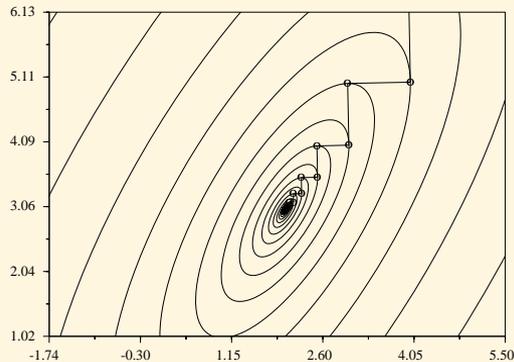
Exemple III.2 Méthode du gradient à pas optimal dans le cas quadratique

Dans le cas où $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ la méthode du gradient à pas optimal peut s'écrire

$$\begin{cases} d_k &= b - Ax_k, \\ t_k &= \frac{d_k^\top d_k}{d_k^\top A d_k}, \\ x_{k+1} &= x_k + t_k d_k, \end{cases} \quad (\text{III.2.5})$$

Nous illustrons ici le fonctionnement de la méthode dans le cas $n = 2$ sur une petite simulation.

Lancer la simulation



[Retour au grain](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemple III.3 Méthode du gradient à pas optimal pour l'exemple des antennes

TODO Eric : application de la méthode du gradient à pas optimal pour résoudre le problème du positionnement optimal des antennes (présenté [ici](#)).

[Retour au grain](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Chapitre IV

La méthode du gradient conjugué

IV.1	Introduction	96
IV.2	La méthode du gradient conjugué	102
IV.3	Interprétation de la méthode du gradient conjugué	108
	Exemples du chapitre IV	115

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

IV.1 Introduction

IV.1.1	Directions conjuguées	97
IV.1.2	Lemme fondamental	99

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

IV.1.1 Directions conjuguées

Définition IV.1.1. Soit A une matrice symétrique $n \times n$, définie positive. On dit que deux vecteurs x et y de \mathbb{R}^n sont A -conjugués (ou conjugués par rapport à A) s'il vérifient

$$x^\top Ay = 0. \quad (\text{IV.1.1})$$

La matrice A étant définie positive, la forme bilinéaire $a(x, y) = x^\top Ay$ définit un produit scalaire et la relation (IV.1.1) traduit l'orthogonalité des vecteurs x et y pour ce produit scalaire. La démonstration du théorème suivant est laissée en exercice.

Théorème IV.1.2. Si $\{d_0, d_1, \dots, d_k\}$ sont des directions A -conjuguées deux à deux, soit

$$d_i^\top Ad_k = 0, \quad \forall i, j, i < j \leq k,$$

alors elles sont linéairement indépendantes.

Considérons maintenant dans R^2 une méthode de descente appliquée à la minimisation d'une forme quadratique définie positive $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$:

$$x_1 = x_0 + \rho_0 d_0,$$

$$x_2 = x_1 + \rho_1 d_1,$$

avec d_0 et d_1 deux directions A -conjuguées et ρ_0 et ρ_1 déterminés de façon optimale. On a donc les relations suivantes :

$$\nabla f(x_1)^\top d_0 = (Ax_1 - b)^\top d_0 = 0,$$

$$\nabla f(x_2)^\top d_1 = (Ax_2 - b)^\top d_1 = 0,$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

car ρ_0 et ρ_1 sont optimaux. Montrons que l'on a de plus

$$\nabla f(x_2)^\top d_0 = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \nabla f(x_2)^\top d_0 &= (Ax_2 - b)^\top d_0 = (A(x_1 + \rho_1 d_1) - b)^\top d_0, \\ &= (Ax_1 - b)^\top d_0 + \rho_1 d_1^\top A d_0, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Puisque $\nabla f(x_2)^\top d_0 = \nabla f(x_2)^\top d_1 = 0$ et d_0, d_1 linéairement indépendants, on a $\nabla f(x_2) = 0$, x_2 réalise donc le minimum de f sur \mathbb{R}^2 . La relation de conjugaison permet donc à la méthode de descente de converger en deux itérations (dans le cas où $n = 2$).

Définition IV.1.3. Soit $\{d_0, d_1, \dots, d_n\}$ une famille de vecteur A -conjugués. On appelle alors méthode de directions conjuguées la méthode

$$\begin{cases} x_0 & \text{donné} \\ x_{k+1} &= x_k + \rho_k d_k, \quad \rho_k \text{ optimal} \end{cases}$$

On va maintenant montrer la propriété vérifiée pour $n = 2$, à savoir $x_n = \hat{x}$ où \hat{x} réalise le minimum de $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$, est valable pour tout n .

Directions conjuguées

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

IV.1.2 Lemme fondamental

On se donne *a priori* une famille $\{d_0, d_1, \dots, d_n\}$ de directions conjuguées et on note

$$E_k = \text{Vect}(d_0, d_1, \dots, d_{k-1}),$$

le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs d_0, d_1, \dots, d_{k-1} . Par construction, l'algorithme de directions conjugué

$$\begin{cases} x_0 & \text{donné,} \\ x_{k+1} & = x_k + \rho_k d_k, \quad \rho_k \text{ optimal,} \end{cases} \quad (\text{IV.1.2})$$

construit itérativement un vecteur x_k vérifiant

$$x_k \in x_0 + E_k.$$

Voici l'énoncé du lemme fondamental :

Lemme IV.1.4. *Le vecteur x_k défini par l'algorithme (IV.1.2) réalise le minimum de $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ sur le sous espace $x_0 + E_k$, c'est à dire $x_k \in x_0 + E_k$ et*

$$f(x_k) \leq f(x), \quad \forall x \in x_0 + E_k.$$

Pour la démonstration de ce lemme nous aurons besoin du théorème suivant :

Théorème IV.1.5. *Une condition nécessaire et suffisante pour que $x_k \in E_k + x_0$ réalise le minimum de $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ sur le sous espace $x_0 + E_k$ est*

$$\nabla f(x_k)^\top d_i = 0, \quad \forall i = 0, \dots, k-1.$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Démonstration : Condition nécessaire : supposons que $f(x_k) \leq f(x)$, $\forall x \in x_0 + E_k$. On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(x_k) \leq f(x_k + td), \quad \forall d \in E_k.$$

On a donc soit

$$(f(x_k + td) - f(x_k))/t \geq 0, \quad \text{si } t > 0,$$

soit

$$(f(x_k + td) - f(x_k))/t \leq 0, \quad \text{si } t < 0.$$

Si l'on fait tendre t vers zéro, on en conclut que

$$\nabla f(x_k)^\top d = 0, \quad \forall d \in E_k,$$

donc en particulier $\nabla f(x_k)^\top d_i = 0, \forall i = 0, \dots, k-1$. On admettra que la condition est suffisante. \square

Démonstration du lemme fondamental : Pour $k = 1$ on a

$$x_1 = x_0 + \rho_0 d_0,$$

avec ρ_0 optimal, c'est à dire $\nabla f(x_1)^\top d_0 = 0$. Puisque $d_0 \in E_1$ la propriété est donc vérifiée pour $k = 1$. Supposons maintenant que la propriété est vérifiée à l'ordre k :

$$\nabla f(x_k)^\top d_i = 0, \quad \forall i = 0, \dots, k-1.$$

D'une part ρ_k est optimal donc $\nabla f(x_{k+1})^\top d_k = 0$. D'autre part on a pour $0 \leq i < k$

$$\begin{aligned} \nabla f(x_{k+1})^\top d_i &= (A(x_k + \rho_k d_k) - b)^\top d_i, \\ &= (Ax_k - b)^\top d_i + \rho_k d_k^\top A d_i \\ &= 0, \end{aligned}$$

car ρ_k est optimal et $d_k^\top A d_i = 0$ (conjugaison). On a donc

$$\nabla f(x_{k+1})^\top d_i, \quad \forall i = 0, \dots, k,$$

ce qui démontre le lemme fondamental. \square

Un corollaire direct est donc que la méthode de directions conjuguées converge en n itérations au plus, puisque $E_{n-1} = \mathbb{R}^n$.

Lemme fondamental

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

IV.2 La méthode du gradient conjugué

IV.2.1	Algorithme de la méthode du gradient conjugué	103
IV.2.2	La méthode du gradient conjugué dans le cas général	106

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

IV.2.1 Algorithme de la méthode du gradient conjugué

L'idée de la méthode est de construire itérativement des directions d_0, \dots, d_k mutuellement conjuguées. A chaque étape k la direction d_k est obtenue comme combinaison linéaire du gradient en x_k et de la direction précédente d_{k-1} , les coefficients étant choisis de telle manière que d_k soit conjuguée avec toutes les directions précédentes. Si l'on note $g_k = \nabla f(x_k)$, l'algorithme prend la forme suivante

On se donne x_0 et on pose $d_0 = -g_0$.

$$x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k, \text{ avec} \quad (\text{IV.2.1})$$

$$\rho_k = -\frac{g_k^\top d_k}{d_k^\top A d_k}, \quad (\text{IV.2.2})$$

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k, \text{ avec} \quad (\text{IV.2.3})$$

$$\beta_k = \frac{g_{k+1}^\top A d_k}{d_k^\top A d_k}. \quad (\text{IV.2.4})$$

Notons d'une part que la formule (IV.2.2) définit bien le pas optimal : en effet on a bien

$$\nabla f(x_{k+1})^\top d_k = g_k^\top d_k + \rho_k d_k^\top A d_k = 0.$$

On va maintenant montrer que l'algorithme ci-dessus définit bien une méthode de directions conjuguées.

Théorème IV.2.1. *A une itération k quelconque de l'algorithme où l'optimum n'est pas encore atteint, c'est à dire $g_k \neq 0$, on a :*

$$\rho_k = \frac{g_k^\top g_k}{d_k^\top A d_k}, \quad (\text{IV.2.5})$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

$$\beta_k = \frac{g_{k+1}^\top (g_{k+1} - g_k)}{g_k^\top g_k} \quad (\text{IV.2.6})$$

$$, = \frac{g_{k+1}^\top g_{k+1}}{g_k^\top g_k}, \quad (\text{IV.2.7})$$

et les directions d_0, \dots, d_{k+1} sont mutuellement conjuguées.

Démonstration : On raisonne par récurrence sur k en supposant que d_0, \dots, d_k sont mutuellement conjuguées.

- Montrons d'abord l'équivalence de [IV.2.2](#) et [IV.2.5](#). Comme d_0, \dots, d_k sont mutuellement conjuguées x_k réalise le minimum de f sur $x_0 + E_k$, on a $g_k^\top d_{k-1} = 0$ d'où

$$g_k^\top d_k = g_k^\top (-g_k + \beta_k d_{k-1}) = -g_k^\top g_k.$$

- Pour montrer [\(IV.2.6\)](#) on note que

$$g_{k+1} - g_k = A(x_{k+1} - x_k) = \rho_k A d_k, \quad (\text{IV.2.8})$$

on a alors

$$g_{k+1}^\top A d_k = \frac{1}{\rho_k} g_{k+1}^\top (g_{k+1} - g_k),$$

et en utilisant [\(IV.2.5\)](#) il vient bien

$$\beta_k = \frac{g_{k+1}^\top (g_{k+1} - g_k)}{g_k^\top g_k},$$

Algorithme de la méthode du gradient conjugué

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

ce qui démontre (IV.2.6). On a de plus $g_{k+1}^\top g_k = 0$ car $g_k = d_k - \beta_{k-1}d_{k-1}$ appartient à E_{k+1} et que g_{k+1} est orthogonal à ce sous-espace (les directions d_0, \dots, d_k sont conjuguées, par hypothèse de récurrence), ceci démontre (IV.2.7).

- Montrons maintenant que $d_{k+1}^\top Ad_i = 0$, pour $i = 0, \dots, k$. On a d'une part

$$d_{k+1}^\top Ad_k = (-g_{k+1} + \beta_k d_k)^\top Ad_k = 0,$$

par définition de β_k . D'autre part, on a pour $i < k$

$$d_{k+1}^\top Ad_i = -g_{k+1}^\top Ad_i + \beta_k d_k^\top Ad_i,$$

avec $d_k^\top Ad_i = 0$ en vertu de l'hypothèse de récurrence. On a ensuite, en utilisant la formule (IV.2.8]

$$g_{k+1}^\top Ad_i = \frac{1}{\rho_i} g_{k+1}^\top (g_{i+1} - g_i),$$

et si l'on note que

$$g_{i+1} - g_i = -d_{i+1} + (\beta_i + 1)d_i - \beta_{i-1}d_{i-1},$$

on a bien

$$g_{k+1}^\top (g_{i+1} - g_i) = 0,$$

car $g_{k+1}^\top d_{i+1} = g_{k+1}^\top d_i = g_{k+1}^\top d_{i-1} = 0$, en vertu du fait que g_{k+1} est orthogonal à E_{k+1} et que $i < k$. On a donc bien $d_{k+1}^\top Ad_i = 0$, ce qui achève la démonstration. \square

Algorithme de la méthode du gradient conjugué

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

IV.2.2 La méthode du gradient conjugué dans le cas général

Exemples :

[Exemple IV.1](#)

[Exemple IV.2](#)

La méthode de Fletcher et Reeves est une extension directe de la méthode du Gradient conjugué pour les fonction quelconques. Appliquée à une fonction quadratique, elle se comporte comme cette dernière :

On se donne x_0 et on pose $d_0 = -\nabla f(x_0)$.

$$x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k, \text{ avec } \rho_k \text{ optimal} \quad (\text{IV.2.9})$$

$$d_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) + \beta_k d_k, \text{ avec} \quad (\text{IV.2.10})$$

$$\beta_k = \frac{\|\nabla f(x_{k+1})\|^2}{\|\nabla f(x_k)\|^2}. \quad (\text{IV.2.11})$$

Cette méthode est intéressante car elle ne nécessite pas de stocker une matrice (contrairement aux méthodes qui seront vues dans les chapitres suivants). Sa vitesse de convergence est très supérieure à celle de la méthode du gradient (ce point sera clarifié pour le cas quadratique dans le grain suivant).

La variante dite de Polak-Ribière consiste à définir β_k par la formule (IV.2.6). On peut démontrer la convergence de la méthode de Fletcher-Reeves pour une classe assez large de fonctions f , ce qu'on ne peut pas faire pour la variante de Polak-Ribière. Par contre on peut montrer que cette

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

dernière converge plus rapidement (quand elle converge effectivement !), c'est donc la méthode qui est utilisée en général.

L'efficacité de la méthode du gradient conjugué repose essentiellement sur deux points :

- La recherche linéaire (détermination du pas optimal) doit être exacte,
- Les relations de conjugaison doivent être précises.

La recherche du pas optimal doit être réalisée à l'aide d'un algorithme spécifique (c'est l'objet du prochain chapitre) puisque f est quelconque. Par contre la notion de conjugaison n'a pas de sens dans le cas non-quadratique (sauf près de l'optimum, mais on ne le connaît pas. Il faut donc tester au cours des itérations si l'hypothèse d'approximation quadratique est vérifiée. On peut surveiller les indicateurs suivants

- $|\nabla f(x_{k+1})^\top \nabla f(x_k)|$ doit être petit
- On doit avoir

$$\frac{\nabla f(x_{k+1})^\top d_{k+1}}{\|\nabla f(x_{k+1})\| \|d_{k+1}\|} \leq -\alpha,$$

avec $0 < \alpha \leq 1$ pas trop petit, c'est à dire que d_{k+1} doit être une direction de descente «raisonnable».

Dans le cas où ces conditions ne sont pas vérifiées, on rompt la conjugaison et on redémarre l'algorithme avec $d_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1})$. On peut aussi décider de faire ce redémarrage arbitrairement toutes les p itérations (p fixé de l'ordre de n par exemple).

La méthode du gradient conjugué dans le cas général

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

IV.3 Interprétation de la méthode du gradient conjugué

IV.3.1	Interprétation de la méthode du gradient conjugué	109
IV.3.2	Convergence de la méthode du gradient conjugué	112

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

IV.3.1 Interprétation de la méthode du gradient conjugué

Définition IV.3.1. On appelle k ème sous-espace de Krylov associé à la matrice A et au vecteur g_0 le sous espace

$$\mathcal{K}_k = \text{Vect}(g_0, Ag_0, \dots, A^{k-1}g_0).$$

Par construction, dans la méthode du gradient conjugué appliqué au cas quadratique, on a $E_k = \mathcal{K}_k$, comme le montre le résultat suivant :

Proposition IV.3.1. Dans la méthode du gradient conjugué on a

$$E_k = \text{Vect}(d_0, d_1, \dots, d_{k-1}) = \text{Vect}(g_0, Ag_0, \dots, A^{k-1}g_0).$$

Démonstration : Cette propriété est vérifiée à l'ordre $k = 1$ puisque $d_0 = -g_0$. Supposons qu'elle soit vérifiée à l'ordre k . On a alors la formule (IV.2.6) qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= A(x_k + \rho_k d_k) - b + \beta_k d_k, \\ &= g_k + \rho_k A d_k + \beta_k d_k, \\ &= d_k - \beta_{k-1} d_{k-1} + \rho_k A d_k + \beta_k d_k, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que $d_{k+1} \in \mathcal{K}_{k+1}$. La propriété est donc vérifiée pour tout $k > 0$. □

Comme dans le cas de l'algorithme du gradient à pas optimal, nous choisissons maintenant de mesurer la distance séparant x_k du vecteur $\hat{x} = A^{-1}b$ à l'aide de la fonction définie par

$$E(x) = \|x - \hat{x}\|_A^2 = (x - \hat{x})^\top A(x - \hat{x}).$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Minimiser $E(x)$ est équivalent à minimiser $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ comme le montre la proposition suivante (à démontrer en exercice)

Proposition IV.3.2. Soit $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$ une forme quadratique définie positive et $\hat{x} = A^{-1}b$. On a

$$E(x) = (x - \hat{x})^\top A(x - \hat{x}) = f(x) + c,$$

où c est une constante.

