Révision sur les complexes

Attention : pour être homogène avec le cours d'électronique
le nombre complexe i est noté j

I)Calcul de module et d'argument

a)Calculer les modules et les arguments de

$z=1+j$ $\qquad$ $z=1+\sqrt{3}j$ $\qquad$ $z=\overline{1+\sqrt{3}}j$ $\qquad$ $z=10e^{j\frac{\pi}{8}}$

$z=ae^{j\omega t}$ a réel $\qquad$ $z=\dfrac{ae^{j\omega t}}{be^{j(\omega t-\pi)}}$ (a,b réels) $\qquad$ $z=R+jL\omega$ $\qquad$ $z=R+\dfrac{1}{jC\omega}$

$$z=\frac{1-LC\omega^2+jRC\omega}{jC\omega}$$

b)Calculer les modules et les arguments de z puis mettre z sous forme cartésienne (en utilisant les formules de trigonométrie quand c'est nécessaire)

$z=\dfrac{1-j}{1+j}$ $\qquad$ $z=\dfrac{20-20j}{1+j}$ $\qquad$ $z=\dfrac{10j}{1+\sqrt{3}j}$ $\qquad$ $z=\dfrac{10+10j}{1+\sqrt{3}j}$

$z=\dfrac{15-15\sqrt{3}j}{4+4j}$

II) Formules de Moivre et d'Euler

a)Calculer cos(4x) et sin(4x) en fonction de cos(x) et sin(x)

b) Linéariser $\cos^4(x)$

c)Linéariser $\cos^4(x)\sin(x)$

III) Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe

Déterminer :
Les racines carrées de 1+j
Les racines cubiques de 1+j
Les racines cubiques de –j
Les racines quatrièmes de $-1-\sqrt{3}j$
Les racines carrées de –5+12j

IV) résolution d'équations du second degré

$z^2-(1+3j)z-2+2j=0$

$z^2-4z+4-2j=0$

Correction non détaillée des exercices de Révision Maths

I)Calcul de module et d'argument

a)Calculer les modules et les arguments de

$z=1+j$ $\quad |1+j|=\sqrt{2}$, $\arg(1+j)=\frac{\pi}{4}$

$z=1+\sqrt{3}j$ $\quad |1+\sqrt{3}j|=2$, $\arg(1+\sqrt{3}j)=\frac{\pi}{3}$

$z=\overline{1+\sqrt{3}j}$ $\quad |\overline{1+\sqrt{3}j}|=2$, $\arg(\overline{1+\sqrt{3}j})=-\arg(1+\sqrt{3}j)=-\frac{\pi}{3}$

$z=10e^{j\frac{\pi}{8}}$ $\quad |10e^{j\frac{\pi}{8}}|=10$, $\arg(10e^{j\frac{\pi}{8}})=\frac{\pi}{8}$

$z=ae^{j\omega t}$ $\quad |ae^{j\omega t}|=|a|$, **si a>0** $|ae^{j\omega t}|=a$ **et** $\arg(ae^{j\omega t})=\omega t$

si a<0 $|ae^{j\omega t}|=-a$ **et** $\arg(ae^{j\omega t})=\omega t+\pi$

$z=\frac{ae^{j\omega t}}{be^{j(\omega t-\pi)}}$ $\quad \left|\frac{ae^{j\omega t}}{be^{j(\omega t-\pi)}}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ **si ab>0** $\arg(\frac{ae^{j\omega t}}{be^{j(\omega t-\pi)}})=\pi$

si ab<0 $\arg(\frac{ae^{j\omega t}}{be^{j(\omega t-\pi)}})=0$

$z=R+jL\omega$ $\quad |R+jL\omega|=\sqrt{R^2+L^2\omega^2}$

comme R>0 on sait que $\varphi\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[+2k\pi$

on peut définir $\varphi=\arg(z)$ par $\tan(\varphi)=\frac{L\omega}{R}$ ou

arg(z)= $\varphi=\text{Arctan}(\frac{L\omega}{R})+2k\pi$

$z=R+\frac{1}{jC\omega}$ $\quad \left|R+\frac{1}{jC\omega}\right|=\sqrt{R^2+\frac{1}{C^2\omega^2}}=\sqrt{\frac{R^2C^2\omega^2+1}{C^2\omega^2}}$

comme R>0 $\varphi\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[+2k\pi$

on peut définir $\varphi=\arg(z)$ par $\tan(\varphi)=\frac{-1}{RC\omega}$ ou

arg(z)= $\varphi=\text{Arctan}(-\frac{1}{RC\omega})+2k\pi=-\text{Arctan}(\frac{1}{RC\omega})+2k\pi$

