

UNIVERSITE DE LIEGE  
Faculté des Sciences Appliquées

---

DYNAMIQUE DES CONSTRUCTIONS  
MECANIQUES

---

M. GERADIN  
Professeur ordinaire

Année académique 1994-1995



1. *Eléments de Mécanique Rationnelle*  
*et leur Application*  
*aux Systèmes Mécaniques*

---



## 1.1 Introduction

L'étude de la mécanique classique repose sur les trois lois régissant le mouvement  nonc es par Newton et les hypothèses associ es sur l'existence d'un espace et d'un temps absolus. De plus, dans les problèmes pour lesquels les effets de gravitation jouent un rôle important, la loi de Newton sur la gravitation universelle est adopt e.

L'objet de ce chapitre est de rappeler comment on peut prédire l'évolution dans le temps d'un système mécanique à partir de la connaissance des conditions initiales et des forces en jeu, ou encore, le mouvement du système étant connu, de déterminer les forces qui l'engendrent.

D'un point de vue formel, la mécanique classique peut être abord e de deux manières :

- la manière vectorielle, utilis e par Newton, qui se base sur les quantités vectorielles de force et d'accélération ;
- la méthode analytique, due essentiellement à Lagrange, dans laquelle on utilise les quantités scalaires de travail et d'énergie.

L'approche vectorielle est plus physique et s'avère généralement mieux adapt e au traitement de systèmes dissipatifs. L'approche analytique est plus systématique et, en plus de permettre le développement de résultats généraux très importants, simplifie considérablement l'étape de mise en équation d'un problème.

Nous allons rappeler brièvement ces deux approches ainsi que les éléments de cinématique nécessaires à leur application.

Un certain nombre d'applications relatives à la dynamique des systèmes mécaniques sont trait es ensuite de manière à illustrer les concepts fondamentaux qui sont repris dans ce chapitre.

## 1.2 Les lois fondamentales de la dynamique

### 1.2.1 Les lois du mouvement

#### Première loi du mouvement (loi de l'inertie)

Un corps qui ne subit l'action d'aucune force extérieure reste au repos ou est animé d'un mouvement rectiligne uniforme. On définit *l'inertie* du corps comme étant la propriété selon laquelle une force est nécessaire pour modifier son mouvement. La masse inertielle est la mesure numérique d'inertie. C'est une quantité scalaire\*.

Pour étudier le mouvement d'un système mécanique, il est nécessaire de définir un système d'axes de référence, supposé rigide, relativement auquel on mesure le déplacement, la vitesse et l'accélération du corps. La loi de l'inertie introduit d'une façon immédiate une classification des repères possibles en deux catégories.

#### *Repères inertiels*

Supposons que la loi de l'inertie soit valide dans un repère  $S$  : elle le reste nécessairement dans un repère en mouvement uniforme par rapport à  $S$ . De tels repères, dans lesquels la loi de l'inertie reste valide, sont appelés repères inertiels. Il en existe une infinité. Les règles de transformation selon lesquelles des observations relatives à deux repères inertiels différents peuvent être corr l es sont déduites de la seconde loi de la mécanique.

---

\* Nous convenons de représenter toute quantité scalaire par une lettre en italique et toute quantité vectorielle par une lettre grasse.

*Repères non inertiels*

Tout repère soumis à une accélération par rapport à un repère inertiel est un repère non inertiel.

**Deuxième loi du mouvement (loi de la quantité de mouvement)**

Dans un repère inertiel, la variation de *quantité de mouvement* d'un corps est égale à la force agissant sur lui. La quantité de mouvement est définie par le produit de la masse inertielle  $m$  du corps et de sa vitesse  $\mathbf{v}$ . C'est donc une quantité vectorielle.