On va maintenant illustrer d'un autre point de vue la convergence particulière de l'algorithme du gradient conjugué. Tout vecteur $x \in E_k + E_k$ s'écrit

$$x = x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j A^j g_0,$$

et comme $g_0 = Ax_0 - b = A(x_0 - \hat{x})$ on a donc

$$x - \hat{x} = x_0 - \hat{x} + \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j A^{j+1}(x_0 - \hat{x}) = p(A)(x_0 - \hat{x}),$$

où le polynôme

$$p(z) = 1 + \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j z^{j+1}$$

est de degré k et satisfait $p(0) = 1$. Puisque le vecteur x_k obtenu à l'étape k de l'algorithme du gradient conjugué vérifie

$$f(x_k) \leq f(x), \quad \forall x \in E_k + x_0,$$

Interprétation de la méthode du gradient conjugué

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

on a, en vertu du résultat démontré dans la proposition précédente,

$$E(x_k) = \|x_k - \hat{x}\|_A^2 \leq \|p(A)(x_0 - \hat{x})\|_A^2,$$

pour tout polynome $p \in \mathcal{P}_k$ vérifiant $p(0) = 1$.

Interprétation de la méthode du gradient conjugué

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

IV.3.2 Convergence de la méthode du gradient conjugué

Le résultat suivant va nous permettre de retrouver d'une autre manière la propriété de convergence finie de l'algorithme du GC :

Proposition IV.3.3. *Soit A une matrice définie positive et x_k le vecteur obtenu à l'étape k de l'algorithme du GC. Alors on a*

$$E(x_k) \leq E(x_0) \min_{p \in P_k, p(0)=1} \max_{z \in \sigma(A)} p(z)^2.$$

Démonstration : *Puisque la matrice A est définie positive il existe une matrice orthogonale U telle que $A = UDU^\top$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où $\sigma(A) = \{\lambda_i\}_{i=1\dots n}$ sont les valeurs propres de A . Si on définit $A^{1/2} = UD^{1/2}U^\top$ on a*

$$\|x\|_A^2 = \left\| A^{1/2}x \right\|^2,$$

donc

$$\|p(A)(x_0 - \hat{x})\|_A^2 = \left\| A^{1/2}p(A)(x_0 - \hat{x}) \right\|^2 \leq \|p(A)\|^2 \|x_0 - \hat{x}\|_A^2,$$

où on a utilisé la propriété que $p(A)$ et $A^{1/2}$ commutent (ces deux matrices ont les mêmes vecteurs propres). Puisque l'on a aussi $A^j = UD^jU^\top$ les valeurs propres de $p(A)$ sont données par les nombres $p(\lambda_i)$ pour $i = 1 \dots n$, et donc

$$\|p(A)\|^2 = \max_{i=1\dots n} p(\lambda_i)^2.$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

On a donc bien

$$E(x_k) \leq E(x_0) \min_{p \in P_k, p(0)=1} \max_{z \in \sigma(A)} p(z)^2.$$

□

On a le corollaire suivant, qui permet d'exhiber le polynôme optimal $p(z)$ pour $k = n$:

Théorème IV.3.2. *Soit A une matrice définie positive. L'algorithme du GC converge en n itérations au plus. Plus précisément, si la matrice A possède $k \leq n$ valeurs propres distinctes, alors l'algorithme du GC converge en k itérations au plus.*

Démonstration : Dans les deux cas possibles, notons

$$\bar{p}(z) = \prod_{i=1}^k \frac{\lambda_i - z}{\lambda_i}.$$

On a bien $\bar{p}(z)$ de degré k , $\bar{p}(0) = 1$ et par construction $\bar{p}(\lambda_i) = 0$ pour $i = 1 \dots k$. En vertu du résultat montré dans la proposition IV.3.3, on a donc

$$E(x_k) = 0,$$

soit $x_k = \hat{x}$. □

La méthode du gradient conjugué étant en général utilisée comme une méthode itérative, il est intéressant de la comparer à la méthode du gradient à pas optimal. Le résultat suivant sera admis (la démonstration repose sur la détermination d'un polynôme particulier $p(z)$ solution d'un problème de moindre carrés).

**Convergence
de la méthode
du gradient
conjugué**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Théorème IV.3.3. Soit A une matrice définie positive et x_k le vecteur obtenu à l'étape k de l'algorithme du GC. Alors on a

$$E(x_k) \leq 4E(x_0) \left(\frac{\sqrt{\chi(A)} - 1}{\sqrt{\chi(A)} + 1} \right)^{2k},$$

où on a noté $\chi(A) = \lambda_n/\lambda_1$ le conditionnement de A pour la norme euclidienne.

Pour l'algorithme du gradient à pas optimal on avait

$$E(x_k) \leq E(x_0) \left(\frac{\chi(A) - 1}{\chi(A) + 1} \right)^{2k},$$

on voit donc que pour une même matrice A , la méthode du gradient conjugué convergera plus rapidement. Cependant cette estimation peut être très pessimiste car dans le cas où les valeurs propres sont groupées autour de valeurs distinctes, on peut être très proche du cas où certaines valeurs propres sont multiples (et où le nombre théorique d'itérations est inférieur à n) tout en ayant un mauvais conditionnement.

**Convergence
de la méthode
du gradient
conjugué**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemples du chapitre IV

IV.1	Une implémentation du gradient conjugué	116
IV.2	Application du gradient conjugué au placement d'antennes . .	118

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemple IV.1 Une implémentation du gradient conjugué

Nous donnons ici une implémentation du gradient généralisé de type Polak-Ribière. Les grandes étapes de l'algorithme sont :

- faire un premier pas de descente suivant la direction opposée au gradient (c'est à dire un gradient simple : on n'a pas au premier pas de "direction précédente" avec laquelle conjuguer la nouvelle direction)
- tant que le critère d'arrêt n'est pas atteint
- calculer une nouvelle direction de descente au point P0 suivant la méthode de Polak-Ribière
- minimiser dans cette direction
- tester le critère d'arrêt
- réinitialiser le point P0

Ceci donne le code Scilab :

```

0  g1=-calgrad(fonc,P0,1e-3); // direction de descente
1  P0=Secdor(fonc,P0,g1,eps_secdor); // recherche monodimensionnelle
                                   // par section doree
3  while arret==0;
    g2=-calgrad(fonc,P0,eps_grad); // direction de descente
    bet=g2'*(g2-g1)/(g2'*g2);
6  d=g1+bet*g2;
    P=Secdor(fonc,P0,d,eps_secdor); // recherche monodimensionnelle
    if norm(P-P0)<eps_arret // test d'arret
9     arret=1;
    else

```

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

```
12      P0=P;  
      g1=g2;  
      end  
end
```

[Retour au grain](#)

Exemple IV.1
Une
implémentation
du gradient
conjugué

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemple IV.2 Application du gradient conjugué au placement d'antennes

L'algorithme de [gradient conjugué de Polak Ribière](#) est maintenant appliqué au problème de [placement optimal d'antennes](#).

[Video de la convergence du Gradient conjugué \(linux\)](#)
[Video de la convergence du Gradient conjugué \(windows\)](#)

[Retour au grain](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Chapitre V

Méthodes de recherche linéaire

V.1	introduction	120
V.2	Caractérisation de l'intervalle de sécurité	123

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

V.1 introduction

V.1.1	But de la recherche linéaire	121
V.1.2	Intervalle de sécurité	122

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

V.1.1 But de la recherche linéaire

On a vu que dans le cas non-quadratique les méthodes de descente :

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k, \quad t_k > 0,$$

nécessitent la recherche d'une valeur de $t_k > 0$, optimale ou non, vérifiant

$$f(x_k + t_k d_k) \leq f(x_k).$$

On définit comme précédemment la fonction $\varphi(t) = f(x_k + t d_k)$. Rappelons que si f est différentiable, le pas optimal \hat{t} peut être caractérisé par

$$\begin{cases} \varphi'(\hat{t}) = 0, \\ \varphi(\hat{t}) \leq \varphi(t), \text{ pour } 0 \leq t \leq \hat{t}, \end{cases}$$

autrement dit, \hat{t} est un minimum local de φ qui assure de plus la décroissance de f . En fait, dans la plupart des algorithmes d'optimisation modernes, on ne fait jamais de recherche linéaire exacte, car trouver \hat{t} signifie qu'il va falloir calculer un grand nombre de fois la fonction φ , et cela peut être dissuasif du point de vue du temps de calcul. En pratique, on recherche plutôt une valeur de t qui assure une décroissance suffisante de f . Cela conduit à la notion d'intervalle de sécurité.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

V.1.2 Intervalle de sécurité

Définition V.1.1. On dit que $[a, b]$ est un intervalle de sécurité s'il permet de classer les valeurs de t de la façon suivante :

- Si $t < a$ alors t est considéré trop petit,
- Si $b \geq t \geq a$ alors t est satisfaisant,
- Si $t > b$ alors t est considéré trop grand.

Le problème est de traduire de façon numérique sur φ les trois conditions précédentes, ainsi que de trouver un algorithme permettant de déterminer a et b . L'idée est de partir d'un intervalle suffisamment grand pour contenir $[a, b]$, et d'appliquer une bonne stratégie pour itérativement réduire cet intervalle.

Algorithme de base

Initialement, on part de $[\alpha, \beta]$ contenant $I = [a, b]$, par exemple en prenant $\alpha = 0$ et β tel que $\varphi(\beta) > \varphi(0)$ (une telle valeur de β existe avec un minimum d'hypothèses, par exemple f coercive). On fait ensuite les itérations suivantes :

1. On choisit t dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$.
2. Si t est trop petit on prend $\alpha = t$ et on retourne en 1.
3. Si t est trop grand on prend $\beta = t$ et on retourne en 1.
4. Si t convient on s'arrête.

Il faut maintenant préciser quelles sont les relations sur φ qui vont nous permettre de caractériser les valeurs de t convenables, ainsi que les techniques utilisées pour réduire l'intervalle (point n°1 ci-dessus).

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

V.2 Caractérisation de l'intervalle de sécurité

V.2.1	Méthode de la section dorée	124
V.2.2	La règle d'Armijo	126
V.2.3	La règle de Goldstein	128
V.2.4	La règle de Wolfe	130
V.2.5	Réduction de l'intervalle	132
V.2.6	Réduction de l'intervalle par interpolation cubique	133

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

V.2.1 Méthode de la section dorée

Cette méthode, utilisée pour la recherche monodimensionnelle, est relativement simple. Elle est de type "dichotomie". Elle suppose le minimum initialement encadré dans un intervalle I_0 , et la fonction uni-modale sur cette intervalle. Elle consiste ensuite à réduire itérativement l'intervalle, noté I_k à l'étape k , dans un rapport $\gamma < 1$ constant (assurant alors une convergence linéaire), en réduisant si possible à une le nombre d'évaluations de la fonction coût à chaque étape.

Pour cela, on est amené à diviser l'intervalle I_k en trois. On note $I_k = [x_0^k, x_3^k]$ et x_1^k et x_2^k les points divisant l'intervalle en trois

$$x_0^k < x_1^k < x_2^k < x_3^k$$

On note $f_i^k = f(x_i^k)$

Si la fonction est uni-modale sur I_k , c'est à dire admet un minimum unique, est décroissante avant ce minimum, croissante ensuite, les cas de figure pouvant se présenter sont les suivants :

$f_0^k < f_1^k < f_2^k < f_3^k$: le minimum est nécessairement dans l'intervalle $[x_0^k, x_1^k]$

$f_0^k > f_1^k < f_2^k < f_3^k$: le minimum est nécessairement dans l'intervalle $[x_0^k, x_2^k]$

$f_0^k > f_1^k > f_2^k < f_3^k$: le minimum est nécessairement dans l'intervalle $[x_1^k, x_3^k]$

$f_0^k > f_1^k > f_2^k > f_3^k$: le minimum est nécessairement dans l'intervalle $[x_2^k, x_3^k]$

Si on note L_k la longueur de l'intervalle I_k , on voudrait que $\frac{L_{k+1}}{L_k} < \gamma < 1$ Ceci assure que la convergence sera linéaire .

Pour obtenir l'égalité si on enlève x_0^k ou x_3^k , il faut (voir figure) que :

$$x_1 = x_0 + (1 - \gamma)(x_3 - x_0) \text{ et}$$

$$x_2 = x_3 - (1 - \gamma)(x_3 - x_0)$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

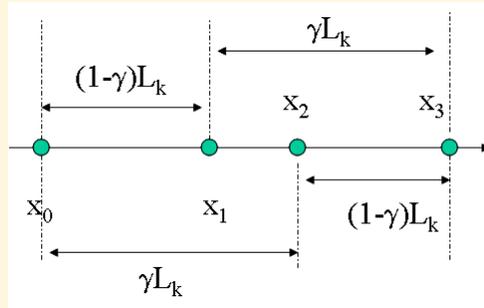


FIG. V.2.1 – Section dorée

D'autre part, lorsque x_k^0 ou x_k^3 sont supprimés à l'étape suivante, on désire n'avoir qu'un seul point à rajouter pour minimiser le nombre d'évaluations de la fonction coût. Il faut donc que le point restant à l'intérieur de l'intervalle le divise dans le même rapport à l'étape suivante :

$$(1 - \gamma)L_k = \gamma(\gamma L_k)$$

γ est donc la solution positive de $\gamma^2 - \gamma + 1 = 0$

$$\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Exemple de procédure :

Etape 1 : recherche d'un encadrement du minimum

Etape 2 : section dorée pour converger vers ce minimum.

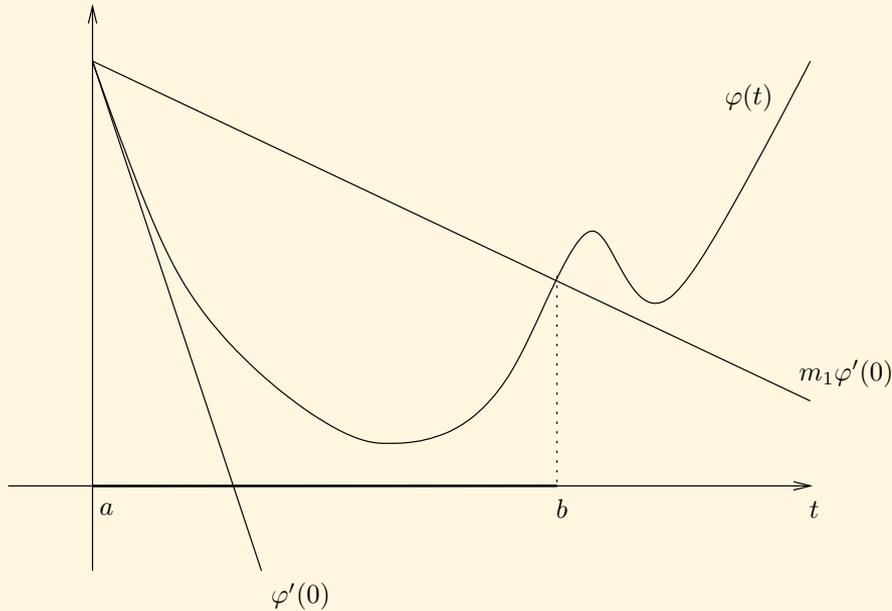
Méthode de la section dorée

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

V.2.2 La règle d'Armijo

Dans la règle d'Armijo on prend $\alpha = 0$, un réel $0 < m < 1$. La règle est la suivante :



Règle d'Armijo

- Si $\varphi(t) \leq \varphi(0) + m\varphi'(0)t$, alors t convient.
- Si $\varphi(t) > \varphi(0) + m\varphi'(0)t$, alors t est trop grand.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

On peut noter que l'on a

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= f(x_k), \\ \varphi'(0) &= \nabla f(x_k)^\top d_k.\end{aligned}$$

Puisque $\alpha = 0$, t n'est jamais considéré trop petit, c'est pourquoi la règle d'Armijo est peu utilisée *seule*.