$z=\frac{1-LC\omega^2+jRC\omega}{jC\omega}$ $\quad \left|\frac{1-LC\omega^2+jRC\omega}{jC\omega}\right|=\frac{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2+R^2C^2\omega^2}}{C\omega}$ car $C\omega>0$

$$\arg(z)=\arg(1-LC\omega^2+jRC\omega)-\arg(jC\omega)$$

$$\arg(z)=\arg(1-LC\omega^2+jRC\omega)-\frac{\pi}{2}$$

comme $RC\omega>0$ on sait que $\arg(1-LC\omega^2+jRC\omega)\in\left[0,\pi\right]+2k\pi$

$$\arg(1-LC\omega^2+jRC\omega)=\mathrm{Arctan}\left(\frac{RC\omega}{1-LC\omega^2}\right)+2k\pi$$

$$\arg(z)=\mathrm{Arctan}\left(\frac{RC\omega}{1-LC\omega^2}\right)-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

b)Calculer les modules et les arguments de z puis mettre z sous forme cartésienne en partant de la forme exponentielle(en utilisant les formules de trigonométrie quand c'est nécessaire)

$z=\frac{1-j}{1+j}$ $\left|\frac{1-j}{1+j}\right|=1$ $\arg(z)=\arg(1-j)-\arg(1+j)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{-\pi}{2}$

$z=e^{-j\frac{\pi}{2}}$ $\boxed{z=-j}$

$z=\frac{20-20j}{1+j}$ $\left|\frac{20-20j}{1+j}\right|=20$ $\arg(z)=\arg(1-j)-\arg(1+j)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{-\pi}{2}$

$z=20e^{-j\frac{\pi}{2}}$ $\boxed{z=-20j}$

$z=\frac{10j}{1+\sqrt{3}j}$ $\left|\frac{10j}{1+\sqrt{3}j}\right|=5$ $\arg(z)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

$z=5e^{j\frac{\pi}{6}}$ $\boxed{z=\frac{5}{2}(\sqrt{3}+j)}$

$z=\frac{10+10j}{1+\sqrt{3}j}$ $\left|\frac{10+10j}{1+\sqrt{3}j}\right|=\frac{10\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$ $\arg(z)=\arg(1+j)-\arg(1+\sqrt{3}j)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{12}$

$z=5\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{12}}$

il faut calculer $\cos(-\frac{\pi}{12})$ et $\sin(-\frac{\pi}{12})$ en utilisant les formules de trigonométrie cos(a-b), sin(a-b)

$\cos(-\frac{\pi}{12})=\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$\sin(-\frac{\pi}{12})=\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\boxed{z=\frac{5}{2}(1+\sqrt{3}+j(1-\sqrt{3}))}$

$z=\frac{15-15\sqrt{3}j}{4+4j}$ $\left|\frac{15-15\sqrt{3}j}{4+4j}\right|=\frac{15}{4}\left|\frac{1-\sqrt{3}j}{1-j}\right|=\frac{15\sqrt{2}}{4}$

$z=\frac{15\sqrt{2}}{4}e^{-j\frac{7\pi}{12}}$

$\arg(z)=\arg(1-\sqrt{3}j)-\arg(1+j)=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=-\frac{7\pi}{12}$

$\cos(-\frac{7\pi}{12})=\cos(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\sin(-\frac{7\pi}{12})=\sin(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})=-\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$\boxed{z=\frac{15}{8}(1-\sqrt{3}-j(1+\sqrt{3}))}$

II) Formules de Moivre et d'Euler

a)Calculer cos(4x) et sin(4x) en fonction de cos(x) et sin(x)

$$\cos(4x)+j\sin(4x)=(\cos x+j\sin x)^4=\cos^4(x)+4j\cos^3(x)\sin(x)-6\cos^2(x)\sin^2(x)-4j\cos(x)\sin^3(x)+\sin^4(x)$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire on obtient :

$$\boxed{\cos(4x)=\cos^4(x)-6\cos^2(x)\sin^2(x)+\sin^4(x)}$$

$$\boxed{\sin(4x)=4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x)}$$

b) Linéariser $\cos^4(x)$

$$\cos^4(x)=\left(\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}\right)^4=\frac{e^{j4x}+4e^{j2x}+6+4e^{-j2x}+e^{-j4x}}{16}=\frac{\cos(4x)+4\cos(2x)+3}{8}$$

$$\boxed{\cos^4(x)=\frac{\cos(4x)+4\cos(2x)+3}{8}}$$

c)Linéariser $\cos^4(x)\sin(x)$

$$\cos^4(x)\sin(x)=\left(\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}\right)^4\left(\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}\right)=\left(\frac{e^{j4x}+4e^{j2x}+6+4e^{-j2x}+e^{-j4x}}{16}\right)\left(\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}\right)=\frac{1}{32j}(e^{j5x}+4e^{j3x}+6e^{jx}+4e^{-jx}+e^{-j3x}-e^{j3x}-$$

$$\boxed{\cos^4(x)\sin(x)=\frac{1}{16}(\sin(5x)+3\sin(3x)+2\sin(x))}$$

III) Racines n$^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe

Déterminer :