La loi de la quantité de mouvement exprime que la dérivée totale par rapport au temps \* de la quantité de mouvement est égale à la force résultante appliquée au corps

$$\boxed{\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}} \quad (1.2.1)$$

Dans tous les cas où la masse  $m$  est constante, on la réécrit en fonction de l'accélération

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (1.2.2)$$

**Troisième loi du mouvement (loi de l'action et de la réaction)**

*La force avec laquelle une masse  $m_i$  agit sur une masse  $m_j$  est égale et opposée en direction à la force que  $m_j$  exerce sur  $m_i$ . De plus, la loi de la gravitation universelle stipule que la force d'attraction entre deux corps est proportionnelle au produit des masses et inversement proportionnelle au carré de leur distance.*

**1.2.2 Lois de changement de repère****Transformation galiléenne**

Si une masse en mouvement est repérée dans des repères  $S_1$  et  $S_2$  par les vecteurs  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ , et si  $S_1$  et  $S_2$  sont animés d'une vitesse uniforme relative  $\mathbf{v}$ , il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_2 + \mathbf{v}t_2 + \mathbf{c} \\ t_1 &= t_2 + d \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

où  $t_1$  et  $t_2$  représentent le temps mesuré dans les deux repères et où  $\mathbf{c}$  et  $d$  sont des constantes dépendant simplement du choix de l'origine. La transformation (1.2.3), qui conserve visiblement l'accélération, est une transformation galiléenne.

**Transformation d'un repère inertiel en un repère non inertiel**

Les règles de transformation sont dans ce cas plus compliquées. Leur dérivation est grandement facilitée par l'application du théorème suivant.

Soit un repère  $S_1$  qui possède, par rapport à un repère  $S$ , une vitesse angulaire relative  $\boldsymbol{\omega}$  autour de leur origine commune. Le taux de variation d'un vecteur quelconque  $\mathbf{b}$ , mesuré dans  $S$ , s'exprime en fonction de la même quantité mesurée dans  $S_1$  par la formule\*

$$\boxed{\left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right)_{S_1} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}} \quad (1.2.4)$$

En particulier, si  $S$  est un repère inertiel et  $S_1$  un repère en rotation relative par rapport à lui, par substitution dans (1.2.4) du vecteur position dans  $S$ , on obtient le résultat

$$\boxed{\mathbf{v}_{abs} = \mathbf{v}_{rel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}} \quad (1.2.5)$$

\* la dérivée totale par rapport au temps est notée  $\frac{d}{dt}$ .

\* l'opération  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  exprime le produit vectoriel entre les vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ .

où  $\mathbf{v}_{abs}$  est la vitesse absolue mesurée dans  $S$   
 $\mathbf{v}_{rel} = \dot{\mathbf{r}}$  la vitesse relative à  $S_1$   
 $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  la vitesse d'entraînement pour un point rigidement fixé dans  $S_1$

Pour calculer l'accélération, on applique une seconde fois la loi de transformation (1.2.4).

On obtient

$$\mathbf{a}_{abs} = \mathbf{a}_{rel} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel} \quad (1.2.6)$$

On la dissocie habituellement en trois parties

$$\mathbf{a}_{abs} = \mathbf{a}_{rel} + \mathbf{a}_{ent} + \mathbf{a}_{cor} \quad (1.2.7)$$

où le terme

$$\mathbf{a}_{rel} = \frac{d}{dt} \mathbf{v}_{rel} \quad (1.2.8)$$

est l'accélération relative, le terme

$$\mathbf{a}_{cor} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel} \quad (1.2.9)$$

est l'accélération de Coriolis et où le terme d'entraînement comprend les termes complémentaires

$$\mathbf{a}_{ent} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \quad (1.2.10)$$

Il résulte de (1.2.7) que dans un repère non inertiel, la seconde loi de la mécanique a pour expression

$$m \mathbf{a}_{rel} = \mathbf{F} - m \mathbf{a}_{cor} - m \mathbf{a}_{ent} \quad (1.2.11)$$

Si de plus,  $S_1$  est en translation non uniforme par rapport à  $S$  avec une vitesse  $\mathbf{v}_0$  et une accélération  $\mathbf{a}_0$ , l'équation (1.2.5) est remplacée par la forme plus générale

$$\mathbf{v}_{abs} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{rel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (1.2.12)$$

et de même

$$\mathbf{a}_{abs} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_{rel} + \mathbf{a}_{ent} + \mathbf{a}_{cor} \quad (1.2.13)$$

En pratique, la décision de ce qui constitue un repère inertiel dépend de la précision dans l'analyse. Dans beaucoup de cas, un repère attaché rigidement à la surface terrestre est suffisant, même si un tel repère est manifestement non inertiel.