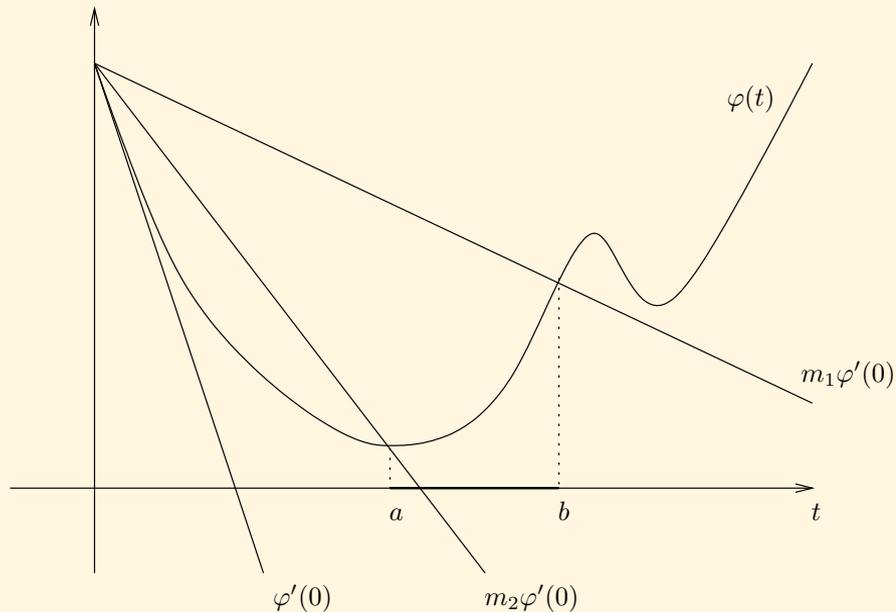
La règle d'Armijo

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

V.2.3 La règle de Goldstein

En ajoutant une deuxième inégalité à la règle d'Armijo on obtient la règle de Goldstein, où m_1 et m_2 sont deux constantes vérifiant $0 < m_1 < m_2$:



Règle de Goldstein

- Si $\varphi(t) < \varphi(0) + m_2 \varphi'(0)t$, alors t est trop petit.
- Si $\varphi(t) > \varphi(0) + m_1 \varphi'(0)t$, alors t est trop grand.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

– si $\varphi(0) + m_1\varphi'(0)t \geq \varphi(t) \geq \varphi(0) + m_2\varphi'(0)t$, alors t convient

Le choix de m_2 doit être tel que dans le cas quadratique, le pas optimal appartienne à l'intervalle de sécurité (c'est bien la moindre des choses). Dans le cas quadratique on a

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}at^2 + \varphi'(0)t + \varphi(0), \quad a > 0,$$

et le pas optimal \hat{t} vérifie $\varphi'(\hat{t}) = 0$, soit $\hat{t} = -\varphi'(0)/a$. On a donc (exercice)

$$\varphi(\hat{t}) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{2}\hat{t}.$$

Donc \hat{t} sera considéré comme satisfaisant si $m_2 \geq \frac{1}{2}$. Des valeurs typiques utilisées dans la pratique sont $m_1 = 0.1$ et $m_2 = 0.7$

Théorème V.2.1. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ coercive, c'est à dire f continue et

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty.$$

Soit l'algorithme de gradient

$$x_{k+1} = u_k - \rho_k g_k,$$

où $g_k = \nabla f(x_k)$ où à chaque itération le pas ρ_k satisfait à la règle de Goldstein

$$\varphi(0) + m_2\varphi'(0)\rho_k \leq \varphi(\rho_k) \leq \varphi(0) + m_1\varphi'(0)\rho_k,$$

où $\varphi(\rho) = f(x_k - \rho g_k)$ et $0 < m_1 < m_2 < 1$. Alors la suite x_k est bornée, la suite $f(x_k)$ est décroissante et convergente, et le vecteur g_k vérifie

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0.$$

La règle de Goldstein

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

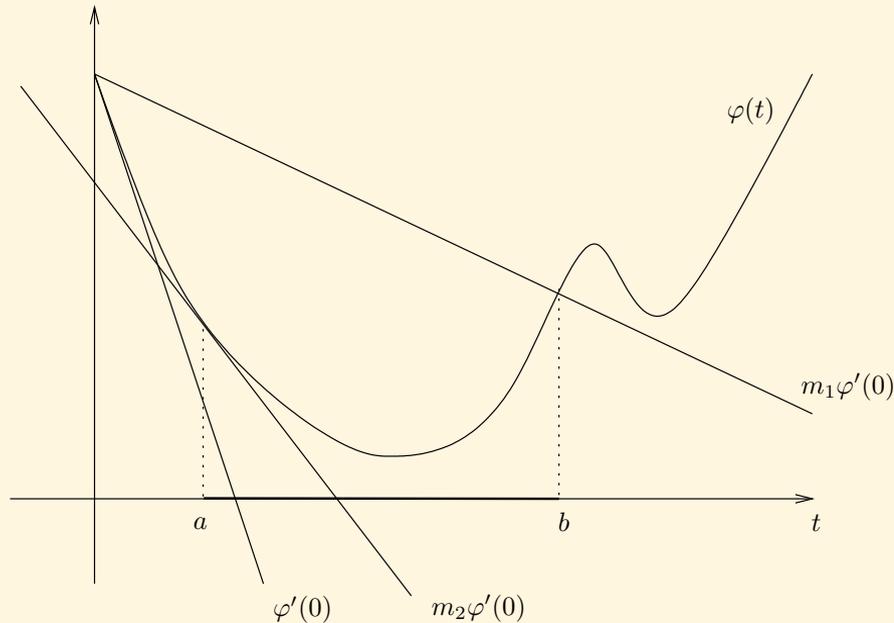
[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

V.2.4 La règle de Wolfe

La règle de Wolfe fait appel au calcul de $\varphi'(t)$, elle est donc en théorie plus coûteuse que la règle de Goldstein. Cependant dans de nombreuses applications, le calcul du gradient $\nabla f(x)$ représente un faible coût additionnel en comparaison du coût d'évaluation de $f(x)$ (par exemple en contrôle optimal), c'est pourquoi cette règle est très utilisée. Le calcul des dérivées de φ permet de plus d'utiliser une méthode d'interpolation cubique dans la phase de réduction de l'intervalle, comme nous le verrons plus loin.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)



Règle de Wolfe

- Si $\varphi(t) > \varphi(0) + m_1\varphi'(0)t$, alors t est trop grand.
- Si $\varphi(t) \leq \varphi(0) + m_1\varphi'(0)t$ et $\varphi'(t) < m_2\varphi'(0)$, alors t est trop petit.
- Si $\varphi(t) \leq \varphi(0) + m_1\varphi'(0)t$ et $\varphi'(t) \geq m_2\varphi'(0)$, alors t convient.

Dans cette règle, on s'assure que t n'est pas trop petit en assurant que $\varphi'(t)$ a suffisamment augmenté.

La règle de Wolfe

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

V.2.5 Réduction de l'intervalle

Le premier problème à résoudre est celui de la détermination d'un intervalle de départ $[\alpha, \beta]$. On peut commencer par choisir $\alpha = 0$, et utiliser une valeur initiale de t censée être une bonne valeur de départ (ce point sera clarifié plus loin).

Recherche d'un intervalle de départ

1. Si t est satisfaisant alors on s'arrête
2. Si t est trop grand, alors on prend $\beta = t$ et on s'arrête
3. Si t est trop petit, on fait $t \leftarrow ct$, $c > 1$, et on retourne en 1.

Cet algorithme donne un intervalle initial $[\alpha, \beta]$ qu'il va falloir ensuite réduire, sauf si t est admissible, auquel cas la recherche linéaire est terminée, ce peut être le cas si la valeur initiale de t est bien choisie.

Réduction de l'intervalle

On suppose maintenant que l'on dispose d'un intervalle $[\alpha, \beta]$ mais que l'on n'a pas encore de t satisfaisant. Une manière simple de faire est de procéder par exemple par dichotomie, en choisissant

$$t = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

puis en conservant soit $[\alpha, t]$ ou $[t, \beta]$ suivant que t est trop grand ou trop petit. Le problème est que cette stratégie ne réduit pas assez rapidement l'intervalle. Cependant elle n'utilise aucune informations sur φ (dérivées ou autres). On préfère en général procéder en construisant une approximation polynomiale $p(t)$ de φ et en choisissant t réalisant le minimum (s'il existe) de $p(t)$ sur $[\alpha, \beta]$. Lorsque l'on utilise la règle de Wolfe, on peut utiliser une approximation cubique.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

V.2.6 Réduction de l'intervalle par interpolation cubique

Comme nous l'avons évoqué, un choix judicieux de t peut être fait en faisant une approximation cubique de $\varphi(t)$ sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ et à prendre t réalisant le minimum de cette cubique : on considère le polynôme $p(t)$ vérifiant

$$\begin{aligned}p(t_0) &= \varphi(t_0) = f_0, \\p(t_1) &= \varphi(t_1) = f_1, \\p'(t_0) &= \varphi'(t_0) = g_0, \\p'(t_1) &= \varphi'(t_1) = g_1\end{aligned}$$

où t_0 et t_1 sont quelconques (on peut bien sûr prendre $t_0 = \alpha$ et $t_1 = \beta$). On passe en variables réduites sur $[0, 1]$ ce qui conduit à définir le polynôme $q(s)$ par

$$q(s) = p(t_0 + st_1), \quad s \in [0, 1], \quad \tau = t_1 - t_0,$$

qui vérifie donc

$$\begin{aligned}q(0) &= f_0, \\q(1) &= f_1, \\q'(0) &= \tau g_0, \\q'(1) &= \tau g_1.\end{aligned}$$

Si on cherche q de la forme

$$q(s) = as^3 + bs^2 + cs + d,$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

alors les calculs donnent

$$a = \tau(g_0 + g_1) + 2(f_0 - f_1), \quad b = 3(f_1 - f_0) - \tau(2g_0 + g_1), \quad c = \tau g_0, \quad d = f_0.$$

- Si $b^2 - 3ac < 0$ alors $q(s)$ n'admet pas de minimum, et cela ne permet pas de choisir α .
- Si $b^2 - 3ac \geq 0$ il y a un minimum donné par

$$\hat{s} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a},$$

si $\hat{s} \in [0, 1]$ cela permet de donner à t la valeur

$$t = t_0 + \hat{s}\tau,$$

sinon, cela ne permet pas de choisir t , et on peut en dernier recours faire appel à la dichotomie.

Réduction de l'intervalle par interpolation cubique

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Chapitre VI

Méthodes de Quasi-Newton

VI.1	Introduction	136
VI.2	Les méthodes de quasi-Newton	141
VI.3	Méthodes spécifiques pour les problèmes de moindres carrés	156
	Exemples du chapitre VI	160

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VI.1 Introduction

VI.1.1	La méthode de Newton	137
VI.1.2	Méthodes à métrique variable	139

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VI.1.1 La méthode de Newton

La méthode de Newton permet de construire un algorithme permettant de résoudre le système d'équations non-linéaires

$$g(x) = 0,$$

où $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est différentiable : on se donne $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et on fait les itérations

$$x_{k+1} = x_k - g'(x_k)^{-1}g(x_k), \quad (\text{VI.1.1})$$

où $g'(x)$ est la dérivée (ou jacobienne) de g au point x . L'application de cette méthode au problème d'optimisation

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \quad (\text{VI.1.2})$$

consiste à l'utiliser pour résoudre le système d'optimalité du problème (VI.1.2), c'est à dire que l'on pose $g(x) = \nabla f(x)$ dans (VI.1.1) : on obtient les itérations

$$x_{k+1} = x_k - \nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k). \quad (\text{VI.1.3})$$

La méthode de Newton est intéressante car sa convergence est quadratique au voisinage de la solution, c'est à dire que l'on a

$$\|x_{k+1} - \hat{x}\| \leq \gamma \|x_k - \hat{x}\|^2, \quad \gamma > 0,$$

mais la convergence n'est assurée que si x_0 est suffisamment proche de \hat{x} , ce qui en limite l'intérêt.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Pour résoudre le problème de convergence locale de la méthode de Newton, on peut penser à lui ajouter une phase de recherche linéaire, dans la direction

$$d_k = -\nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k).$$

Cela est possible uniquement si d_k est une direction de descente en x_k , soit

$$\nabla f(x_k)^\top d_k = -\nabla f(x_k)^\top \nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k) < 0,$$

ce qui sera le cas si $\nabla^2 f(x_k)$ est une matrice définie positive, ce qui n'est pas garanti (on sait tout au plus que $\nabla^2 f(\hat{x}) > 0$).

Le principe des méthodes que nous allons voir maintenant consiste à remplacer le Hessien $\nabla^2 f(x_k)$ par une approximation H_k (si possible définie positive), construite au cours des itérations.

La méthode de Newton

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VI.1.2 Méthodes à métrique variable

Le principe des méthodes dites «à métrique variable» consiste à faire les itérations suivantes

$$\begin{cases} d_k &= -B_k g_k, \\ x_{k+1} &= x_k + \rho_k d_k, \end{cases} \quad (\text{VI.1.4})$$

où on a noté $g_k = \nabla f(x_k)$ et B_k est une matrice définie positive. La méthode ci-dessus coïncide avec la méthode du gradient si $B_k = I$. On peut envisager de prendre $B_k = B > 0, \forall k$ et cela conduit à la remarque suivante.

Remarque VI.1.1. *Lorsque l'on cherche à résoudre le problème*

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

On peut poser $x = Cy$ où C est une matrice inversible (changement de variable). Notons alors $\tilde{f}(y) = f(Cy)$. On a

$$\nabla \tilde{f}(y) = C^\top \nabla f(Cy).$$

Un pas de la méthode du gradient appliquée à la minimisation de $\tilde{f}(y)$ est donné par

$$y_{k+1} = y_k - \rho_k C^\top \nabla f(Cy_k),$$

soit en revenant à la variable originale et en posant $x_k = Cy_k$

$$x_{k+1} = x_k - \rho_k C C^\top \nabla f(x_k).$$

On obtient bien une méthode du type (VI.1.4) avec $B = C C^\top > 0$. Dans le cas où f est une forme quadratique, on voit assez facilement comment l'introduction de B permet d'accélérer la convergence de la méthode.

Théorème VI.1.2. Soit $f(x) =$ une forme quadratique définie positive et B une matrice définie positive. L'algorithme du gradient préconditionné

$$\begin{cases} x_0 &= \text{donné,} \\ x_{k+1} &= x_k - \rho_k B g_k, \quad \rho_k \text{ optimal} \end{cases}$$

converge linéairement au sens où

$$\|x_{k+1} - \hat{x}\|_A \leq \gamma \|x_k - \hat{x}\|_A,$$

avec

$$\gamma = \frac{\chi(BA) - 1}{\chi(BA) + 1}.$$

Dans cette méthode, on voit bien comment influe la matrice B sur la vitesse de convergence : plus le conditionnement de BA sera faible, plus l'accélération sera grande. On ne peut bien sûr pas poser $B = A^{-1}$, puisque cela sous-entendrait que l'on a déjà résolu le problème ! Cependant, l'idée est tout de même assez bonne, en ce sens qu'elle indique que B soit être une approximation de A^{-1} si l'on veut effectivement accélérer la méthode. Enfin, et pour terminer cette introduction avant d'étudier de plus près les méthodes de quasi-Newton pour f quelconque, on peut d'ores et déjà dire qu'un critère de bon fonctionnement de la méthode (VI.1.4) serait que l'on ait au moins

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = A^{-1},$$

dans le cas quadratique.

**Méthodes à
métrique
variable**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VI.2 Les méthodes de quasi-Newton

VI.2.1	Relation de quasi-Newton	142
VI.2.2	Formules de mise à jour de l'approximation du hessien	144
VI.2.3	Formule de Broyden	145
VI.2.4	Formule de Davidon, Fletcher et Powell	148
VI.2.5	Algorithme de Davidon-Fletcher-Powell	150
VI.2.6	Algorithme de Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno	154

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VI.2.1 Relation de quasi-Newton

Exemples :

[Exemple VI.1](#)

Une méthode de quasi-Newton est une méthode du type :

$$\begin{cases} d_k &= -B_k g_k, \\ x_{k+1} &= x_k + \rho_k d_k, \end{cases} \quad (\text{VI.2.1})$$

ou

$$\begin{cases} d_k &= -H_k^{-1} g_k, \\ x_{k+1} &= x_k + \rho_k d_k, \end{cases} \quad (\text{VI.2.2})$$

où B_k (respectivement H_k) est une matrice destinée à approcher l'inverse du hessien de f (respectivement le hessien de f) en x_k . Il se pose donc un problème : quelle stratégie adopter pour faire cette approximation. On peut par exemple poser $B_0 = I$, mais comment ensuite mettre à jour l'approximation B_k au cours des itérations ? L'idée est la suivante : on sait que au point x_k , le gradient et le hessien de f vérifient la relation

$$g_{k+1} = g_k + \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \epsilon(x_{k+1} - x_k).$$

Si on suppose que l'approximation quadratique est bonne, on peut alors négliger le reste et considérer que l'on a

$$g_{k+1} - g_k \approx \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k),$$

cela conduit à la notion de relation de quasi-Newton :

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Définition VI.2.1. On dit que les matrices B_{k+1} et H_{k+1} vérifient une relation de quasi-Newton si on a

$$H_{k+1}(x_{k+1} - x_k) = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k),$$

ou

$$x_{k+1} - x_k = B_{k+1} \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k).$$

Il reste un problème à résoudre : comment mettre à jour B_k tout en assurant $B_k > 0$? C'est ce que nous allons voir maintenant.

Relation de quasi-Newton

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VI.2.2 Formules de mise à jour de l'approximation du hessien

Le principe de la mise à jour consiste, à une itération donnée de l'algorithme

$$\begin{cases} d_k &= -B_k g_k, \\ x_{k+1} &= x_k + \rho_k d_k, \end{cases} \quad (\text{VI.2.3})$$

à appliquer une formule du type

$$B_{k+1} = B_k + \Delta_k, \quad (\text{VI.2.4})$$

avec Δ_k symétrique, assurant la relation de quasi-Newton

$$x_{k+1} - x_k = B_{k+1}(g_{k+1} - g_k),$$

ainsi que $B_{k+1} > 0$, sous l'hypothèse que $B_k > 0$.

La formule (VI.2.4) permet d'utiliser les nouvelles informations obtenues lors de l'étape k de l'algorithme, c'est à dire essentiellement le gradient $g_{k+1} = \nabla f(x_{k+1})$ au point x_{k+1} , obtenu par recherche linéaire (exacte ou approchée) dans la direction d_k . Il existe différentes formules du type (VI.2.4). Suivant que Δ_k est de rang 1 ou 2, on parlera de correction de rang 1 ou de rang 2.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VI.2.3 Formule de Broyden

On peut chercher à déterminer une formule de correction de rang 1 de la façon suivante. On écrit B_{k+1} sous la forme

$$B_{k+1} = B_k + vv^\top,$$

et on cherche v tel que la relation de quasi-Newton

$$B_{k+1}y_k = s_k,$$

où on a posé $y_k = g_{k+1} - g_k$ et $s_k = x_{k+1} - x_k$. On a donc

$$B_k y_k + vv^\top y_k = s_k,$$

et en prenant le produit scalaire des deux membres de l'égalité précédente avec y_k on obtient

$$(y_k^\top v)^2 = (s_k - B_k y_k)^\top y_k$$

Si on utilise maintenant l'égalité

$$vv^\top = \frac{vv^\top y_k (vv^\top y_k)^\top}{(v^\top y_k)^2},$$

alors on peut écrire, en remplaçant $v^\top y_k$ par $s_k - B_k y_k$ et $(v^\top y_k)^2$ par $y_k^\top (s_k - B_k y_k)$, la formule de correction

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(s_k - B_k y_k)(s_k - B_k y_k)^\top}{(s_k - B_k y_k)^\top y_k}, \quad (\text{VI.2.5})$$

connue sous le nom de *formule de Broyden*. La validité de cette formule provient du résultat suivant :

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Théorème VI.2.2. Soit f une forme quadratique définie positive. Considérons la méthode itérative qui, partant d'un point x_0 arbitraire engendre successivement les points

$$x_{k+1} = x_k + s_k,$$

où les s_k sont des vecteurs linéairement indépendants. Alors la suite de matrices générée par B_0 , une matrice symétrique quelconque et la formule

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(s_k - B_k y_k)(s_k - B_k y_k)^\top}{(s_k - B_k y_k)^\top y_k},$$

où $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$, converge en au plus n étapes vers A^{-1} , l'inverse du hessien de f .

