L'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev

Stéphane Canu
scanu@insa-rouen.fr
http ://psichaud.insa-rouen.fr/~scanu/

21 juin 2001

1 Motivations

Une première motivation est la notion de « queue de distribution ». Supposons que l'on ne connaisse que l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X. Est-il possible d'avoir de l'information sur le comportement de cette variable aléatoire loin de son espérance ? Ces évènements sont rares soit, mais peut on quantifier cette rareté ? Le figure (1) illustre cette notion de « queue de distribution ».

Une autre application possible concerne la quantification du niveau de confiance que l'on peut avoir en une mesure. Le guide ISO sur *l'expression des incertitudes dans les mesures expérimentales* recommande d'associer à chaque mesure un intervalle de confiance. Une manière de définir cet intervalle de confiance consiste à le centrer sur la valeur observée x, et de lui donner pour amplitude $k\sigma$, où σ est un écart type et k un facteur de couverture choisi pour assurer un certain niveau de confiance α, soit tel que :

$$\mathbb{P}\left(|X - x| < k\sigma\right) = \alpha$$

La question est de savoir, comment, dans le cas général, relier k et α ? L'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev répond à cette question.

Ce théorème est très utile « techniquement » en probabilité et en statistiques. Il permet notamment de donner une démonstration de la loi des grand nombres.

2 Théorème

Soit X une variable aléatoire centrée de variance σ^2 et de densité $f_{\mathrm{X}}(x)$.

Théorème : Inégalité de Bienaymé-Tchebyshev
Pour tout réel t positif, on a :

$$\mathbb{P}\left(|X| \geq t\right) \leq \frac{\sigma^2}{t^2} \tag{1}$$

Démonstration

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) \geq \mathbb{E}\left(X^2 \mathbb{1}_{|X|\geq t}\right) \geq t^2 \mathbb{P}\left(|X| \geq t\right) \tag{2}$$

où $\mathbb{E}$ est l'espérance et $\mathbb{1}_{[a,b]}$ l'indicatrice de l'intervalle $[a, b]$. $\square$

Les détails de cette démonstration sont les suivants :

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} X^2 f_{\mathrm{X}}(x)dx && (3)\\
&= \int_{|x|<t} X^2 f_{\mathrm{X}}(x)dx + \int_{|x|\geq t} X^2 f_{\mathrm{X}}(x)dx && (4)\\
\text{et donc :}\quad \sigma^2 &\geq \int_{|x|\geq t} X^2 f_{\mathrm{X}}(x)dx && (5)\\
&\geq t^2 \underbrace{\int_{|x|\geq t} f_{\mathrm{X}}(x)dx}_{\mathbb{P}(|X|\geq t)} && (6)
\end{aligned}$$

L'équation 3 est la définition de la variance, (qui s'écrit aussi $\mathbb{E}\left(X^2\right)$, point de départ de la première démonstration). L'équation 4 est une simple décomposition de l'intégrale en deux parties. L'inéquation 5 est obtenue car les intégrales de l'équation 4 sont toutes deux positives. De même, la majoration produite en 6 est permise car la fonction x^2 est supérieure à t^2 sur l'intervalle considéré.

3 Commentaires

Pour généraliser ce théorème à une variable aléatoire non centré, il faut vérifier que son espérance est finie. Dans ce cas, on trouve la formulation suivante :

$$\mathbb{P}\left(|X-\mu| \geq t\right) \leq \frac{\sigma^2}{t^2} \tag{7}$$

où X est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance σ^2. Le figure 1 illustre alors cette version du théorème. Afin de réponde à la question posée en introduction, on trouve encore une autre version de cette inégalité :

$$\mathbb{P}\left(|X-\mu| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2} \tag{8}$$

ainsi en *qualité* par exemple on parle d'intervalle de confiance à « six sigma » (pour $k = 3$!).

Soit X une variable aléatoire centrée-réduite (de variance $\sigma^2 = 1$). Le tableau suivant nous permet de comparer les résultats de la borne issue de l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev avec la réalitée pour différentes loi usuelles.

$k = t\ \sigma^2 = 1$	1	2	3	4	5
BT : équation (1)	1.0000	0.2500	0.1111	0.0625	0.0400
gauss	0.3173	0.0455	0.0027	0.0001	0.0000
exponentielle	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025
uniforme	0.4226	0	0	0	0

On constate la borne de Bienaymé-Tchebyshev est pessimiste. Plus t augmente, plus la borne est pessimiste. Il est possible de trouver des bornes tout aussi générales mais moins pessimistes. Pour cela il nous faut d'autres inégalités bâties sur le même principe.