### 1.2.3 Application à la description du mouvement relatif d'un corps rigide

En dynamique des constructions mécaniques, une application fondamentale des relations (1.2.12) et (1.2.13) concerne la description du mouvement relatif dans les mécanismes.

Considérons le cas d'un élément rigide de mécanisme (fig. 1.2.1) dont nous connaissons la vitesse d'un point  $A$ ,  $\mathbf{v}_A$ , et la vitesse de rotation  $\boldsymbol{\omega}$  autour de ce point. On peut en déduire la vitesse d'un point quelconque  $B$  comme suit.

Soit  $S$  un repère inertiel et  $S_1$  un repère entraîné par l'élément de mécanisme rigide d'origine  $A$ . Pour calculer la vitesse  $\mathbf{v}_B$  du point  $B$ , nous pouvons appliquer directement la relation (1.2.12) avec

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= \mathbf{v}_A \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \end{aligned}$$

en tenant compte de l'indéformabilité de l'élément

$$\mathbf{v}_{rel} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{AB}) = 0$$

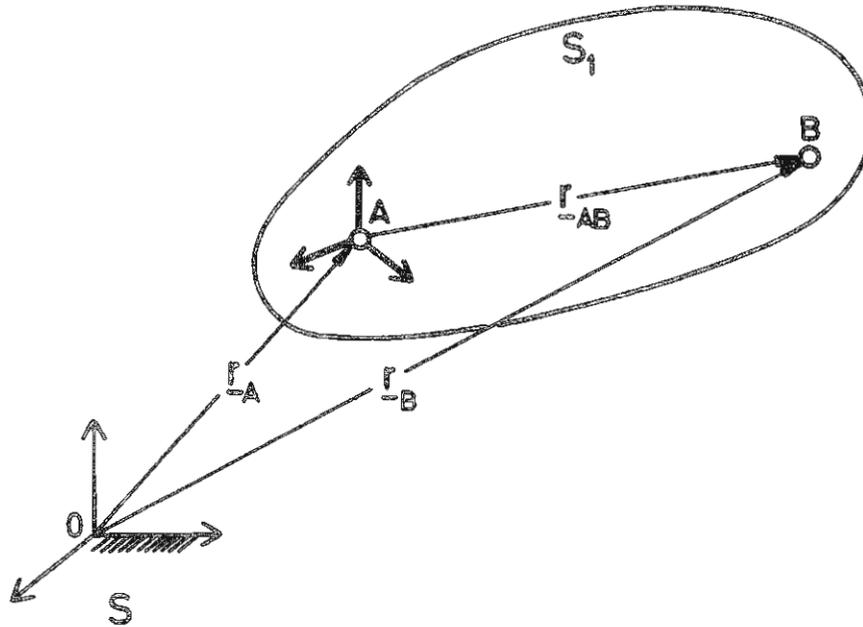


figure 1.2.1  
cinématique du corps rigide

On obtient ainsi l'expression de la vitesse du point  $B$  à partir de celle du point  $A$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \quad (1.2.14)$$

De même, on peut calculer l'accélération du point  $B$  par application directe de la relation (1.2.13) de calcul des accélérations à condition de supposer également connues l'accélération du point  $A$ ,  $\mathbf{a}_A$ , et l'accélération angulaire  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  autour de ce point. On note que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= \mathbf{a}_A \\ \mathbf{a}_{rel} &= \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_{AB}) = 0 \\ \mathbf{a}_{cor} &= 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel} = 0 \end{aligned}$$