Démonstration : Puisque le hessien de f est constant et égal à A on a

$$y_i = \nabla f(x_{i+1}) - \nabla f(x_i) = A(x_{i+1} - x_i), \forall i.$$

On a vu que B_{k+1} est construit de façon à ce que l'on ait

$$B_{k+1} y_k = s_k,$$

montrons que l'on a aussi

$$B_{k+1} y_i = s_i, \quad i = 0 \dots k - 1.$$

On raisonne par récurrence en supposant que cette propriété est vraie pour B_k , à savoir

$$B_k y_i = s_i, \quad i = 0 \dots k - 2.$$

Formule de Broyden

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Soit donc $i \leq k - 2$ quelconque. On a

$$B_{k+1}y_i = B_k y_i + \frac{(s_k - B_k y_k)(s_k^\top y_i - B_k y_k^\top y_i)}{(s_k - B_k y_k)^\top y_k}. \quad (\text{VI.2.6})$$

Par l'hypothèse de récurrence on a $B_k y_i = s_i$ donc

$$y_k^\top B_k y_i = y_k^\top s_i,$$

mais comme $As_j = y_j, \forall j$, on obtient

$$y_k^\top s_i = s_k^\top As_i = s_k^\top y_i,$$

donc dans (VI.2.6) le numérateur est nul et on a $B_{k+1}y_i = B_k y_i = s_i$. On a donc

$$B_{k+1}y_i = s_i, \quad i = 0 \dots k.$$

Au bout de n itérations on a donc

$$B_n y_i = s_i, \quad i = 0 \dots n - 1,$$

et puisque l'on a $y_i = As_i$ cette dernière formule d'écrit

$$B_n As_i = s_i, \quad i = 0 \dots n - 1.$$

Comme les s_i constituent une base de \mathbb{R}^n on a $B_n A = I$ ou encore

$$B_n = A^{-1},$$

ce qui montre le résultat. □

Le problème de la formule de Broyden est qu'il n'y a aucune garantie que les matrices B_k soient définies positives même si la fonction f est quadratique et si par exemple $B_0 = I$. On peut cependant noter l'intérêt de la propriété $B_n = A^{-1}$, qui sera aussi vérifiée par les méthodes de mise à jour que nous allons voir maintenant.

Formule de Broyden

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VI.2.4 Formule de Davidon, Fletcher et Powell

La formule de mise à jour de Davidon, Fletcher et Powell est une formule de correction de rang 2 donnée par

$$B_{k+1} = B_k + \frac{s_k s_k^\top}{s_k^\top y_k} - \frac{B_k y_k y_k^\top B_k}{y_k^\top B_k y_k} \quad (\text{VI.2.7})$$

Le résultat suivant montre que sous certaines conditions, la formule (VI.2.7) conserve la définie-positivité des matrices B_k .

Théorème VI.2.3. *On considère la méthode définie par*

$$\begin{aligned} d_k &= -B_k g_k, \\ x_{k+1} &= x_k + \rho_k d_k, \quad \rho_k \text{ optimal} \end{aligned}$$

Où $B_0 > 0$ est donnée ainsi que x_0 . Alors les matrices B_k sont définies positives, $\forall k > 0$.

Démonstration : Soit x un vecteur de \mathbb{R}^n . On a

$$\begin{aligned} x^\top B_{k+1} x &= x^\top B_k x + \frac{(s_k^\top x)^2}{s_k^\top y_k} - \frac{(y_k^\top B_k x)^2}{y_k^\top B_k y_k}, \\ &= \frac{y_k^\top B_k y_k x^\top B_k x - (y_k^\top B_k x)^2}{y_k^\top B_k y_k} + \frac{(s_k^\top x)^2}{s_k^\top y_k} \end{aligned}$$

Si on définit le produit scalaire $\langle x, y \rangle = x^\top B_k y$ alors on a

$$x^\top B_{k+1} x = \frac{\langle y_k, y_k \rangle \langle x, x \rangle - \langle y_k, x \rangle^2}{\langle y_k, y_k \rangle} + \frac{(s_k^\top x)^2}{s_k^\top y_k}. \quad (\text{VI.2.8})$$

Le premier terme du second membre est positif ou nul d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Quant au deuxième terme on peut faire l'analyse suivante : puisque le pas est optimal, on a la relation

$$g_{k+1}^\top d_k = 0,$$

et donc

$$s_k^\top y_k = +\rho_k (g_{k+1} - g_k)^\top d_k = \rho_k g_k^\top B_k g_k > 0,$$

on a donc $x^\top B_{k+1} x \geq 0$. Les deux termes dans (VI.2.8) étant positifs, cette quantité ne peut s'annuler que si les deux termes sont simultanément nuls. Le premier terme ne peut s'annuler que si $x = \lambda y_k$ pour un scalaire $\lambda \neq 0$. Dans ce cas le deuxième terme est non nul car $s_k^\top x = \lambda s_k^\top y_k$. On a donc bien $B_{k+1} > 0$. \square

Remarque VI.2.4. La propriété $s_k^\top y_k > 0$ est vérifiée également par des méthodes de recherche linéaire approchées comme par exemple la règle de Wolfe de Powell : en effet dans ce cas on détermine un point x_{k+1} tel que

$$\varphi'(\rho_k) = \nabla f(x_{k+1})^\top d_k \geq m_2 \nabla f(x_k)^\top d_k, \quad 0 < m_2 < 1,$$

d'où

$$g_{k+1}^\top \frac{x_{k+1} - x_k}{\rho_k} > g_k^\top \frac{x_{k+1} - x_k}{\rho_k},$$

et donc $(g_{k+1} - g_k)^\top (x_{k+1} - x_k) > 0$.

**Formule de
Davidon,
Fletcher et
Powell**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VI.2.5 Algorithme de Davidon-Fletcher-Powell

On peut donc formuler maintenant la méthode utilisant la formule de correction (VI.2.7) :

Algorithme de Davidon-Fletcher-Powell

1. Choisir x_0 et B_0 définie positive quelconque (par exemple $B_0 = I$)
2. A l'itération k , calculer la direction de déplacement

$$d_k = -B_k \nabla f(x_k),$$

déterminer le pas optimal ρ_k et poser

$$x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k.$$

3. Poser $s_k = \rho_k d_k$ et $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$ puis calculer

$$B_{k+1} = B_k + \frac{s_k s_k^\top}{s_k^\top y_k} - \frac{B_k y_k y_k^\top B_k}{y_k^\top B_k y_k}.$$

4. Faire $k \leftarrow k + 1$. Retourner en 1 sauf si le critère d'arrêt est vérifié.

Comme critère d'arrêt on retiendra par exemple $\|g_{k+1}\| < \epsilon$.

Cet algorithme a un comportement remarquable dans le cas où f est une forme quadratique :

Théorème VI.2.5. *Appliqué à une forme quadratique f , l'algorithme DFP engendre des directions s_0, \dots, s_k vérifiant*

$$s_i^\top A s_j = 0, \quad 0 \leq i < j \leq k + 1, \quad (\text{VI.2.9})$$

$$B_{k+1} A s_i = s_i, \quad 0 \leq i \leq k. \quad (\text{VI.2.10})$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Démonstration : En utilisant la formule (VI.2.7) on a pour tout k

$$\begin{aligned} B_{k+1}As_k &= B_{k+1}y_k, \\ &= s_k, \end{aligned}$$

par construction. Donc (VI.2.10) est en particulier vérifiée pour $k = 0$, soit

$$B_1As_0 = s_0.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} s_0^\top As_1 &= -\rho_1 s_0^\top AB_1g_1, \\ &= -\rho_1 s_0^\top AB_1g_1, \\ &= -\rho_1 s_0^\top g_1, \\ &= 0, \end{aligned}$$

puisque $B_1As_0 = s_0$ et que x_1 est obtenu par un pas optimal dans la direction s_0 . Donc (VI.2.10) est vérifiée pour $k = 0$.

Supposons maintenant que (VI.2.9) et (VI.2.10) sont vérifiées à l'ordre $k - 1$. On peut écrire d'une part pour $i = 0 \dots k - 1$,

$$\begin{aligned} g_{k+1} - g_{i+1} &= y_{i+1} + y_i + \dots y_k, \\ &= A(s_{i+1} + s_i + \dots s_k) \end{aligned}$$

car f est une forme quadratique de hessien A . D'autre part, puisque x_{i+1} est obtenu par un pas optimal dans la direction s_i on a $s_i^\top g_{i+1} = 0$ et donc

$$s_i^\top (g_{k+1} - g_{i+1}) = s_i^\top A(s_{i+1} + s_i + \dots s_k), \quad i = 0 \dots k - 1,$$

Algorithme de Davidon- Fletcher-Powell

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

donc en vertu de l'hypothèse de récurrence (conjugaison des s_i) on a

$$s_i^\top g_{k+1} = 0, \quad i = 0 \dots k-1, \quad (\text{VI.2.11})$$

Cette relation reste aussi valable pour $i = k$ puisque l'on a $s_k^\top g_{k+1} = 0$ (pas optimal). La deuxième hypothèse de récurrence permet donc d'écrire, en remplaçant s_i par $B_{k+1}As_i$ dans (VI.2.11)

$$s_i^\top AB_{k+1}g_{k+1} = 0, \quad i = 0 \dots k$$

et donc, puisque $H_{k+1}g_{k+1} = -s_{k+1}/\rho_{k+1}$,

$$s_i^\top As_{k+1} = 0, \quad i = 0 \dots k,$$

ce qui démontre donc la propriété (VI.2.9) au rang k .

Montrons maintenant que

$$B_{k+1}As_i = s_i, \quad i = 0 \dots k-1.$$

Cette relation est vraie pour $i = k$ comme on l'a déjà montré plus haut. On a

$$B_{k+1}As_i = B_kAs_i + \frac{s_k s_k^\top As_i}{s_k^\top y_k} - \frac{B_k y_k y_k^\top B_k As_i}{y_k^\top B_k y_k}.$$

Le deuxième terme du second membre est nul car $s_k^\top As_i = 0$. Si on note que par l'hypothèse de récurrence on a $B_k As_i = s_i$ pour $i = 0 \dots k-1$ et $y_k^\top = s_k^\top A$ le numérateur du troisième terme est donné par

$$B_k y_k y_k^\top B_k As_i = B_k y_k s_k^\top As_i = 0.$$

Par conséquent on a bien

$$B_{k+1}As_i = s_i, \quad i = 0 \dots k-1,$$

ce qui démontre la propriété (VI.2.10) au rang k . □

Algorithme de Davidon- Fletcher-Powell

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

La méthode *DFP* se comporte donc, dans le cas quadratique, comme une méthode de directions conjuguées. Dans ce cas l'algorithme converge en au plus n itérations. On peut aussi remarquer que l'on a pour $k = n - 1$ la relation

$$B_n A s_i = s_i, \quad i = 0, \dots, n - 1,$$

et comme les s_i sont linéairement indépendants (car mutuellement conjugués) on en déduit que

$$B_n = A^{-1}.$$

Remarque VI.2.6. *On peut montrer que dans le cas général (non quadratique), sous les mêmes réserves que pour la méthode de Fletcher-Reeves (réinitialisation périodique $d_k = -g_k$), cet algorithme permet de converger vers un minimum local \hat{x} de f , et que l'on a*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = \nabla^2 f(\hat{x})^{-1},$$

ce qui montre que près de l'optimum \hat{x} , si la recherche linéaire est exacte, la méthode se comporte asymptotiquement comme la méthode de Newton. Cette remarque permet de justifier le choix d'une estimation du pas de déplacement donnée par

$$\rho_k = 1,$$

dans les méthodes de recherche linéaire approchée.

Algorithme de Davidon- Fletcher-Powell

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VI.2.6 Algorithme de Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno

La formule de mise à jour de Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno est une formule de correction de rang 2 qui s'obtient à partir de la formule DFP en intervertissant les rôles de s_k et y_k . La formule obtenue permet de mettre à jour une approximation H_k du hessien possédant les mêmes propriétés, à savoir $H_{k+1} > 0$ si $H_k > 0$ et vérifiant la relation de quasi-Newton

$$y_k = H_k s_k.$$

La formule est donc la suivante :

$$H_{k+1} = H_k + \frac{y_k y_k^\top}{y_k^\top s_k} - \frac{H_k s_k s_k^\top H_k}{s_k^\top H_k s_k} \quad (\text{VI.2.12})$$

L'algorithme associé est le suivant :

Algorithme de Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno

1. Choisir x_0 et H_0 définie positive quelconque (par exemple $H_0 = I$)
2. A l'itération k , calculer la direction de déplacement

$$d_k = -H_k^{-1} \nabla f(x_k),$$

déterminer le pas optimal ρ_k et poser

$$x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k.$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

3. Poser $s_k = \rho_k d_k$ et $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$ puis calculer

$$H_{k+1} = H_k + \frac{y_k y_k^\top}{y_k^\top s_k} - \frac{H_k s_k s_k^\top H_k}{s_k^\top H_k s_k}$$

4. Faire $k \leftarrow k + 1$. Retourner en 2 sauf si le critère d'arrêt est vérifié.

Notons que la direction d_k est obtenue par résolution d'un système linéaire. En pratique la mise à jour de H_k est faite directement sur le facteur de Cholesky C_k où $H_k = C_k C_k^\top$ ce qui ramène le calcul de d_k au même coût que pour la formule de DFP. De plus, cette technique permet de contrôler précisément la définie positivité de H_k , qui peut se dégrader à cause des erreurs d'arrondi.

Remarque VI.2.7. *La méthode BFGS possède les mêmes propriétés que la méthode DFP : dans le cas quadratique les directions engendrées sont conjuguées et on a $H_n = A$. Cette méthode est reconnue comme étant beaucoup moins sensible que la méthode DFP aux imprécisions dans la recherche linéaire, du point de vue de la vitesse de convergence. Elle est donc tout à fait adaptée quand la recherche linéaire est faite de façon économique, avec par exemple la règle de Goldstein ou la règle de Wolfe et Powell. Elle est par exemple utilisée dans la fonction `fminu` de Matlab.*

**Algorithme de
Broyden,
Fletcher,
Goldfarb et
Shanno**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VI.3 Méthodes spécifiques pour les problèmes de moindres carrés

VI.3.1	La méthode de Gauss-Newton	157
VI.3.2	la méthode de Levenberg-Marquardt	159

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VI.3.1 La méthode de Gauss-Newton

Dans les problèmes de moindres carrés non linéaires, la fonction à minimiser prend en général la forme

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m f_i(x)^2,$$

comme on peut le voir sur l'exemple vu au premier chapitre. Quand on veut appliquer la méthode de Newton à la minimisation de $f(x)$, on doit calculer le Hessien de f , qui dans ce cas précis prend une forme particulière : on a d'une part

$$\nabla f(x) = \sum_{i=1}^m \nabla f_i(x) f_i(x),$$

et le hessien de f est donné par

$$\nabla^2 f(x) = \sum_{i=1}^m \nabla f_i(x) \nabla f_i(x)^\top + \sum_{i=1}^m f_i(x) \nabla^2 f_i(x).$$

Si l'on se place près de l'optimum, où on supposera que les $f_i(x)$ sont petits, le deuxième terme peut alors être négligé. La matrice obtenue

$$H(x) = \sum_{i=1}^m \nabla f_i(x) \nabla f_i(x)^\top,$$

possède une propriété intéressante : elle est semi-définie positive. De plus dans la plupart des cas m est très supérieur à n et la matrice est la plupart du temps définie positive (nous reviendrons sur

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

ce point). La méthode originale que l'on obtient à partir de la méthode de Newton en remplaçant $\nabla^2 f(x)$ par $H(x)$ est la méthode de Gauss-Newton :

$$\begin{cases} x_0 & \text{donné,} \\ H_k & = \sum_{i=1}^m \nabla f_i(x_k) \nabla f_i(x_k)^\top, \\ x_{k+1} & = x_k - H_k^{-1} \nabla f(x_k). \end{cases}$$

La méthode de Gauss-Newton

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VI.3.2 la méthode de Levenberg-Marquardt

Exemples :

[Exemple VI.2](#)

Pour assurer la convergence globale de la méthode de Gauss-Newton, on peut combiner l'algorithme précédent avec une recherche linéaire, et dans ce cas on peut alors faire les itérations

$$\begin{cases} d_k &= -H_k^{-1} \nabla f(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + \rho_k d_k, \end{cases}$$

cependant, il n'y a aucune garantie que H_k reste définie positive, et en général on fait appel à une méthode modifiée, qui est la méthode de Levenberg-Marquardt : l'idée consiste à remplacer, dans la méthode précédente, la matrice H_k par la matrice $H_k + \lambda I$ où λ est un réel positif. Si λ est très grand, on retombe alors sur la méthode du gradient.

Méthode de Levenberg-Marquardt

$$\begin{cases} x_0 &= \text{donné,} \\ H_k &= \sum_{i=1}^m \nabla f_i(x_k) \nabla f_i(x_k)^\top, \\ d_k &= -(H_k + \lambda I)^{-1} \nabla f(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + \rho_k d_k, \end{cases}$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemples du chapitre VI

VI.1	Quasi-Newton et positionnement d'antennes	161
VI.2	Levenberg-Marquardt et régression non linéaire	162

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemple VI.1 Quasi-Newton et positionnement d'antennes

TODO Eric : application d'une méthode de quasi-Newton pour résoudre le problème du positionnement optimal des antennes (présenté [ici](#)).

[Retour au grain](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemple VI.2 Levenberg-Marquardt et régression non linéaire

TODO Eric ou Rodolphe : application d'une méthode de LVM à la régression non linéaire (présenté [ici](#)).