4 Généralisation

Il est possible de généraliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev en remplaçant la variance par une fonction positive quelconque. On obtient alors l'inégalité de Markov.

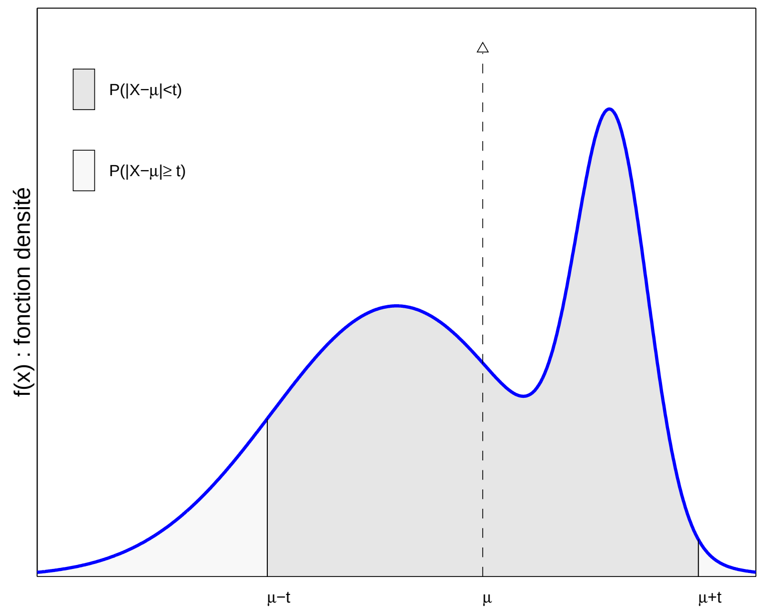

FIG. 1 – Illustration de l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev.

Théorème : Inégalité de Markov
Soit g une fonction positive :

$$\mathbb{P}\left(|X| \geq k\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(g(X)\right)}{k^2}$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev est un cas particulier de l'inégalité de Markov avec $g(x) = x^2$.

5 Histoire

Il semble que se soit Bienaymé qui publia le premier l'inégalité en 1853, comme une moyen de démontrer la convergence en probabilité de la moyenne vers l'espérence. Chebyshev est arrivé indépendament au mêmes résultats par le même raisonnement en 1867, dans un article qui eut un impact important dans la comunauté scientifique alors que celui de Bienaymé est plus passé inapercu. Raison pour laquelle certain parlent de borne ou d'innégalité de Chebyshev en oubliant son ami. Ami car l'année 1858 marque le début d'une correspondance suivie entre les deux savants témonniant d'une réèlle admiration mutuelle.

Si l'orthographe de monsieur Bienaymé ne semble pas discutée (pour l'alphabet latin en tout cas), celle de son coauteur donne lieu à des variations quasi infinies. Tchébichef en 1867 est devenu Tchebishev, Chebishev ou Tchebisheff selon la la date ou le lieu. Voila où se faire une petite idée sur la question : http ://europa.eu.int/en/comm/eurostat/research/isi/concepts/concept00288.htm

6 Sur le réseaux

1. L'inégalité sur le réseau en anglais, et à lyon en francais
2. un glossaire permettant de s'y retrouver (en anglais)
3. et toutes les statistiques en ligne (en anglais)

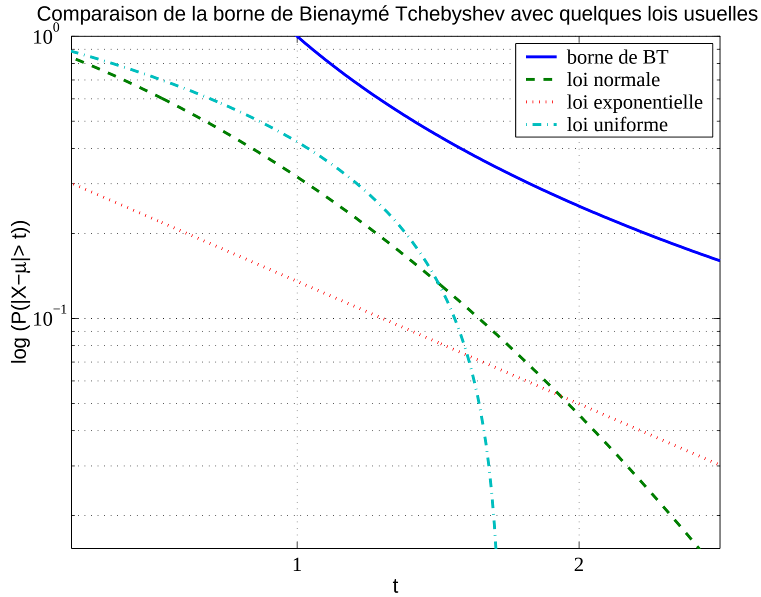

FIG. 2 – Illustration du comportement de la borne de Bienaymé-Tchebyshev pour différentes valeurs de t.