ce qui fournit l'expression

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)] \quad (1.2.15)$$

## Exemple 1

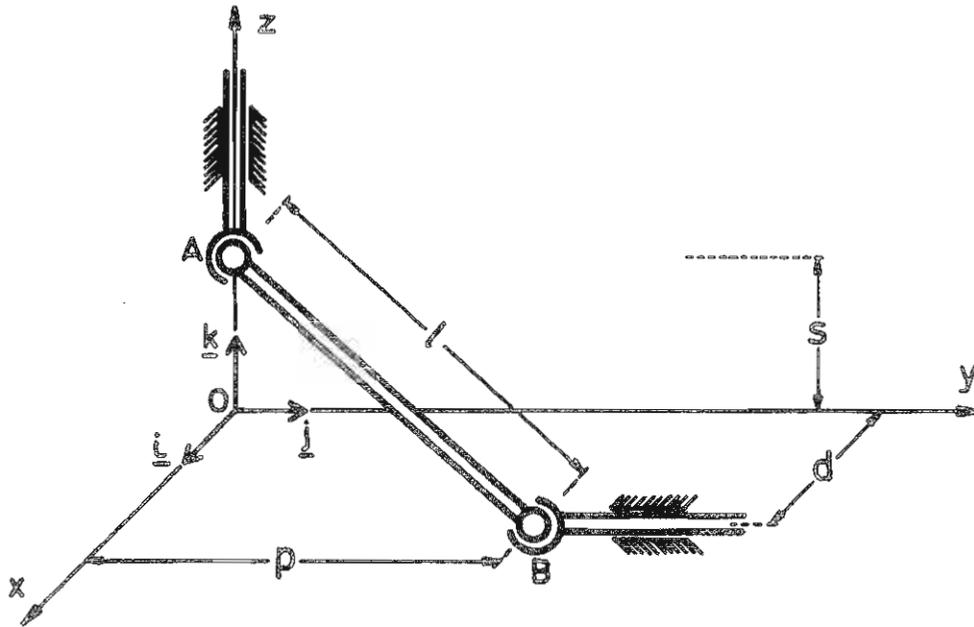


figure 1.2.2  
cinématique d'un mécanisme spatial

Considérons le mécanisme de la figure 1.2.2. Deux barres sont astreintes par des coulisseaux à se déplacer parallèlement aux axes  $Oz$  et  $Oy$ . Leur distance  $d$  reste constante. Leurs extrémités  $A$  et  $B$  sont connectées au moyen de joints sphériques aux extrémités d'une bielle rigide  $AB$  de longueur  $\ell$ . A l'instant considéré, le point  $A$  est à la hauteur  $s$ .

## Calcul des vitesses

Connaissant la vitesse du point  $A$ , on peut déduire celle de  $B$  comme suit. La direction des vecteurs  $\mathbf{v}_A$  et  $\mathbf{v}_B$  étant connue, on peut écrire

$$\mathbf{v}_A = v_A \mathbf{k} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_B = v_B \mathbf{j} \quad (1.2.16)$$

A l'instant considéré, les points  $A$  et  $B$  ont pour position

$$\mathbf{r}_A = s \mathbf{k} \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_B = d \mathbf{i} + p \mathbf{j} \quad (1.2.17)$$

avec

$$p = \sqrt{\ell^2 - s^2 - d^2}$$

On peut d'autre part calculer la vitesse du point  $B$  par la relation

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \quad (1.2.14)$$

Par multiplication par le vecteur  $\mathbf{r}_{AB}$ , on en déduit

$$(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \cdot \mathbf{r}_{AB} = 0$$

soit explicitement

$$v_B p + v_A s = 0$$

D'où l'amplitude de la vitesse du point  $B$

$$v_B = -\frac{v_A s}{\sqrt{\ell^2 - s^2 - d^2}} \quad (1.2.18)$$

On peut ensuite calculer la vitesse de rotation de la barre  $\boldsymbol{\omega}$  en notant que celle-ci est composée d'une composante de rotation autour de son axe propre qui reste indéterminée et que l'on peut donc supposer nulle

(en effet, elle ne contribue pas au mouvement d'ensemble) et d'une composante orthogonale à la barre et au vecteur vitesse relatif. On l'obtient en multipliant vectoriellement l'équation (1.2.14) par  $\mathbf{r}_{AB}$

$$\mathbf{r}_{AB} \times (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) = \mathbf{r}_{AB} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \quad (1.2.19)$$

On développe ensuite le double produit vectoriel

$$\mathbf{r}_{AB} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} = \boldsymbol{\omega} r_{AB}^2 - \mathbf{r}_{AB} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{AB}) \quad (1.2.20)$$

et on note que la deuxième composante de (1.2.20) est nulle en vertu de l'hypothèse ci-dessus. D'où

$$\mathbf{r}_{AB} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} = \boldsymbol{\omega} \ell^2 \quad (1.2.21)$$