[Retour au grain](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Chapitre VII

Conditions d'optimalité en optimisation avec contraintes

VII.1	Les conditions de Lagrange	164
VII.2	Les conditions de Kuhn et Tucker	176
VII.3	Exemples de problèmes	183
VII.4	Conditions suffisantes d'optimalité	190

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.1 Les conditions de Lagrange

VII.1.1	Introduction	165
VII.1.2	Problème avec contraintes d'égalité	166
VII.1.3	Contraintes d'égalité linéaires	167
VII.1.4	Contraintes d'égalité non-linéaires	170
VII.1.5	Le théorème de Lagrange	174

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.1.1 Introduction

On s'intéresse maintenant à des problèmes d'optimisation de la forme

$$(PC) \left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \\ \text{sous les contraintes} \\ g(x) \leq 0, \\ h(x) = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (VII.1.1) \\ \\ (VII.1.2) \\ (VII.1.3) \end{array}$$

où les fonctions f , g et h sont différentiables au moins une fois, et f est typiquement non-linéaire. Cependant nous étudierons le cas où g et h sont linéaires avec un intérêt tout particulier. Dans ce chapitre nous allons nous efforcer d'obtenir les conditions d'optimalité associées au problème (PC). Les chapitres suivants mettront ensuite l'accent sur les méthodes numériques permettant de le résoudre. Nous nous intéresserons précisément dans ce chapitre aux problèmes

- (PCE) problème avec contraintes d'égalité,
- (PCI) problème avec contraintes d'inégalité,

et les résultats s'étendront facilement au problème général (PC).

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.1.2 Problème avec contraintes d'égalité

On va tout d'abord s'intéresser au problème suivant, dit problème d'optimisation avec contraintes d'égalité seulement :

$$(PCE) \left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \\ \text{sous les contraintes} \\ h(x) = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(VII.1.4)} \\ \\ \text{(VII.1.5)} \end{array}$$

La raison majeure justifiant que l'on s'intéresse en premier au problème (PCE) est que (PC) est un problème du type (PCI) dont on ne sait pas quelles sont les contraintes *actives* (nous reviendrons sur cette terminologie plus tard). Nous allons dans un premier temps nous intéresser au cas où les contraintes sont linéaires.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.1.3 Contraintes d'égalité linéaires

Un problème d'optimisation avec contraintes d'égalité linéaires prend la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \\ Ax - b = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(VII.1.6)} \\ \text{(VII.1.7)} \end{array}$$

où A est une matrice $p \times n$ avec $p < n$ et $b \in \mathbb{R}^p$. On notera

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax - b = 0\}.$$

Nous allons maintenant définir le concept de direction admissible dans S .

Définition VII.1.1. On dit que $d \in \mathbb{R}^n$ est une direction admissible en $x \in S$ s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$x + td \in S, \forall t \in [-\alpha, \alpha]$$

Dans notre cas, on a $A(x + td) - b = tAd$ puisque $x \in S$, et donc les directions admissibles d sont caractérisées par

$$Ad = 0. \quad \text{(VII.1.8)}$$

Rappelons maintenant un résultat bien utile d'algèbre linéaire :

Théorème VII.1.2. Soit A une matrice $p \times n$. On a la relation suivante

$$(\text{Ker } A)^\perp = (\text{Im } A^\top)$$

On peut donc énoncer les conditions nécessaires d'optimalité pour le problème (VII.1.6) :

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Théorème VII.1.3. Soit $\hat{x} \in S$ solution du problème (VII.1.6), vérifiant donc

$$f(\hat{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in S$$

Alors il existe nécessairement un vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^p$ vérifiant

$$\nabla f(\hat{x}) + A^\top \lambda = 0.$$

Si de plus A est de rang p alors λ est unique.

Démonstration : Soit d une direction admissible, vérifiant donc $d \in \text{Ker } A$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$f(\hat{x}) \leq f(\hat{x} + td),$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{f(\hat{x} + td) - f(\hat{x})}{t} &\geq 0, \quad t > 0, \\ \frac{f(\hat{x} + td) - f(\hat{x})}{t} &\leq 0, \quad t < 0. \end{aligned}$$

Si on prend la limite de ces deux expressions quand t tend vers 0 on en déduit que

$$\nabla f(\hat{x})^\top d = 0, \quad \forall d \in \text{Ker } A$$

soit $\nabla f(\hat{x}) \in (\text{Ker } A)^\perp$, donc $\nabla f(\hat{x}) \in \text{Im } A^\top$. Il existe donc un vecteur λ tel que

$$\nabla f(\hat{x}) = -A^\top \lambda,$$

**Contraintes
d'égalité
linéaires**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

ce qui démontre le résultat. Pour l'unicité, supposons qu'il existe deux vecteurs λ_1 et λ_2 vérifiant

$$\nabla f(\hat{x}) = -A^\top \lambda_1 = -A^\top \lambda_2.$$

On a donc

$$A^\top (\lambda_1 - \lambda_2) = 0,$$

et donc $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ si A est de rang p . □

Contraintes d'égalité linéaires

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.1.4 Contraintes d'égalité non-linéaires

Nous étudions maintenant le problème

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), & \text{(VII.1.9)} \\ h(x) = 0. & \text{(VII.1.10)} \end{cases}$$

où $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable. On note comme précédemment

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n, h(x) = 0\}.$$

Le concept de direction admissible dans S ne peut pas se définir comme pour les contraintes linéaires, car pour $\hat{x} \in S$ il peut ne pas exister $\alpha > 0$ et $d \in \mathbb{R}^n$ tels que $\hat{x} + td \in S$. On doit donc définir le concept de courbe admissible.

Considérons une courbe $x(t)$ définie pour $t \geq 0$ vérifiant

$$\begin{cases} x(t) \in S, \forall t \in [-\alpha, \alpha], \alpha > 0 \\ x(0) = \hat{x}. \end{cases}$$

Puisque $x(t) \in S$ on a $h_i(x(t)) = 0$ pour $1 \leq i \leq p$ et on peut écrire que

$$\frac{d}{dt} h_i(x(t)) = \nabla h_i(x(t))^\top \dot{x}(t) = 0, \quad 1 \leq i \leq p.$$

Si on note $y = \dot{x}(0)$ le vecteur tangent à la courbe $x(t)$ en $t = 0$, on a donc

$$\nabla h_i(\hat{x})^\top y = 0, \quad 1 \leq i \leq p. \quad \text{(VII.1.11)}$$

Cela conduit à la définition suivante :

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Définition VII.1.4. On dit que $y \in \mathbb{R}^n$ est une direction admissible en $\hat{x} \in S$ s'il existe $\alpha > 0$ et une courbe $x(t)$ vérifiant

$$\begin{cases} x(t) \in S, \forall t \in [-\alpha, \alpha], \\ x(0) = \hat{x}, \\ \dot{x}(0) = y. \end{cases}$$

On notera alors $y \in T(\hat{x})$.

L'ensemble $T(\hat{x})$ définit le plan tangent à S en \hat{x} . L'analyse faite précédemment montre que l'on a l'implication

$$y \in T(\hat{x}) \Rightarrow \nabla h_i(\hat{x})^\top y = 0, \quad 1 \leq i \leq p,$$

qui sera insuffisante pour montrer la condition nécessaire d'optimalité. Nous allons donc maintenant nous attacher à montrer sous quelles conditions la relation (VII.1.11) est une condition suffisante d'appartenance à $T(\hat{x})$.

Définition VII.1.5. On dit que \hat{x} est un point régulier pour la contrainte $h(x) = 0$ si

- $h(\hat{x}) = 0$,
- Les vecteurs $\nabla h_i(\hat{x})$ sont linéairement indépendants.

Si on note $\nabla h(\hat{x})$ la matrice $n \times p$

$$\nabla h(\hat{x}) = [\nabla h_1(\hat{x}) \dots \nabla h_p(\hat{x})],$$

la condition d'indépendance linéaire des $\nabla h_i(\hat{x})$ peut s'écrire

$$\text{Rang } \nabla h(\hat{x}) = p.$$

et on a donc $\nabla h(\hat{x})^\top \dot{x}(0) = 0$ pour toute courbe admissible $x(t)$.

On a la proposition suivante :

**Contraintes
d'égalité
non-linéaires**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Proposition VII.1.1. Si \hat{x} est un point régulier pour la contrainte $h(x) = 0$, alors

$$\nabla h(\hat{x})^\top y = 0 \Rightarrow y \in T(\hat{x}).$$

Démonstration : Soit $y \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\nabla h(\hat{x})^\top y = 0$. On considère la courbe $x(t)$ donnée par

$$x(t) = \hat{x} + ty + \nabla h(\hat{x})u(t).$$

La fonction $u(t) \in \mathbb{R}^p$, pour l'instant inconnue, va être déterminée de telle façon que $h(x(t)) = 0$. On va pour cela poser le problème de la détermination de $u(t)$ sous la forme d'une équation implicite. On définit la fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ par

$$F(t, u) = h(\hat{x} + ty + \nabla h(\hat{x})u).$$

Le problème de la détermination de $u(t)$ se ramène donc à la résolution de l'équation

$$F(t, u) = 0,$$

au voisinage du point $(0, 0)$. On a d'une part $F(0, 0) = h(\hat{x}) = 0$ et

$$\frac{\partial}{\partial u} F(t, u) = \nabla h(\hat{x})^\top \nabla h(\hat{x} + ty + \nabla h(\hat{x})u),$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial u} F(0, 0) = \nabla h(\hat{x})^\top \nabla h(\hat{x}).$$

La matrice $\frac{\partial}{\partial u} F(0, 0)$ est inversible puisque par hypothèse $\nabla h(\hat{x})$ est de rang p . On peut alors appliquer le théorème des fonctions implicites : il existe un voisinage du point $(0, 0)$ et une fonction $u(t)$ tels que

$$F(t, u) = 0 \Leftrightarrow u = u(t).$$

**Contraintes
d'égalité
non-linéaires**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Notons que l'on a donc nécessairement $u(0) = 0$ puisque $F(0, 0) = 0$.

On a donc maintenant

$$\dot{x}(t) = y + \nabla h(\hat{x})\dot{u}(t)$$

soit en $t = 0$

$$\dot{x}(0) = y + \nabla h(\hat{x})\dot{u}(0).$$

Montrons que $\dot{u}(0) = 0$. Pour cela on écrit que l'on a

$$\frac{d}{dt}h(x(t)) = \nabla h(x(t))^\top (y + \nabla h(\hat{x})\dot{u}(t)) = 0,$$

puisque $h(x(t)) = 0$, et donc en $t = 0$ la relation précédente prend la forme

$$\left. \frac{d}{dt}h(x(t)) \right|_{t=0} = \nabla h(\hat{x})^\top y + \nabla h(\hat{x})^\top \nabla h(\hat{x})\dot{u}(0) = 0.$$

Le premier terme du second membre est nul par hypothèse, et donc $\dot{u}(0) = 0$ puisque $\nabla h(\hat{x})^\top \nabla h(\hat{x})$ est inversible. Donc

$$\dot{x}(0) = y,$$

soit $y \in T(\hat{x})$, ce qui démontre le résultat annoncé. \square

Contraintes d'égalité non-linéaires

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.1.5 Le théorème de Lagrange

Théorème VII.1.6. Soit $\hat{x} \in S = \{x \in \mathbb{R}^n, h(x) = 0\}$ un point régulier solution du problème (VII.1.9), vérifiant donc

$$f(\hat{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in S$$

Alors il existe nécessairement un vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^p$ unique vérifiant

$$\nabla f(\hat{x}) + \nabla h(\hat{x})\lambda = 0,$$

soit encore

$$\nabla f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(\hat{x}) = 0.$$

Les composantes du vecteur λ sont appelées multiplicateurs de Lagrange.

Démonstration : Considérons une courbe $x(t)$ définie pour $t \in [-\alpha, \alpha]$ vérifiant

$$\begin{cases} x(t) \in S, \quad \forall t \in [-\alpha, \alpha], \quad \alpha > 0 \\ x(0) = \hat{x}. \end{cases}$$

On a

$$f(x(0)) \leq f(x(t)), \quad \forall t \in [-\alpha, \alpha],$$

donc nécessairement

$$\left. \frac{d}{dt} f(x(t)) \right|_{t=0} = \nabla f(\hat{x})^\top \dot{x}(0) = 0,$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

ce qui signifie que $\nabla f(\hat{x})$ se trouve dans l'orthogonal de $T(\hat{x})$ le plan tangent à S en \hat{x} . Si l'on utilise l'équivalence

$$T(\hat{x}) = \text{Ker } \nabla h(\hat{x})^\top \Leftrightarrow T(\hat{x})^\perp = \text{Im } \nabla h(\hat{x}),$$

il existe donc un vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\nabla f(\hat{x}) = -\nabla h(\hat{x})\lambda.$$

L'unicité résulte du fait que $\nabla h(\hat{x})$ est de rang p et se montre comme dans le cas linéaire. □

Le théorème de Lagrange

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.2 Les conditions de Kuhn et Tucker

VII.2.1	Problème avec contraintes d'inégalité	177
VII.2.2	Interprétation géométrique des conditions de Kuhn et Tucker .	181

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.2.1 Problème avec contraintes d'inégalité

On s'intéresse maintenant au problème suivant, dit problème d'optimisation avec contraintes d'inégalité seulement :

$$(PCI) \left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \\ \text{sous les contraintes} \\ g(x) \leq 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(VII.2.1)} \\ \\ \text{(VII.2.2)} \end{array}$$

où $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, est différentiable (il n'y a ici aucune condition sur m). On notera K l'ensemble des points admissibles, c'est à dire

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) \leq 0\}.$$

Au point solution de (PCI) il va de soi que les contraintes effectivement actives vérifieront $g_i(\hat{x}) = 0$. Cependant, puisque l'on ne sait pas *a priori* quelles sont ces contraintes, le passage de (PCI) a un problème du type (PCE) n'est pas direct.

Définition VII.2.1. On appelle *contraintes saturées* en \hat{x} l'ensemble des indices i tel que $g_i(\hat{x}) = 0$, et on note

$$I(\hat{x}) = \{i \mid g_i(\hat{x}) = 0\}.$$

On note alors $S(\hat{x})$ l'ensemble

$$S(\hat{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n, g_i(x) = 0, i \in I(\hat{x})\}.$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Le concept de direction admissible se définit comme suit :

Définition VII.2.2. On dit que $y \in \mathbb{R}^n$ est une direction admissible en $\hat{x} \in K$ s'il existe $\alpha > 0$ et une courbe $x(t)$ vérifiant

$$\begin{cases} x(t) \in K, \forall t \in [-\alpha, \alpha], \\ x(0) = \hat{x}, \\ \dot{x}(0) = y. \end{cases}$$

On notera alors $y \in C(\hat{x})$.

Lemme VII.2.3. Soit $y \in \mathbb{R}^n$ une direction admissible en $\hat{x} \in K$, alors on a nécessairement

$$\nabla g_i(\hat{x})^\top y \leq 0, \quad i \in I(\hat{x}).$$

Démonstration : Considérons une courbe $x(t)$ définie pour $t \in [-\alpha, \alpha]$ vérifiant

$$\begin{cases} x(t) \in K, \forall t \in [-\alpha, \alpha], \alpha > 0 \\ x(0) = \hat{x}, \\ \dot{x}(0) = y. \end{cases}$$

Comme $g_i(\hat{x}) < 0$ pour $i \notin I(\hat{x})$, on aura toujours $g_i(x(t)) < 0$ pour t suffisamment petit. Par contre, pour $i \in I(\hat{x})$ on doit avoir $g_i(x(t)) \leq 0$ pour t suffisamment petit. Si on utilise le développement de Taylor de $g_i(x(t))$ en $t = 0$ on doit donc avoir

$$g_i(\hat{x}) + t \nabla g_i(\hat{x})^\top y + t\epsilon(t) \leq 0.$$

Puisque $g_i(\hat{x}) = 0$ il faut donc nécessairement que l'on ait

$$\nabla g_i(\hat{x})^\top y \leq 0.$$

**Problème avec
contraintes
d'inégalité**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

□ Comme dans le cas des contraintes d'égalité, on doit définir la notion de point régulier, qui est nécessaire pour que la condition précédente soit suffisante :

Définition VII.2.4. On dit que \hat{x} est un point régulier pour la contrainte $g(x) \leq 0$ si

- $g(\hat{x}) \leq 0$,
- Les vecteurs $\{\nabla h_i(\hat{x})\}_{i \in I(\hat{x})}$ sont linéairement indépendants.

Sous l'hypothèse de régularité de \hat{x} on aura, comme dans le cas des contraintes d'égalité

$$\nabla g_i(\hat{x})^\top y \leq 0, \quad i \in I(\hat{x}) \Rightarrow y \in C(\hat{x}).$$

La proposition suivante permet d'effectuer le premier pas vers les conditions de Kuhn et Tucker.