Les racines carrées de 1+j

$Z=1+j=\sqrt{2}e^{j(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}$

Les racines sont $z_k=\sqrt[4]{2}e^{j(\frac{\pi}{8}+k\pi)}$ ce qui donne 2 racines

$$\boxed{z_0=\sqrt[4]{2}e^{j\frac{\pi}{8}} \quad z_1=\sqrt[4]{2}e^{j\frac{9\pi}{8})}}$$

Les racines cubiques de 1+j

$Z=1+j=\sqrt{2}e^{j(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}$

Les racines sont $z_k=\sqrt[6]{2}e^{j(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})}$ ce qui donne 3 racines

$$\boxed{z_0=\sqrt[6]{2}e^{j\frac{\pi}{12}} \quad z_1=\sqrt[6]{2}e^{j\frac{9\pi}{12})} \quad z_2=\sqrt[6]{2}e^{j\frac{17\pi}{12})}}$$

Les racines cubiques de –j

$Z=e^{-j(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$

Les racines sont $z_k=e^{-j(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})}$ ce qui donne 3 racines

$$\boxed{z_0=e^{-j(\frac{\pi}{6})}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{j}{2} \qquad z_1=e^{-j(\frac{5\pi}{6}))}=e^{\frac{j7\pi}{6}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{j}{2} \qquad z_2=e^{-j(\frac{9\pi}{6})}=e^{\frac{j\pi}{2}}=j}$$

Les racines quatrièmes de $-1-\sqrt{3}j$

$Z=e^{j(\frac{4\pi}{3}+2k\pi)}$

Les racines sont $z_k=e^{j(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{4})}=e^{j(\frac{2\pi}{6}+\frac{3k\pi}{6})}$ ce qui donne 4 racines

$$\boxed{z_0=e^{j(\frac{\pi}{3})}=\frac{1}{2}+\frac{j\sqrt{3}}{2} \qquad z_1=e^{j(\frac{5\pi}{6})}=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{j}{2} \qquad z_2=e^{\frac{j4\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-\frac{j\sqrt{3}}{2} \qquad z_3=e^{j(\frac{11\pi}{6})}==\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{j}{2}}$$

Les racines carrées de –5+12j

Z=(x+j y)²=-5+12j

Ce qui donne le système

$\begin{cases} x^2-y^2=-5 \\ xy=6 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} x^2=4 \\ y^2=9 \\ x \text{ et } y \text{ de même signe} \end{cases}$

d'où les 2 racines $z_0=2+3j$ $z_1=-2-3j$

IV) résolution d'équations du second degré

$$z^2-(1+3j)z-2+2j=0$$

$\Delta=(1+3j)^2-4(-2+2j)=-2j$

il faut chercher les 2 racines de Δ, qui vérifient $\delta^2=\Delta$

$\delta=x+jy$

$\delta^2=x^2-y^2+2jxy=-2j$

ce qui done le système

$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ xy=-1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=1 \\ x \text{ et } y \text{ de signe contraire} \end{cases}$

d'où les 2 racines de Δ : $\delta=1-j$, $\delta=-1+j$

$$\boxed{z_1=\frac{1+3j+1-j}{2}=1+j \qquad z_2=\frac{1+3j-1+j}{2}=2j}$$

$$z^2-4z+4-2j=0$$

$\Delta=16-4(4-2j)=8j$

il faut chercher les 2 racines de Δ, qui vérifient $\delta^2=\Delta$

$\delta=x+jy$

$\delta^2=x^2-y^2+2jxy=8j$

ce qui done le système

$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ xy=4 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} x^2=4 \\ y^2=4 \\ x \text{ et } y \text{ de même signe} \end{cases}$

d'où les 2 racines de Δ : $\delta=2+2j$, $\delta=-2-2j$

$$\boxed{z_1=\frac{4+2+2j}{2}=3+j \qquad z_2=\frac{4-2-2j}{2}=1-j}$$