Par substitution dans (1.2.19) on obtient le résultat

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\ell^2} \mathbf{r}_{AB} \times (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \quad (1.2.22)$$

que l'on peut encore expliciter sous la forme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{\ell^2} (d\mathbf{i} + p\mathbf{j} - s\mathbf{k}) \times (v_b\mathbf{j} - v_a\mathbf{k}) \\ &= \frac{v_a}{p\ell^2} [pd\mathbf{j} - sd\mathbf{k} - (\ell^2 - d^2)\mathbf{i}] \end{aligned}$$

### Calcul des accélérations

Pour calculer l'accélération en translation  $\mathbf{a}_B$  et celle en rotation  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ , on part de la relation

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}) \quad (1.2.23)$$

En notant que

$$\mathbf{a}_A = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_B = a_B \mathbf{j}$$

et en formant le produit scalaire

$$(\mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A) \cdot \mathbf{r}_{AB} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}) \cdot \mathbf{r}_{AB}$$

on obtient donc l'amplitude d'accélération du point B

$$a_B = \frac{1}{p} [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}) \cdot \mathbf{r}_{AB}] \quad (1.2.24)$$

De la même manière, on calcule l'accélération angulaire  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  en remettant (1.2.23) sous la forme

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{AB} = (\mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB})$$

et en multipliant vectoriellement par  $\mathbf{r}_{AB}$

$$(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{AB}) \times \mathbf{r}_{AB} = -\dot{\boldsymbol{\omega}} \ell^2 = (\mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A) \times \mathbf{r}_{AB} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}) \times \mathbf{r}_{AB}$$

On note que le dernier terme s'annule en tenant compte de (1.2.20), de telle sorte que l'accélération angulaire a pour expression

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\ell^2} \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{a}_B \quad (1.2.25)$$

et peut être mise sous la forme finale

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\ell^2} a_B [d\mathbf{k} + s\mathbf{i}]$$

## Exemple 2

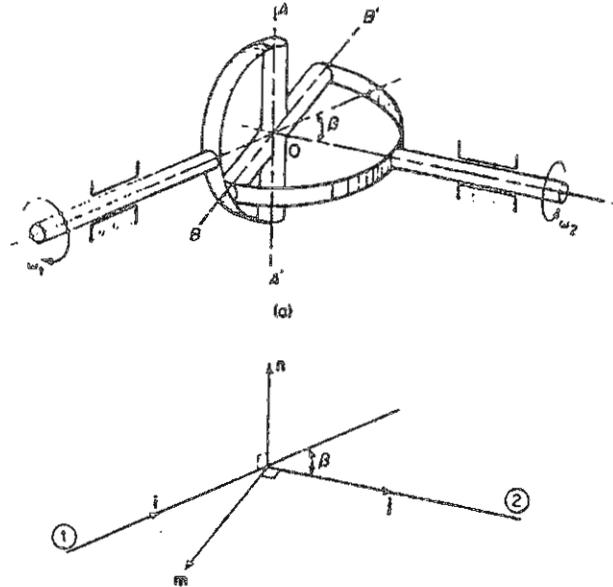


figure 1.2.3  
cinématique d'un joint universel

Ce second exemple met en évidence le fait qu'une approche géométrique plus directe peut souvent être mise en oeuvre pour étudier la cinématique d'un mécanisme particulier sans recourir explicitement au formalisme que nous venons de décrire.

Considérons le joint universel de la figure (1.2.3a) qui fournit un moyen de connecter deux arbres à axes non parallèles mais concourants, formant entre eux un angle  $\beta$ . La croix  $AA'OBB'$  est articulée aux arbres 1 et 2 autour des axes  $AA'$  et  $BB'$  respectivement. Pour déterminer la relation entre vitesses d'entrée et de sortie 1 et 2, on définit les vecteurs unitaires de la figure (1.2.3b).  $\mathbf{i}$  et  $\mathbf{j}$  sont supportés par les axes des deux arbres,  $\mathbf{n}$  est la normale commune et  $\mathbf{m}$  est la perpendiculaire à  $\mathbf{j}$  dans le plan des deux axes. Il en résulte que  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$ .