Proposition VII.2.1. Soit \hat{x} la solution du problème (PCI). Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in B(\hat{x}, \eta), \quad g_i(x) < 0, \quad i \notin I(\hat{x}),$$

où on a noté $B(\hat{x}, \eta)$ la boule de centre \hat{x} et de rayon η . Alors \hat{x} est la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in B(\hat{x}, \eta)} f(x), \\ g_i(x) = 0, \quad i \in I(\hat{x}). \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(VII.2.3)} \\ \text{(VII.2.4)} \end{array}$$

Ce résultat est uniquement dû à la continuité de g , et montre que l'on est localement ramené à un problème avec contraintes d'égalité. On peut donc maintenant énoncer le résultat principal :

Théorème VII.2.5. Soit $\hat{x} \in K$ un point régulier solution du problème (PCI). Alors il existe un unique vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\nabla f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0, \quad \text{(VII.2.5)}$$

Problème avec contraintes d'inégalité

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1 \dots m, \quad (\text{VII.2.6})$$

$$\lambda_i g_i(\hat{x}) = 0, \quad i = 1 \dots m \quad (\text{VII.2.7})$$

Démonstration : Les relations (VII.2.5) (VII.2.7) sont une conséquence directe du théorème de Lagrange, car il suffit de prendre $\lambda_i = 0$ pour $i \notin I(\hat{x})$. On peut ensuite montrer (VII.2.6) par l'absurde : supposons qu'il existe $k \in I(\hat{x})$ tel que $\lambda_k < 0$. On définit la surface

$$S_k = \{x \mid g_i(x) = 0, \quad i \in I(\hat{x}), \quad i \neq k\}.$$

On définit $y \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\nabla g_i(\hat{x})^\top y = 0, \quad i \in I(\hat{x}), \quad i \neq k,$$

$$\nabla g_k(\hat{x})^\top y = -1.$$

Alors y est une direction admissible en \hat{x} puisque

$$\nabla g_i(\hat{x})^\top y \leq 0, \quad i \in I(\hat{x}),$$

et que \hat{x} est un point régulier. Il existe donc une courbe $x(t) \in S_k$ et vérifiant de plus $x(t) \in K$, pour $t \in [\alpha, \alpha]$, telle que $\dot{x}(0) = y$. On a donc

$$\left. \frac{d}{dt} f(x(t)) \right|_{t=0} = \nabla f(\hat{x})^\top y, \quad (\text{VII.2.8})$$

$$= - \sum \lambda_i \nabla g_i(\hat{x})^\top y, \quad (\text{VII.2.9})$$

$$= -\lambda_k \nabla g_k(\hat{x})^\top y = \lambda_k < 0, \quad (\text{VII.2.10})$$

ce qui est impossible car f est minimum en \hat{x} . □

Problème avec contraintes d'inégalité

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.2.2 Interprétation géométrique des conditions de Kuhn et Tucker

On considère un cas où $I(\hat{x}) = \{1, 2\}$. Au point \hat{x} , l'ensemble des directions admissibles $C(\hat{x})$ forme un cône qui est l'intersection des demi-espaces d'équation

$$\nabla g_i(\hat{x})^\top y \leq 0, \quad i = 1, 2.$$

Pour que \hat{x} soit un optimum local, il faut que le vecteur $-\nabla f(\hat{x})$ forme un angle obtus avec les

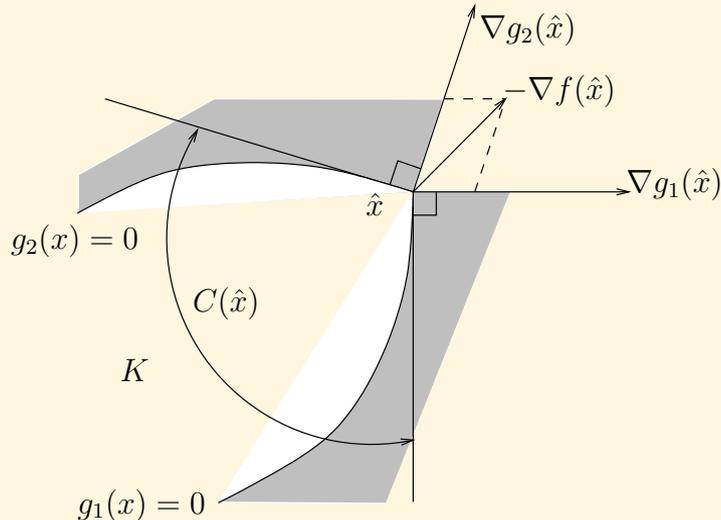


FIG. VII.2.1 – Illustration des conditions de Kuhn et Tucker sur un exemple à deux dimensions.

directions admissibles. On vérifie aussi que $-\nabla f(\hat{x})$ est combinaison linéaire (à coefficients positifs) des vecteurs $\nabla g_i(\hat{x})$, $i = 1, 2$.

Interprétation géométrique des conditions de Kuhn et Tucker

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.3 Exemples de problèmes

VII.3.1	Distance d'un point à un plan	184
VII.3.2	Pseudo-inverse de Moore et Penrose	185
VII.3.3	Exemple de programme quadratique	187

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.3.1 Distance d'un point à un plan

On cherche à calculer la distance d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ au plan défini par l'équation $Ax = b$, où $A \in \mathcal{M}_{pn}$ avec $\text{Rang } A = p$. Ce problème se pose sous la forme

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|x_0 - x\|^2$$

$$Ax = b.$$

On pose donc $f(x) = \frac{1}{2} \|x_0 - x\|^2$. On a

$$\nabla f(x) = -(x_0 - x),$$

et donc le système d'optimalité est donné par

$$(\hat{x} - x_0) + A^\top \hat{\lambda} = 0, \quad (\text{VII.3.1})$$

$$A\hat{x} = b. \quad (\text{VII.3.2})$$

En multipliant l'équation (VII.3.1) par A on peut exprimer $\hat{\lambda}$ par

$$\hat{\lambda} = (AA^\top)^{-1}(Ax_0 - d),$$

et on obtient en substituant $\hat{\lambda}$ dans (VII.3.2)

$$\hat{x} = (I - A^\top(AA^\top)^{-1}A)x_0 + A^\top(AA^\top)^{-1}d.$$

Un problème voisin est celui de la projection d'une direction d sur le plan $Ax = 0$. Le résultat précédent donne donc

$$\hat{d} = Pd,$$

avec $P = I - A^\top(AA^\top)^{-1}A$.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.3.2 Pseudo-inverse de Moore et Penrose

On cherche à résoudre le système

$$Ax = b,$$

avec $A \in \mathcal{M}_{pn}$, $p < n$ et A de rang p . Il s'agit donc d'un système sous-déterminé. La pseudo-inverse de Moore-Penrose est par définition la matrice A^\dagger telle que le vecteur

$$\hat{x} = A^\dagger b,$$

est la solution de norme minimale du système

$$Ax = b.$$

Le problème d'optimisation à résoudre est donc :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|x\|^2$$

$$Ax = b,$$

et le système d'optimalité est donné par

$$\hat{x} + A^\top \hat{\lambda} = 0, \quad (\text{VII.3.3})$$

$$A\hat{x} = b. \quad (\text{VII.3.4})$$

Il suffit de substituer \hat{x} dans la deuxième équation et puisque AA^\top est de rang p on obtient

$$\hat{x} = A^\top (AA^\top)^{-1} b,$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

et donc la pseudo-inverse est donnée par

$$A^\dagger = A^\top (AA^\top)^{-1}.$$

Pseudo- inverse de Moore et Penrose

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.3.3 Exemple de programme quadratique

On cherche à résoudre le problème

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^2} \quad & \frac{1}{2} \|x - x_0\|^2 \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0, \\ & x_1 + x_2 \leq 1, \end{aligned}$$

où $x_0 = (1, \frac{1}{2})$. Il s'agit d'un problème avec contraintes d'inégalité se mettant sous la forme $g(x) \leq 0$ avec

$$g(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Sur le dessin, on peut s'assurer que très probablement seule la contrainte numéro 3 est active. On peut s'en persuader par le calcul de la façon suivante : on peut tenter de résoudre le système

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \lambda_3 \nabla g_3(x) &= 0, \\ g_3(x) &= 0, \end{aligned}$$

soit ici

$$\begin{aligned} x - x_0 + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0, \\ x_1 + x_2 &= 1, \end{aligned}$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

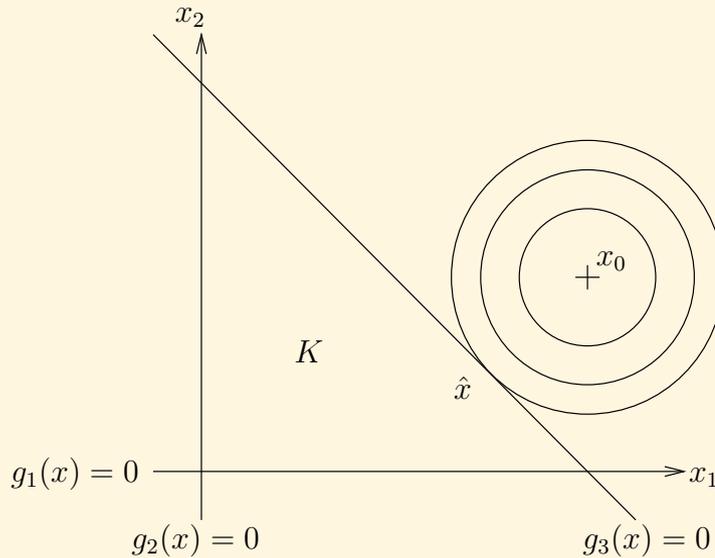


FIG. VII.3.2 – Exemple de programme quadratique

ou bien encore

$$\begin{aligned}x_1 + \lambda_3 &= 1, \\x_2 + \lambda_3 &= \frac{1}{2}, \\x_1 + x_2 &= 1,\end{aligned}$$

Exemple de programme quadratique

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

dont la solution est donnée par

$$x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = \frac{1}{4}, \lambda_3 = \frac{1}{4}.$$

On a bien $\lambda_3 \geq 0$ ce qui justifie *a posteriori* le choix de saturer la contrainte numéro 3.

Exemple de programme quadratique

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.4 Conditions suffisantes d'optimalité

VII.4.1	Définition du lagrangien	191
VII.4.2	Condition nécessaire du second ordre	192
VII.4.3	Condition nécessaire du second ordre	195

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.4.1 Définition du lagrangien

Considérons le problème (*PCE*) avec contraintes d'égalité

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \\ h(x) = 0, \end{cases}$$

où $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Définition VII.4.1. On appelle lagrangien associé au problème (*PCE*) la fonction $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i h_i(x).$$

Les conditions de Lagrange peuvent se reformuler à l'aide du lagrangien : soit \hat{x} solution de (*PCE*). Alors il existe $\hat{\lambda}$ tel que

$$\nabla_x L(\hat{x}, \hat{\lambda}) = 0,$$

où on a noté ∇_x le gradient partiel par rapport à la variable x . Dans la suite nous ferons l'hypothèse que h et f sont deux fois continûment différentiables.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.4.2 Condition nécessaire du second ordre

Théorème VII.4.2. Soit \hat{x} un point régulier solution de (PCE). Alors il existe $\hat{\lambda}$ tel que

$$\nabla_x L(\hat{x}, \hat{\lambda}) = 0,$$

et de plus pour tout $y \in T(\hat{x})$, $y \neq 0$, on a

$$y^\top \nabla_{xx}^2 L(\hat{x}, \hat{\lambda}) y \geq 0.$$

Démonstration : Soit $y \in T(\hat{x})$. On sait qu'il existe une courbe $x(t)$ définie pour $t \in [-\alpha, \alpha]$ vérifiant

$$\begin{cases} x(t) \in S, \forall t \in [-\alpha, \alpha], \alpha > 0 \\ x(0) = \hat{x}, \\ \dot{x}(0) = y. \end{cases}$$

Puisque \hat{x} est optimal on a

$$f(x(0)) \leq f(x(t)), \forall t,$$

et puisque la fonction f est deux fois différentiable, on a nécessairement

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} f(x(t)) \right|_{t=0} \geq 0.$$

On a ici d'une part

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \nabla f(x(t))^\top \dot{x}(t),$$

et donc

$$\frac{d^2}{dt^2} f(x(t)) = \dot{x}(t)^\top \nabla^2 f(x(t)) \dot{x}(t) + \nabla f(x(t))^\top \ddot{x}(t), \quad (\text{VII.4.1})$$

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} f(x(t)) \right|_{t=0} = y^\top \nabla^2 f(\hat{x}) y + \nabla f(\hat{x})^\top \ddot{x}(0) \geq 0 \quad (\text{VII.4.2})$$

D'autre part on a $h_i(x(t)) = 0$ donc

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} h_i(x(t)) \right|_{t=0} = y^\top \nabla^2 h_i(\hat{x}) y + \nabla h_i(\hat{x})^\top \ddot{x}(0) = 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

On peut multiplier chacune de ces égalités par $\hat{\lambda}_i$ et en faire la somme, ce qui donne

$$y^\top \left(\sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i \nabla^2 h_i(\hat{x}) \right) y + \left(\sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i \nabla h_i(\hat{x})^\top \right) \ddot{x}(0) = 0.$$

En additionnant cette dernière égalité à (VII.4.2) on obtient

$$y^\top \left(\nabla^2 f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i \nabla^2 h_i(\hat{x}) \right) y + \left(\nabla f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i \nabla h_i(\hat{x}) \right)^\top \ddot{x}(0) \geq 0,$$

et puisque le deuxième terme est nul (condition de Lagrange) on obtient bien l'inégalité annoncée. □

Le résultat suivant est une généralisation du théorème précédent dont la démonstration sera admise.

Théorème VII.4.3. Soit $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^p$ vérifiant les conditions

$$h(\hat{x}) = 0,$$

**Condition
nécessaire du
second ordre**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

$$\begin{aligned}\nabla f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i \nabla h_i(\hat{x}) &= 0, \\ y^\top \nabla_{xx}^2 L(\hat{x}, \hat{\lambda}) y &\geq 0, \quad \forall y \in T(\hat{x}), y \neq 0,\end{aligned}$$

alors \hat{x} est un minimum local du problème (PCE).

**Condition
nécessaire du
second ordre**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VII.4.3 Condition nécessaire du second ordre

Théorème VII.4.4. Soit $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}^p$ vérifiant les conditions

$$\begin{aligned}g(\hat{x}) &\leq 0, \\ \nabla f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^p \hat{\lambda}_i \nabla g_i(\hat{x}) &= 0, \\ \hat{\lambda}_i &\geq 0, \quad i = 1 \dots m, \\ \hat{\lambda}_i g_i(\hat{x}) &= 0, \quad i = 1 \dots m, \\ y^\top \nabla_{xx}^2 L(\hat{x}, \hat{\lambda}) y &\geq 0, \quad \forall y \in T^+(\hat{x}), \quad y \neq 0,\end{aligned}$$

où on a noté $T^+(\hat{x})$ le plan tangent en \hat{x} à la surface

$$S^+ = \{x \in \mathbb{R}^n, g_i(\hat{x}) = 0, i \in I(\hat{x}) \text{ et } \lambda_i > 0\}.$$

Alors \hat{x} est un minimum local du problème (PCE).

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Chapitre VIII

Méthodes primales

VIII.1	Contraintes d'égalité linéaires	197
VIII.2	Contraintes d'inégalité linéaires	204
VIII.3	Méthodes de pénalisation	208
VIII.4	Méthodes par résolution des équations de Kuhn et Tucker	216
	Exemples du chapitre VIII	222

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VIII.1 Contraintes d'égalité linéaires

VIII.1.1	La méthode du gradient projeté	198
VIII.1.2	La méthode de Newton projetée	201

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VIII.1.1 La méthode du gradient projeté

On s'intéresse à un problème avec contraintes d'égalité lineaires

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \\ Ax - b = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(VIII.1.1)} \\ \text{(VIII.1.2)} \end{array}$$

et nous ferons l'hypothèse que $A \in \mathcal{M}_{pn}$ est de rang maximal. Une idée assez naturelle consiste à appliquer une méthode de descente qui prenne en compte la contrainte $Ax - b = 0$. Supposons que nous disposons d'un point $x_0 \in K = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax - b = 0\}$. On sait qu'une direction admissible doit vérifier

$$Ad = 0. \quad \text{(VIII.1.3)}$$

On peut chercher la meilleure direction de descente respectant (VIII.1.3) en résolvant le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \nabla f(x)^\top d, \\ Ad = 0, \\ \|d\| = 1. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(VIII.1.4)} \\ \text{(VIII.1.5)} \\ \text{(VIII.1.6)} \end{array}$$

Proposition VIII.1.1. *Le vecteur d solution du problème (VIII.1.4),(VIII.1.5),(VIII.1.6) est donné par $d = y / \|y\|$ où y est la projection orthogonale de $-\nabla f(x)$ sur $\text{Ker } A$.*

Démonstration : On peut écrire que

$$-\nabla f(x) = y + z,$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

où $y \in \text{Ker } A$ et $z \in (\text{Ker } A)^\perp$, ces deux sous-espaces étant complémentaires dans \mathbb{R}^n . On a donc

$$-\nabla f(x)^\top d = -y^\top d.$$

Comme d est un vecteur unitaire quelconque $y^\top d$ sera maximal pour

$$d = \frac{y}{\|y\|},$$

d'où le résultat. On remarquera que si $y \neq 0$, le vecteur d est bien une direction de descente car on a

$$\nabla f(x)^\top = -y^\top (y + z) = -y^\top y < 0.$$

□

Pour former la matrice de projection sur $\text{Ker } A$ on utilise en général la factorisation QR de la matrice A^\top , qui s'exprime sous la forme

$$A^\top = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix},$$

où $R \in \mathcal{M}_{pp}$ est triangulaire supérieure et $Q \in \mathcal{M}_{nn}$ est orthogonale, et se décompose en $Q = [U \ V]$ où les colonnes de $U \in \mathcal{M}_{n,p}$ forment une base orthogonale de $\text{Im } A^\top$ et les colonnes de $V \in \mathcal{M}_{n,n-p}$ une base orthogonale de $(\text{Im } A^\top)^\perp = \text{Ker } A$. Dans ce cas la matrice de la projection orthogonale sur $\text{Ker } A$ s'écrit

$$P = I - UU^\top = VV^\top.$$

Remarque VIII.1.1. Dans l'algorithme que nous allons étudier, la matrice de projection peut être calculée une fois pour toutes puisque A est donnée. Cependant, pour les problèmes avec contraintes

La méthode du gradient projeté

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

d'inégalité linéaires, on sera amené à considérer une succession de problèmes avec contraintes d'égalité, et la matrice A pourra évoluer à chaque itération, par ajout ou suppression d'une ligne. Le choix de la factorisation QR est tout indiqué car il existe des techniques de mise à jour particulièrement économiques, ce qui n'est pas le cas quand on exprime la matrice P sous la forme classique

$$P = I - A^\top [AA^\top]^{-1}A.$$

La méthode du gradient projeté consiste tout simplement à mettre en oeuvre une méthode de descente utilisant à chaque pas la direction $d_k = -VV^\top \nabla f(x_k)$. Les itérations sont poursuivies jusqu'à ce que $d_k = 0$. Cela signifie alors que $\nabla f(x) \in \text{Im } A^\top$ et donc qu'il existe λ tel que

$$\nabla f(x_k) = -A^\top \lambda.$$

On peut utiliser la factorisation de A^\top pour obtenir λ par résolution du système linéaire

$$R\lambda = -U^\top \nabla f(x).$$

Algorithme du gradient projeté

1. Poser $k = 0$ et choisir x_0 admissible.
2. Calculer la projection $d_k = -VV^\top \nabla f(x_k)$,
3. Si $d_k = 0$
 - Calculer $\lambda = -R^{-1}U^\top \nabla f(x_k)$
 - Arrêter les itérations.
4. Déterminer $\rho_k > 0$ réalisant le minimum de $f(x_k + \rho d_k)$.
5. Poser $x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k$, faire $k \leftarrow k + 1$ et retourner en 2.