7 Exercices

1. Soit X une v.a. suivant une loi normale d'espérence 1 et de variance 1. Calculer $\mathbb{P}(X > 5)$. Donner une borne de cette probabilité en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev.
2. Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev pour obtenir une borne inférieure du nombre de fois ou il faut lancer une pièce équilibrée pour obtenir une fréquence de pile entre 0,4 et 0,6 avec une confiance de 0,9. Comparez avec les tables de la binômiale.
3. Nous avons réalisé une mesure $x = 1$ d'une variable aléatoire d'écart type 2. Donner un intervalle de confiance à 1 cet intervalle sous hypothèse gausiènne.
4. Un individu effectue 100 transactions avec de recevoir son relevé mensuel. Plutôt que de calculer tout exactement, il arrondi chaque transaction à l'euro. Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev pour calculer une borne supérieur de la probabilité que d'erreur accumulée après ses 100 transactions dépasse 5 euros.

8 Notations

- Si Ω est l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire, un événement est une partie de cet ensemble.
- probabilité : on note $\mathbb{P}(A)$ la probabilité de l'événement A. Une probabilité est donc une fonction de l'ensemble des événement vers l'intervalle $[0, 1]$,
- variable aléatoire : grandeure qui dépend d'une expérience aléatoire. Il s'agit donc d'une fonction qui associe à chaque événement une valeur.
- fonction de répartition : pour une variable aléatoire X, c'est une fonction qui caractérise les probabilités sur $\mathbb{R}$: $F_{\mathrm{x}}(x) = \mathbb{P}(X \in]-\infty, x])$,
- fonction de densité : à toute variable aléatoire continue (à valeur réèlle), $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} F_{\mathrm{x}}(y)dy$.

  Cette fonction est positive et vérifie : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{x}}(x)dx = 1$

- espérance : $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$
- variance : $V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f_X(x) dx$
- écart type : $\sigma = \sqrt{V(X)}$ soit $\sigma^2 = V(X)$
- une variable aléatoire est dite centrée lorsque son espérance est nulle. Pour centrer une variable aléatoire il suffit de lui soustraire son espérance. Par exemple, si X est une v.a. suivant une loi exponentielle de paramètre λ on définit la loi exponentielle centrée associée par $Y = X - \lambda$.

9 Annexes

Programme Matlab permettant de remplir le tableau 1.

```
k = 1:5;
1./k.^2                 % BT
2*(1-normcdf(k,0,1))  % loi normale
1-expcdf(k+1,1)       % loi exponentielle
2*(1-unifcdf(k,-sqrt(3),sqrt(3)))% loi uniforme
```

Programme matlab permettant de créer la figure (1).

```
figure(1)
m = 3/2.5;
int = 3;
mm = m - int;
mp = m+int
xx = mm:0.01:mp;
ff = exp(-(xx).^2/6)/1.5 + exp(-2*(xx-3).^2);
xx = [mm xx mp];
ff = [0 ff 0];
fill(xx,ff,[.9 .9 .9])
hold on
h = plot(x,f);
set(h,'LineWidth',2);
plot([3/2.5 3/2.5],[0 1.3],'--k')
h = plot([3/2.5],[1.3],'k^');
plot([3/2.5-3 3/2.5-3],[0 exp(-(3/2.5-3).^2/6)/1.5 + exp(-2*(3/2.5-3-3).^2)],'k')
plot([3/2.5+3 3/2.5+3],[0 exp(-(3/2.5+3).^2/6)/1.5 + exp(-2*(3/2.5+3-3).^2)],'k')
ylabel('f(x) : fonction densit\'e')
text(m,-0.05,'\mu')
text(mm,-0.05,'\mu-t')
text(mp,-0.05,'\mu+t')
text(-4,1.2,'P(|X-\mu|<t)')
fill([-4.5 -4.2 -4.2 -4.5],[1.15 1.15 1.25 1.25],[.9 .9 .9])
text(-4,1,'P(|X-\mu|\geq t)')
fill([-4.5 -4.2 -4.2 -4.5],[0.95 0.95  1.05 1.05],[1 1 1])
set(gca,'FontSize',14,'FontName','Times','XTick',[],'YTick',[],'Box','on');
hold off
```