Si l'arbre 1 est tourné d'un angle  $\theta$  à partir de la configuration de référence représentée et donne lieu à une rotation  $\phi$  de l'arbre 2, on calcule successivement

$$\begin{aligned} \mathbf{OA} = \mathbf{r}_1 &= \mathbf{n} \cos \theta + \mathbf{i} \times \mathbf{n} \sin \theta \\ \mathbf{OB} = \mathbf{r}_2 &= \mathbf{m} \cos \phi + \mathbf{j} \times \mathbf{m} \sin \phi \end{aligned}$$

Dans toutes les configurations,  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  restent perpendiculaires, de telle sorte que

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = (\mathbf{n} \cos \theta + \mathbf{i} \times \mathbf{n} \sin \theta) \cdot (\mathbf{m} \cos \phi + \mathbf{j} \times \mathbf{m} \sin \phi) = 0$$

Notant que

$$\mathbf{m} \times \mathbf{j} = \mathbf{n} \quad \text{et} \quad (\mathbf{i} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} = +\cos \beta$$

on obtient la relation géométrique entre angles d'entrée et de sortie

$$\cos \theta \sin \phi - \cos \beta \sin \theta \cos \phi = 0$$

soit

$$\tan \phi = \cos \beta \tan \theta \tag{1.2.26}$$

Par différentiation, on calcule successivement

$$\frac{1}{\cos^2 \phi} \dot{\phi} = \frac{\cos \beta}{\cos^2 \theta} \dot{\theta}$$

et par substitution de

$$\frac{1}{\cos^2 \phi} = 1 + \tan^2 \phi = 1 + \cos^2 \beta \tan^2 \theta$$

on obtient

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 \cos \beta}{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \theta} \quad (1.2.27)$$

De la même manière, par une seconde dérivation temporelle, on peut calculer l'accélération angulaire

$$\dot{\omega}_2 = \frac{\omega_1^2 \sin^2 \beta \cos \beta \sin 2\theta}{(1 - \sin^2 \beta \sin^2 \theta)^2} \quad (1.2.28)$$

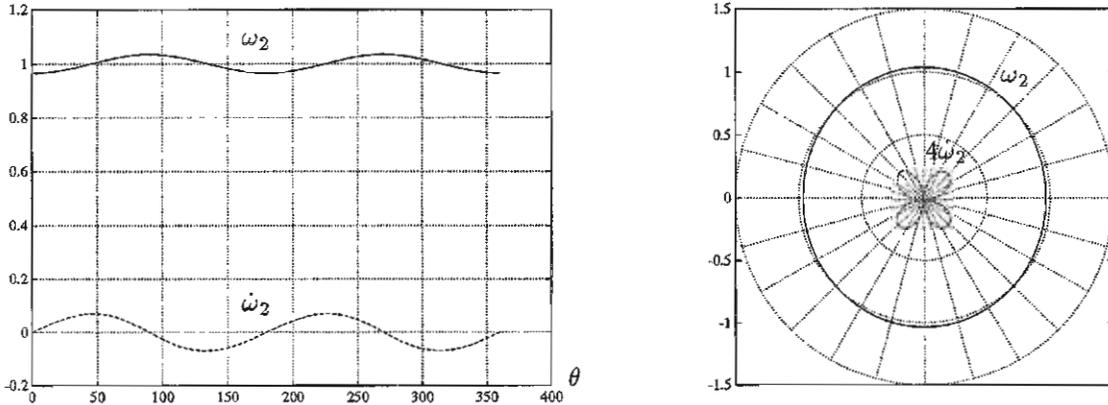


figure 1.2.4  
cinématique d'un joint universel -  $\beta = 15^\circ$   
 $\omega_2$  et  $\dot{\omega}_2$  pour vitesse d'entrée  $\omega_1$  unitaire

On constate que, à moins que  $\beta$  ne soit petit, l'utilisation du joint universel peut donner lieu en sortie à des variations de vitesse et d'accélération gênantes pour un mouvement d'entrée à vitesse angulaire constante. La figure (1.2.4) illustre cette situation pour un joint universel dont le mésalignement est de  $15^\circ$ . Cet effet peut aisément être compensé par la connexion de deux joints universels en série.