La méthode du gradient projeté

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VIII.1.2 La méthode de Newton projetée

La méthode du gradient projeté souffrant des mêmes problèmes que la méthode du gradient (vitesse de convergence très sensible au conditionnement), on lui préfère souvent les méthodes de quasi-Newton adaptées au cas des contraintes linéaires. Il est plus facile de comprendre comment fonctionnent ces méthodes en faisant l'analyse suivante

Supposons que l'on dispose d'un point x_0 admissible. L'idée est de poser $x = x_0 + Vz$ et de considérer une nouvelle fonction \tilde{f} définie par

$$\tilde{f}(z) = f(x_0 + Vz),$$

où les colonnes de V forment une base orthogonale de $\text{Ker } A$ (on a vu comment obtenir une telle matrice). Alors par construction le problème (VIII.1.2) est équivalent au problème sans contraintes

$$\min_{z \in \mathbb{R}^p} \tilde{f}(z), \tag{VIII.1.7}$$

puisque

$$A(x_0 + Vz) - b = Ax_0 - b + AVz = 0.$$

On peut donc appliquer n'importe quelle méthode de descente à la résolution de (VIII.1.7). Notons que l'on a

$$\nabla \tilde{f}(z) = V^\top \nabla f(x_0 + Vz),$$

donc la méthode du gradient appliquée à la minimisation de $\tilde{f}(z)$ s'écrit

$$z_{k+1} = z_k - \rho_k V^\top \nabla f(x_0 + Vz_k),$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

et si on pose $x_k = x_0 + Vz_k$, les itérations précédentes s'écrivent

$$x_{k+1} = x_k - \rho_k VV^\top \nabla f(x_k),$$

ce qui redonne exactement la méthode du gradient projeté. On peut de la même manière écrire la méthode de Newton appliquée à la résolution de (VIII.1.7) : le hessien de \tilde{f} s'écrit

$$\nabla^2 \tilde{f}(z) = V^\top \nabla^2 f(x_0 + Vz)V,$$

si si on note $G_k = \nabla^2 \tilde{f}(z_k)$ la direction de Newton en z_k s'écrit

$$p_k = -G_k^{-1} \nabla \tilde{f}(z_k).$$

Si la matrice G_k est définie positive alors p_k sera une direction de descente pour \tilde{f} et le vecteur Vp_k sera une direction de descente pour f puisque

$$\nabla f(x_k)^\top Vp_k = \nabla \tilde{f}(z_k)^\top p_k < 0.$$

Remarque VIII.1.2. *On sait que dans le cas général un optimum local du problème (PCE) est caractérisé par*

$$y^\top \nabla_{xx}^2 L(\hat{x}, \hat{\lambda})y \geq 0, \forall y \in T(\hat{x}), y \neq 0.$$

Or dans le cas des contraintes linéaires on a

$$\nabla_{xx}^2 L(x, \lambda) = \nabla^2 f(x), \quad (\text{VIII.1.8})$$

et le sous espace $T(\hat{x})$ n'est autre que $\text{Ker } A$. Et donc si l'on dispose d'une matrice V dont les colonnes forment une base orthogonale de $\text{Ker } A$, tout vecteur $y \in T(\hat{x})$ s'exprime sous la forme $y = Vz$ et la condition (VIII.1.8) s'écrit

$$zV^\top \nabla^2 f(\hat{x})Vz > 0, \forall z.$$

La méthode de Newton projetée

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

On est donc assuré que le hessien projeté est défini positif à l'optimum, ce qui justifie l'utilisation des méthodes de quasi-Newton.

On peut donc envisager une méthode de quasi-Newton ou la mise à jour opère non pas sur le hessien de f mais sur le hessien projeté. Voici l'algorithme correspondant pour la méthode BFGS :

Algorithme de la méthode BFGS projetée

1. Poser $k = 0$, choisir x_0 admissible et poser $H_0 = I$.
2. Poser $g_k = V^\top \nabla f(x_k)$.
3. Si $g_k = 0$
 - Calculer $\lambda = -R^{-1}U^\top \nabla f(x_k)$
 - Arrêter les itérations.
4. Calculer la direction $p_k = -H_k^{-1}g_k$.
5. Déterminer $\rho_k > 0$ réalisant le minimum de $f(x_k + \rho V p_k)$.
6. Poser $x_{k+1} = x_k + \rho_k V p_k$.
7. Calculer $g_{k+1} = V^\top \nabla f(x_{k+1})$ et $y_k = g_{k+1} - g_k$.
8. Mise à jour du hessien projeté
$$H_{k+1} = H_k + \frac{y_k y_k^\top}{\rho_k y_k^\top p_k} + \frac{g_k g_k^\top}{p_k^\top g_k}$$
9. faire $k \leftarrow k + 1$ et retourner en 2.

La méthode de Newton projetée

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VIII.2 Contraintes d'inégalité linéaires

VIII.2.1 Méthode de directions réalisables 205

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VIII.2.1 Méthode de directions réalisables

On s'intéresse maintenant à un problème avec contraintes d'inégalités linéaires

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \\ Ax - b \leq 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(VIII.2.1)} \\ \text{(VIII.2.2)} \end{array}$$

On peut essayer de voir comment adapter la stratégie de l'algorithme du gradient projeté. Supposons que nous disposons d'un point initial admissible $x_0 \in K = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax - b \leq 0\}$. Notons I_0 l'ensemble des indices des contraintes saturées, soit

$$I_0 = \{i \mid A_i x_0 - b_i = 0\}.$$

On peut chercher une direction de descente d qui permette, au moins pour un petit déplacement, de rester dans K . Si on note $A_0 \in \mathcal{M}_{pn}$ la matrice composée des lignes $i \in I_0$ on doit donc avoir

$$A_{I_0} d = 0. \quad \text{(VIII.2.3)}$$

Après calcul de la factorisation $(U \ V) \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$ de $A_{I_0}^\top$, une direction admissible d peut être obtenue par $d = -VV^\top \nabla f(x_0)$.

Il y a ensuite deux cas à envisager :

1. Si $d \neq 0$, il faut déterminer le déplacement maximal autorisé par les contraintes non saturées, c'est à dire ρ_{max} tel que

$$\rho_{max} = \{\rho \mid \rho \geq 0, A_i(x_0 + \rho d) - b_i \leq 0, i \notin I_0\}.$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)



Ensuite, on cherche le pas optimal ρ_{opt} dans direction d . Ce pas pouvant faire sortir du domaine admissible, on prendra donc toujours

$$\rho = \min(\rho_{opt}, \rho_{max}),$$

en notant bien que lorsque $\rho = \rho_{max}$, cela signifie qu'une nouvelle contrainte sera saturée.

2. Si $d = 0$ cela signifie que $\nabla f(x) \in \text{Im } A_{I_0}^\top$ et donc qu'il existe λ tel que

$$\nabla f(x) = -A_{I_0}^\top \lambda,$$

et qui s'obtient par résolution du système linéaire

$$R\lambda = -U^\top \nabla f(x),$$

et il faut ensuite considérer deux cas

- (a) Si $\lambda \geq 0$, alors x satisfait les conditions de Kuhn et Tucker. Le point x est donc un optimum local du problème.
- (b) Sinon, on supprime dans I_0 une des contraintes pour lesquelles $\lambda_i < 0$ (par exemple la plus négative). On obtient alors une nouvelle matrice A_1 qui permet de déterminer une nouvelle direction de descente en x_0 . On peut ensuite poursuivre les itérations.

On peut donc résumer l'algorithme de la façon suivante :

Algorithme du gradient projeté (contraintes d'inégalité)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

1. Poser $k = 0$ et choisir x_0 .
2. Déterminer $I_k = \{i \mid A_i x_k - b_i = 0\}$.
3. Former la matrice $A_{I_k} = \{A_i\}_{i \in I_k}$.
4. Calculer ou mettre à jour la factorisation $A_{I_k}^\top = [U_k \ V_k] \begin{pmatrix} R_k \\ 0 \end{pmatrix}$
5. Calculer la projection $d_k = -V_k V_k^\top \nabla f(x_k)$
6. Si $d_k = 0$
 - Calculer $\lambda = -(R_k)^{-1} U_k^\top \nabla f(x_k)$
 - Si $\lambda \geq 0$ alors on s'arrête
 - Sinon, choisir j tel que $\lambda_j \leq \lambda_i, \forall i$, faire $I_k = I_k - \{j\}$ et retourner en 3.
7. Calculer $\rho_{max} = \{\rho \mid \rho \geq 0, A_i(x_k + \rho d_k) - b_i \leq 0, i \notin I_k\}$.
8. Déterminer ρ_k réalisant le minimum de $f(x_k + \rho d_k)$ sur $[0, \rho_{max}]$.
9. Poser $x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k$, faire $k \leftarrow k + 1$ et retourner en 2.

Méthode de directions réalisables

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VIII.3 Méthodes de pénalisation

VIII.3.1	Méthode de pénalisation externe	209
VIII.3.2	Méthode de pénalisation interne	213
VIII.3.3	Estimation des multiplicateurs	214

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VIII.3.1 Méthode de pénalisation externe

Exemples :

[Exemple VIII.1](#)

On considère un problème avec contraintes d'inégalité non-linéaires :

$$(PCI) \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), & \text{(VIII.3.1)} \\ \text{sous les contraintes} \\ g(x) \leq 0, & \text{(VIII.3.2)} \end{cases}$$

Le but des méthodes de pénalisation est de résoudre (PCI) de façon approchée de la façon suivante : on définit la fonction $\varphi(x)$ par

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^m (g_i^+(x))^2,$$

où $[\cdot]^+$ est la fonction *partie positive* définie par

$$y^+ = \max(0, y).$$

Si on note $K = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) \leq 0\}$, la fonction φ vérifie par construction

$$\begin{cases} \varphi(x) = 0, & \text{pour } x \in K, \\ \varphi(x) > 0, & \text{pour } x \notin K. \end{cases}$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

On introduit alors le problème P_ϵ

$$(P_\epsilon) \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f_\epsilon(x), & \text{(VIII.3.3)} \\ f_\epsilon(x) = f(x) + \frac{1}{\epsilon} \varphi(x), & \text{(VIII.3.4)} \end{cases}$$

dont on notera x_ϵ la solution, vérifiant

$$f_\epsilon(x_\epsilon) \leq f_\epsilon(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Le nom de pénalité *extérieure* provient du fait que x_ϵ est toujours à l'extérieur (au sens large) de K comme le montre le résultat suivant :

Proposition VIII.3.1. *S'il existe au moins une contrainte saturée à l'optimum \hat{x} du problème (PCI) alors le vecteur solution du problème pénalisé (P_ϵ) vérifie nécessairement*

$$\exists i_0, g_{i_0}(x_\epsilon) \geq 0.$$

Démonstration : Montrons la contraposée : si $g_i(x_\epsilon) < 0, \forall i$ on a par définition $x_\epsilon \in K$.
Puisque

$$f_\epsilon(x_\epsilon) \leq f_\epsilon(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

donc en particulier pour $x = \hat{x}$, on a

$$f_\epsilon(x_\epsilon) \leq f_\epsilon(\hat{x}),$$

mais comme $x_\epsilon \in K$ et $\hat{x} \in K$ on a

$$\varphi(x_\epsilon) = \varphi(\hat{x}) = 0,$$

**Méthode de
pénalisation
externe**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

et donc

$$f(x_\epsilon) \leq f(\hat{x}).$$

D'où $x_\epsilon = \hat{x}$. On a donc $g_i(\hat{x}) < 0, \forall i$ et aucune contrainte n'est saturée en \hat{x} . □ En général, on a toujours $x_\epsilon \notin K$ comme le montre l'[exemple de la pénalisation](#) mais sous des hypothèses assez peu restrictives, x_ϵ tend vers une solution du problème (PCI) quand ϵ tend vers 0.

Théorème VIII.3.1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de pénalisation extérieure vérifiant :

- $\varphi(x) \geq 0$,
- $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in K$,
- φ continue.

On suppose d'autre part que f est continue, que K est fermé et que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$,
- K est borné et $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$.
- φ continue.

Alors, quand ϵ_k tend vers 0, la suite x_{ϵ_k} admet au moins un point d'accumulation qui est alors une solution optimale du problème (PCI).

Lorsqu'on met en oeuvre cette méthode de façon pratique, on ne peut pas prendre tout de suite ϵ_k très petit, à cause des problèmes de conditionnement que cela peut causer. On commence donc avec une valeur du type $\epsilon_0 = 1$, et chaque solution x_{ϵ_k} est prise comme vecteur initial pour résoudre le problème avec $\epsilon_{k+1} = \epsilon_k/100$ (par exemple). On peut bien sûr utiliser n'importe quelle méthode pour résoudre le problème $\min_x f_{\epsilon_k}(x)$ (BFGS, gradient conjugué, ...).

Algorithme de la méthode de pénalisation

**Méthode de
pénalisation
externe**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

1. Choisir x_0 , $\epsilon_1 = 1$ et poser $k = 1$
2. Trouver x_k solution du problème $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f_{\epsilon_k}(x)$ en partant de x_{k-1} .
3. Poser $\epsilon_{k+1} = \epsilon_k/100$
4. faire $k \leftarrow k + 1$ et retourner en 2

Méthode de pénalisation externe

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VIII.3.2 Méthode de pénalisation interne

Dans le cas des méthodes internes, en général, x_ϵ n'est jamais dans K (sauf cas particulier) : cela peut poser des problèmes si par exemple la fonction f n'est pas définie hors de K . Les méthodes internes permettent d'éviter cet inconvénient. Leur principe est le même que pour les méthodes externes : on considère une fonction

$$f_\epsilon(x) = f(x) + \epsilon\psi(x),$$

mais ici la fonction $\psi(x)$ est définie pour $x \in K$ et est du type

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)^2}.$$

Puisque l'on a $\psi(x) \rightarrow \infty$ quand on s'approche de la frontière de K , on qualifie souvent ψ de fonction *barrière*. Les propriétés de convergence sont les mêmes que pour les méthodes externes, mais il faut ici disposer d'un $x_0 \in K$, ce qui peut être difficile dans certains cas.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VIII.3.3 Estimation des multiplicateurs

Les méthodes de pénalisation ne sont en général jamais utilisées pour obtenir la solution du problème avec contraintes, car cela nécessiterait d'utiliser des paramètres de pénalisation beaucoup trop petits. En revanche, elles permettent de calculer des estimations correctes des multiplicateurs.

Pour les méthodes externes, le point x_k est solution du problème $\min f_{\epsilon_k}(x)$ où

$$f_{\epsilon}(x) = f(x) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m [g_i^+(x)]^2,$$

et vérifie donc les conditions d'optimalité

$$\nabla f(x_k) + \frac{2}{\epsilon} \sum_{i=1}^m g_i^+(x_k) \nabla g_i(x_k) = 0.$$

Sous les hypothèses du théorème [VIII.3.1](#) $x_k \rightarrow \hat{x}$ et donc pour les contraintes non saturées, puisque $g_i(\hat{x}) < 0$, il existe k_0 tel que

$$k > k_0 \Rightarrow g_i(x_k) < 0, \quad i \notin I(\hat{x}).$$

Si on suppose que \hat{x} est régulier, les conditions de Kuhn et Tucker sont vérifiées et on a

$$\nabla f(\hat{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(\hat{x}) = 0.$$

Si on note maintenant que pour $k > k_0$,

$$\nabla f(x_k) + \frac{2}{\epsilon} \sum_{i \in I} g_i^+(x_k) \nabla g_i(x_k) = 0,$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

alors par continuité de ∇f et ∇g on en déduit que pour $i \in I$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{\epsilon} g_i^+(x_k) = \lambda_i.$$

On peut bien sûr faire le même type de raisonnement pour la méthode de pénalité interne.

Estimation des multiplicateurs

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VIII.4 Méthodes par résolution des équations de Kuhn et Tucker

VIII.4.1	Cas des contraintes d'égalité	217
VIII.4.2	Méthode de Wilson	219
VIII.4.3	Cas des contraintes d'inégalité	220

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VIII.4.1 Cas des contraintes d'égalité

On cherche à résoudre le problème :

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \\ h_i(x) = 0, \quad i = 1 \dots p \end{aligned} \quad (\text{VIII.4.1})$$

On sait que la recherche d'un point de Kuhn et Tucker revient à résoudre le système à $n+p$ inconnues et $n+p$ inconnues

$$\begin{cases} \nabla_x L(x, \lambda) = 0, \\ h(x) = 0, \end{cases} \quad (\text{VIII.4.2})$$

où on a noté $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^p \lambda_i h_i(x)$ le lagrangien associé à (VIII.4.1). La méthode de Newton consiste, à partir d'un point (x_k, λ_k) , à linéariser (VIII.4.2) au voisinage de ce point, et à définir (x_{k+1}, λ_{k+1}) comme la solution du système obtenu. On peut écrire les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x_k, \lambda_k) + \nabla_x^2 L(x_k, \lambda_k)(x_{k+1} - x_k) + \nabla h(x_k)(\lambda_{k+1} - \lambda_k) &= 0, \\ h(x_k) + \nabla h(x_k)^\top (x_{k+1} - x_k) &= 0, \end{aligned}$$

où $\nabla_x L(x_k, \lambda_k) = \nabla f(x_k) + \nabla h(x_k) \lambda_k$. Si on pose

$$J_k = \nabla h(x_k)^\top = \frac{\partial h}{\partial x}(x_k),$$

et $H_k = \nabla_x^2 L(x_k, \lambda_k)$, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} H_k & J_k^\top \\ J_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ \lambda_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f(x_k) \\ -h(x_k) \end{pmatrix}. \quad (\text{VIII.4.3})$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Une méthode basée sur la résolution itérative de (VIII.4.3) présentera les inconvénients habituels de la méthode de Newton : la convergence est locale. De plus, les équations de Kuhn et Tucker sont aussi vérifiées pour les maximums. Si on veut remédier à ces inconvénients il faut disposer d'une bonne estimation initiale de $(\hat{x}, \hat{\lambda})$, qui peut par exemple être fournie par une méthode de pénalisation.