*Remarque*

La procédure algébrique que nous avons suivie dans cet exemple pour établir les relations cinématiques du système consiste à écrire une relation cinématique entre déplacements à l'entrée et à la sortie du système et à effectuer ensuite sa dérivation temporelle. Une telle procédure peut être adoptée pour l'étude cinématique de nombreux systèmes, sans devoir recourir au formalisme général que nous avons décrit plus haut.

### 1.3 La dynamique d'un système de points matériels

Le problème de la localisation d'un système mécanique dans l'espace implique la détermination d'un certain nombre de variables en fonction du temps. Ce nombre, qui ne peut être réduit à moins d'imposer des contraintes supplémentaires, est une caractéristique fondamentale du système : c'est son *nombre de degrés de liberté*.

Par exemple, le point matériel libre de se mouvoir dans l'espace possède 3 degrés de liberté. Le système de deux points matériels sujet à la contrainte de distance invariable comporte 5 degrés de liberté.

Considérons un système de  $n$  points matériels de masse  $m_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) et soit  $\mathbf{r}_i$  le rayon vecteur de chacun d'eux. La force agissant sur  $m_i$  est de la forme

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^e + \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij} \quad (1.3.1)$$

où  $\mathbf{F}_i^e$  représente la résultante des forces extérieures, et  $\mathbf{F}_{ij}$  représente la force exercée sur la masse  $m_i$  par la masse  $m_j$  (force de liaison rigide ou élastique, effet de champ,...).

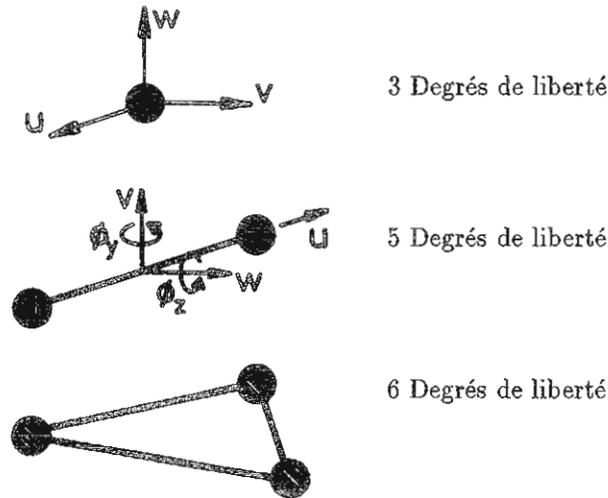


figure 1.3.1  
degrés de liberté d'un système de points matériels

### 1.3.1 Mouvement du centre de masse

Le mouvement de la masse  $m_i$  relativement à un repère inertiel est r eg e par

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^e + \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij} = m_i \dot{\mathbf{v}}_i \quad (1.3.2)$$

Pour l'ensemble du système, on obtient par sommation

$$\sum_i \mathbf{F}_i^e + \sum_i \sum_j \mathbf{F}_{ij} = \sum_i \mathbf{F}_i^e = \sum_i m_i \dot{\mathbf{v}}_i \quad (1.3.3)$$

la disparition du terme des forces de liaison résultant de l'application de la troisième loi du mouvement. Définissons la résultante des forces extérieures

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i^e \quad (1.3.4)$$

et le rayon vecteur du centre de masse par

$$M \mathbf{r}_C = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \quad (1.3.5)$$

avec la masse totale du système  $M = \sum_i m_i$ . Il vient par dérivation de (1.3.5)

$$M \mathbf{v}_C = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \quad (1.3.6)$$

et par substitution de (1.3.4) et (1.3.6) dans (1.3.3)

$$\mathbf{F} = M \ddot{\mathbf{r}}_C \quad (1.3.7)$$

D'où le résultat classique important :

*le centre de masse d'un système de particules se meut comme si la masse entière du système y était concentrée et que la résultante des forces extérieures y était appliquée.*

Deux intégrales premières de l'équation (1.3.7) jouent un rôle important :

## a. Variation de la quantité de mouvement

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = M[\mathbf{v}_C(t_2) - \mathbf{v}_C(t_1)]} \quad (1.3.8)$$

L'intégrale du membre de gauche est l'impulsion de la force extérieure. L'équation (1.3.8) montre que la variation de la quantité de mouvement du centre de masse est égale à l'impulsion de la force extérieure.