Cas des contraintes d'égalité

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VIII.4.2 Méthode de Wilson

Dans la méthode précédente, pour éviter les points stationnaires qui ne sont pas des minimum, on peut faire l'analyse suivante : si on note $s_k = x_{k+1} - x_k$ on observe que le système (VIII.4.3) s'écrit

$$H_k y_k + J_k^\top \lambda_{k+1} = -\nabla f(x_k).$$

Le vecteur y_k est la solution du problème d'optimisation quadratique suivant :

$$\begin{cases} \min_y \frac{1}{2} y^\top H_k y + \nabla f(x_k)^\top y, \\ J_k y + h(x_k) = 0, \end{cases} \quad (\text{VIII.4.4})$$

et λ_{k+1} est le multiplicateur associé. Au lieu de résoudre le système (VIII.4.3) on peut donc résoudre le problème (VIII.4.4), ce qui permet d'éviter les points stationnaires qui ne sont pas des minima. La résolution de ce problème peut se faire avec toute méthode adaptée aux problèmes quadratiques. Cette extension de la méthode de Newton est due à Wilson.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

VIII.4.3 Cas des contraintes d'inégalité

La méthode de Wilson vue au grain précédent se généralise très facilement au cas des contraintes d'inégalité. Si le problème original est de la forme :

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1 \dots m, \end{aligned} \quad (\text{VIII.4.5})$$

les contraintes linéarisées prennent la forme

$$\nabla g(x_k)^\top y + g(x_k) \leq 0.$$

On peut alors utiliser une méthode consistant à résoudre itérativement le problème quadratique

$$\begin{cases} \min_y \frac{1}{2} y^\top H_k y + \nabla f(x_k)^\top y, \\ J_k y + g(x_k) \leq 0, \end{cases} \quad (\text{VIII.4.6})$$

Remarque VIII.4.1. *Comme on l'a déjà dit la méthode de Wilson (pour les contraintes d'égalité et d'inégalité) ne converge que localement. La globalisation de cette méthode peut se faire en utilisant une approximation de quasi-Newton pour la matrice $H_k = \nabla_x^2 L(x_k, \lambda_k)$ et en faisant une recherche linéaire dans la direction s_k pour définir $x_{k+1} = x_k + \rho_k s_k$. Lors de la recherche linéaire, on cherche alors à minimiser une fonction de mérite du type*

$$\theta(x) = f(x) + c \sum_{k=1}^p |h_k(x)|,$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

dans le cas des contraintes d'égalité, ou

$$\sigma(x) = f(x) + c \sum_{k=1}^m g_k^+(x),$$

dans le cas des contraintes d'inégalité (dans ce dernier cas c doit être un majorant des multiplicateurs optimaux). Les fonctions $\sigma(x)$ et $\theta(x)$ sont des fonctions de pénalisation exacte : cette terminologie traduit le fait que contrairement aux fonctions de pénalisation différentiables que l'on a vu précédemment, le minimum de θ ou σ peut coïncider avec \hat{x} pour des valeurs finies de c .

Cas des contraintes d'inégalité

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemples du chapitre VIII

VIII.1	Un problème pénalisé	223
VIII.2	Equilibre d'une chaîne	224

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemple VIII.1 Un problème pénalisé

On considère le problème

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2}x^2, \\ x \geq 1. \end{cases}$$

La fonction pénalisée s'écrit

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{\epsilon}([1-x]^+)^2.$$

Pour $x \notin K$ on a

$$\nabla f_\epsilon(x) = x - \frac{2}{\epsilon}(1-x).$$

Si on fait l'hypothèse a priori que $x_\epsilon \notin K$ alors on a

$$x_\epsilon - \frac{2}{\epsilon}(1-x_\epsilon) = 0,$$

et donc $x_\epsilon = (1 + \epsilon/2)^{-1}$. On a bien $x_\epsilon \notin K$ et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x_\epsilon = 1.$$

[Retour au grain](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemple VIII.2 Equilibre d'une chaîne

TODO Eric : un exemple pour ce chapitre, comme l'exemple de la chaîne ?

[Retour au grain](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Chapitre IX

Méthodes utilisant la notion de dualité

IX.1	Elements sur la dualité	226
IX.2	Methodes duales	232
	Exemples du chapitre IX	236

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

IX.1 Elements sur la dualité

IX.1.1	Le problème dual	227
IX.1.2	Point-col du lagrangien	230

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

IX.1.1 Le problème dual

On s'intéresse ici aux problèmes avec contrainte d'inégalité du type

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \\ g(x) \leq 0, \end{aligned} \tag{IX.1.1}$$

et on note comme d'habitude $K = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) \leq 0\}$. Le problème (IX.1.1) est appelé *problème primal* par opposition au *problème dual* que l'on va maintenant définir.

Soit $\varphi(x)$ une fonction indicatrice de K :

$$\varphi(x) = 0, \text{ si } x \in K, \tag{IX.1.2}$$

$$\varphi(x) = +\infty, \text{ sinon.} \tag{IX.1.3}$$

Alors le problème primal est équivalent à

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \varphi(x).$$

On peut construire la fonction φ de la façon suivante :

$$\varphi(x) = \max_{\lambda \geq 0} \lambda^\top g(x) = \max_{\lambda \geq 0} \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x).$$

On peut vérifier que la fonction ainsi définie a bien les caractéristiques données par (IX.1.2)-(IX.1.3) : si $x \in K$ on a $g_i(x) \leq 0$ et donc $\lambda^\top g(x) \leq 0$, le max est donc atteint pour $\lambda = 0$. Si $x \notin K$ il existe

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

j tel que $g_j(x) > 0$, et donc $\lambda^\top g(x)$ peut être rendu arbitrairement grand en faisant tendre λ_j vers $+\infty$.

Le problème primal est donc équivalent au problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left(f(x) + \max_{\lambda \geq 0} \lambda^\top g(x) \right),$$

et si on utilise le lagrangien $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^\top g(x)$, on peut alors noter que le problème primal s'écrit

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda). \quad (\text{IX.1.4})$$

Définition IX.1.1. On appelle problème dual du problème (IX.1.1) le problème

$$\max_{\lambda \geq 0} \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda), \quad (\text{IX.1.5})$$

et appelle $w(\lambda) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda)$ la fonction duale.

Proposition IX.1.1. La fonction duale $w(\lambda)$ est concave.

Démonstration : Soient $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\theta \in [0, 1]$ et $\lambda = \theta \lambda_1 + (1 - \theta) \lambda_2$. Il existe x_1, x_2 et x tels que

$$\begin{aligned} w(\lambda_1) &= L(x_1, \lambda_1), \\ w(\lambda_2) &= L(x_2, \lambda_2), \\ w(\lambda) &= L(x, \lambda). \end{aligned}$$

Le problème dual

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

On a donc par définition de la fonction duale :

$$\begin{aligned}w(\lambda_1) &\leq L(x, \lambda_1), \\w(\lambda_2) &\leq L(x, \lambda_2).\end{aligned}$$

Si on multiplie la première inéquation par θ et la deuxième par $(1 - \theta)$ il vient

$$\theta w(\lambda_1) + (1 - \theta)w(\lambda_2) \leq f(x) + [\theta\lambda_1 + (1 - \theta)\lambda_2]^\top g(x) = w(\lambda).$$

□ Ce qui est remarquable dans cette propriété est que le résultat ne suppose absolument rien sur la convexité des fonctions f et g_i .

Le problème dual

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

IX.1.2 Point-col du lagrangien

On montre facilement la proposition suivante :

Proposition IX.1.2. *On a*

$$\max_{\lambda \geq 0} \left\{ \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda) \right\} \leq \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) \right\}.$$

Démonstration : On a $L(x, \lambda) \leq \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda)$ et donc par définition de $w(\lambda)$

$$w(\lambda) \leq \min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda).$$

On a donc

$$\max_{\lambda \geq 0} w(\lambda) \leq \min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda),$$

ce qui montre le résultat.

□ Si l'on note que par construction

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) = f(\hat{x}),$$

où \hat{x} est la solution du problème primal, on a donc

$$\max_{\lambda \geq 0} w(\lambda) \leq f(\hat{x}).$$

Alors s'il existe bien un maximum de la fonction duale atteint pour $\lambda = \bar{\lambda}$, la valeur $w(\bar{\lambda})$ est un minorant de $f(\hat{x})$ et il existe un point $x(\bar{\lambda})$ tel que

$$w(\bar{\lambda}) = L(x(\bar{\lambda}), \bar{\lambda}) \leq f(\hat{x}).$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Le théorème suivant précise dans quelles conditions on a $x(\bar{\lambda}) = \hat{x}$:

Théorème IX.1.2. *S'il existe un couple $(\hat{x}, \hat{\lambda})$ tel que*

$$L(\hat{x}, \lambda) \leq L(\hat{x}, \hat{\lambda}) \leq L(x, \hat{\lambda}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^m,$$

alors \hat{x} est une solution du problème primal et $\hat{\lambda}$ est le multiplicateur de Kuhn et Tucker associé.

Un point vérifiant cette propriété est appelé un *point-col* du lagrangien. On a dans ce cas

$$L(\hat{x}, \hat{\lambda}) = \max_{\lambda \geq 0} w(\lambda) = \min_{x \in K} f(x).$$

Lorsque ce point existe, on peut donc résoudre le problème dual à la place du problème primal : l'intérêt principal est la concavité de la fonction duale ainsi que la simplicité des contraintes. On voit aussi que même lorsqu'il n'existe pas de point col, le maximum de la fonction duale fournit un minorant de $f(\hat{x})$, ce qui peut être utile dans certaines circonstances. On appelle alors la différence $f(\hat{x}) - w(\hat{\lambda})$ le *saut de dualité*.

Théorème IX.1.3. *Si f est strictement convexe, si les g_i sont convexes et si K est d'intérieur non-vide, l'existence de \hat{x} est équivalente à l'existence de $\hat{\lambda}$ et on a*

$$w(\hat{\lambda}) = L(\hat{x}, \hat{\lambda}) = f(\hat{x}).$$

Il existe cependant des cas où il existe un point-col et les conditions précédentes ne sont pas vérifiées. Quand il n'y a pas de point-col, on peut faire alors appel à des techniques où on utilise un lagrangien *augmenté* du type

$$L(x, \lambda, r) = f(x) + \lambda^\top g(x) + r \sum_{i=1}^m (g_i^+(x))^2,$$

pour définir la fonction duale. Ce type d'approche permet de généraliser les méthodes duales pour les cas typiquement non-convexes.

Point-col du lagrangien

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

IX.2 Methodes duales

IX.2.1	Méthode d'Uzawa	233
IX.2.2	Méthode d'Arrow et Hurwicz	235

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

IX.2.1 Méthode d'Uzawa

Le principe de la méthode d'Uzawa est d'utiliser la méthode du gradient pour maximiser la fonction duale, tout en tenant compte de la contrainte $\lambda \geq 0$: cela donne la méthode

$$\lambda_{k+1} = [\lambda_k + \rho_k \nabla w(\lambda_k)]^+.$$

L'utilisation de cette méthode suppose que la fonction duale est différentiable (au moins à l'optimum). Ce sera le cas si le minimum en x de $L(x, \hat{\lambda})$ est unique. Dans ce cas si on note $x(\lambda)$ le vecteur tel que

$$w(\lambda) = L(x(\lambda), \lambda),$$

on peut écrire que

$$\begin{aligned} \nabla w(\lambda) &= \nabla_x L(x(\lambda), \lambda) \frac{dx(\lambda)}{d\lambda} + \nabla_\lambda L(x(\lambda), \lambda), \\ &= g(x(\lambda)), \end{aligned}$$

puisque $x(\lambda)$ est par définition le minimum en x de $L(x, \lambda)$. L'algorithme de la méthode est donc le suivant :

Algorithme d'Uzawa

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

1. Poser $k = 0$ et $\lambda_0 = 0$.
2. Déterminer x_k solution du problème $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \lambda_k^\top g(x)$
3. Si $\max_i g_i(x_k) < \epsilon$ alors on s'arrête.
4. Sinon, calculer $\lambda_{k+1} = [\lambda_k + \rho_k g(x_k)]^+$
5. Faire $k \leftarrow k + 1$ et retourner en 2.

Au point 4 on peut choisir ρ_k fixe ou bien faire une recherche linéaire. Lorsque la fonction duale est mal conditionnée, on peut aussi utiliser une méthode de quasi-Newton. Dans le test d'arrêt choisi la valeur de $\epsilon > 0$ devra être choisie prudemment : en effet, s'il n'existe pas de point-col on ne peut avoir $x_k \in K$ et donc si ϵ est trop petit l'algorithme ne s'arrêtera pas.

Méthode d'Uzawa

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

IX.2.2 Méthode d'Arrow et Hurwicz

Cette méthode est très voisine de la méthode d'Uzawa. Au lieu de déterminer x_k comme le minimum de $L(x, \lambda_k)$ on se contente d'un pas dans la direction $-\nabla_x L(x, \lambda_k)$: on définit x_{k+1} par

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla_x L(x_k, \lambda_k),$$

et λ_{k+1} par

$$\lambda_{k+1} = [\lambda_k + \rho_k g(x_k)]^+.$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemples du chapitre IX

IX.1	Equilibre d'une chaîne	237
----------------------	--	-----------------------	---------------------

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exemple IX.1 Equilibre d'une chaîne

TODO Eric : un exemple de dualité, par exemple l'équilibre de la chaîne ?

[Retour au grain](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Chapitre X

Méthodes d'optimisation globale

X.1	Généralités sur l'optimisation globale	239
X.2	La méthode DIRECT	241
X.3	La méthode EGO	243
X.4	La méthode CMA-ES	245

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

X.1 Généralités sur l'optimisation globale

X.1.1	Introduction à l'optimisation globale	240
-------	---	-----

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

X.1.1 Introduction à l'optimisation globale

TODO Rodolphe

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

X.2 La méthode DIRECT

X.2.1 Introduction à DIRECT 242

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

X.2.1 Introduction à DIRECT

TODO Rodolphe

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

X.3 La méthode EGO

X.3.1	Introduction à EGO	244
-------	------------------------------	-----

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

X.3.1 Introduction à EGO

TODO Rodolphe

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

X.4 La méthode CMA-ES

X.4.1	Introduction à CMA-ES	246
-------	---	-----

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

X.4.1 Introduction à CMA-ES

TODO Rodolphe

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

A

A quoi sert l'optimisation ?	12
A quoi sert l'optimisation ?	<i>18</i>
Algorithme BFGS	153
Algorithme DFP	147, 149

B

Broyden (formule de)	144
----------------------	------------

C

Calcul du pas optimal (cas quadratique)	90
---	-----------

CMA-ES (intro)	245
Condition nécessaire du second ordre	191
Condition nécessaire du second ordre - contraintes d'inégalité	194
Conditions nécessaires (sans contraintes)	65
Conditions nécessaires et suffisantes (sans contraintes)	66
conjugaison	97
Convexité (relation avec le gradient)	59
Convexité (relation avec le hessien)	57
Convexité des ensembles	53
Convexité des fonctions	55
Courbe admissible	169

D

Difficultés pratiques	34
différentiabilité	47

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)



DIRECT (intro)	241
Direction admissible	166
Distance d'un point à un plan	183
Dérivée directionnelle	49

E

EGO (intro)	243
Estimation des multiplicateurs	213
exemple en mécanique	15, 41
existence	61

F

Forme quadratique (définition)	41
forme quadratique définie positive (propriétés)	43
Formulation générale	12, 27, 29, 38

G

Gauss-Newton	156
Globalité (intro)	239
Gradient conjugué : algorithme	103
Gradient conjugué : étude de convergence	112
Gradient conjugué, Interprétation, sous espace de Krylov	109
Gradient projeté	197

H

Historique du cours	9
---------------------------	---

I

interpolation cubique	132
Intervalle de sécurité	121

K

Kuhn et Tucker - interprétation géométrique	180
---	-----

L

La méthode de Newton projetée	200
Lagrangien	190
Les grands mécanismes des optimiseurs	38
Levenberg-Marquardt	158
Linéarisation du lagrangien	216

M

Matrice Hessienne	51
Mise à jour de l'approximation du hessien ..	143
moindres carrés	13
Méthode d'Arrow et Hurwicz	234
Méthode d'Uzawa	232

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Méthode de directions réalisables	204	Problème avec contraintes d'égalité	165
Méthode de Fletcher-Reeves et variante de Polak- Ribière	106	problème dual	226
Méthode de la section dorée	123	Problème standard (avec contraintes)	164
méthode de Newton	136	Programme quadratique (exemple)	186
Méthode de Wilson	218	Propriété de minimisation	99
Méthode de Wilson (contraintes d'inégalité)	219	Préconditionnement	138
Méthode du gradient simple	87	Pseudo-inverse	184
Méthode du gradient à pas optimal	89	Pénalisation externe	208
		Pénalisation interne	212

N

navigation	7
----------------------	----------

O

Optimisation et dessins de fonctions	36
Optimisation locale vs. globale	31
Optimiseurs et simulateurs	29

P

Parcours dans le cours	10
Point-col	229
Positionnement optimal d'antennes	18
Principe des méthodes de descente	84
Problème avec contraintes d'inégalité	176

R

Recherche linéaire	120
Relation de quasi-Newton	141
Remerciements	8
Règle d'Armijo	125
Règle de Goldstein	127
Règle de Wolfe	129
Réduction de l'intervalle, principe	131

T

Théorème de Lagrange	173
--------------------------------	------------

U

Unicité (lien avec la convexité)	63
--	-----------

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Index des notions

Symbols

x^* 27

C

continuité 47

Contraintes d'inégalité 27

Contraintes d'égalité 27

Critères d'optimisation 27

D

Différences finies 49

Dérivée directionnelle 49

E

enveloppe convexe 75

F

Fonction coût 27

Formulation générale 27

G

gradient 50

I

Itération d'optimiseur 29

J

jacobienne 50

O

Optimiseur 29

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)



P

p.....	27
pas.....	84

S

Simulateur.....	29
-----------------	----

V

Variable d'optimisations.....	27
-------------------------------	----

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)



Bibliographie

- [1] L. Grosset. *Optimization of Composite Structures by Estimation of Distribution Algorithms*. PhD thesis, Univ. of Florida and Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, September 2004.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)
[Notions](#)
[Bibliographie](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Aide 1, Exercice II.4

Utiliser l'expression de $\nabla f(x)$ donnée à l'exercice précédent.

[Retour à l'exercice ▲](#)