D'où le théorème :

la quantité de mouvement du centre de masse ou, ce qui revient au même, celle du système complet est constante si aucune résultante de force extérieure n'agit sur le système.

## b. Variation de l'énergie cinétique

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} d\mathbf{r}_C = \left[ \frac{1}{2} M \mathbf{v}_C^2 \right]_1} \quad (1.3.9)$$

Le travail produit par la résultante des forces extérieures agissant au centre de masse est égal à la variation d'énergie cinétique du centre de masse.

Dans le cas où la force dépend d'un potentiel  $\mathcal{V}$  par la relation

$$\mathbf{F} = - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{r}_C} \quad (1.3.10)$$

l'équation (1.3.9) devient l'équation de conservation de l'énergie totale

$$\left[ \frac{1}{2} M \mathbf{v}_C^2 + \mathcal{V} \right]_1 = 0 \quad (1.3.11)$$

## 1.3.2 Energie cinétique d'un système

L'énergie cinétique totale d'un système est la somme des énergies cinétiques des masses individuelles. Néanmoins, on peut souvent l'exprimer sous forme d'une somme qui rend le calcul de l'énergie cinétique moins difficile.

L'énergie cinétique des masses en mouvement relativement à l'origine du repère est

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{s}}_i^2 \quad (1.3.12)$$

avec

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_i \quad (1.3.13)$$

où  $\mathbf{r}_i$  est le vecteur position de  $m_i$  mesuré à partir du centre de masse  $C$ . D'où la décomposition

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_C^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \dot{\mathbf{r}}_C$$

avec, par définition du centre de masse

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = 0$$

et le résultat

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_C^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2} \quad (1.3.14)$$

D'où le théorème:

l'énergie cinétique totale du système est égale à l'énergie cinétique du centre de masse augmentée de l'énergie cinétique du mouvement relativement au centre de masse.

### 1.3.3 Quantité de mouvement angulaire

À chaque masse du système est associée la quantité de mouvement  $m_i \mathbf{v}_i$  dont le moment autour du centre  $O$  est  $\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$ . Par définition, la quantité de mouvement angulaire du système autour de  $O$  est

$$\mathbf{H}(O) = \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) \quad (1.3.15)$$

et il s'ensuit que

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{H}(O)] = \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2})$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{H}(O)] = \sum_i \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i^e + \sum_j \mathbf{F}_{ij}) \quad (1.3.16)$$

Tenant compte de la disparition du terme associé aux forces internes en vertu de la loi de l'action et de la réaction, il vient

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{H}(O)] = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^e = \mathbf{M}(O) \quad (1.3.17)$$

où  $\mathbf{M}(O)$  est le couple des forces extérieures autour du point  $O$ .

Considérons ensuite un point  $A$  arbitraire de rayon vecteur  $\mathbf{a}$ . Si  $\mathbf{p}_i$  est le rayon vecteur de  $m_i$  relativement à  $A$ , il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(A) &= \sum_i \mathbf{p}_i \times m_i \mathbf{v}_i \\ &= \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{a}) \times m_i \mathbf{v}_i \\ &= \mathbf{H}(O) - \mathbf{a} \times M \mathbf{v}_C \end{aligned} \quad (1.3.18)$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{H}(A)] &= \frac{d}{dt}[\mathbf{H}(O)] - \dot{\mathbf{a}} \times M \mathbf{v}_C - \mathbf{a} \times M \dot{\mathbf{a}}_C \\ &= \mathbf{M}(O) - \dot{\mathbf{a}} \times M \mathbf{v}_C - \mathbf{a} \times \mathbf{F} \end{aligned}$$

soit

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{H}(A)] = \mathbf{M}(A) - \dot{\mathbf{a}} \times M \mathbf{v}_C \quad (1.3.19)$$

La validité du résultat plus simple

$$\boxed{\frac{d}{dt}[\mathbf{H}(A)] = \mathbf{M}(A)} \quad (1.3.20)$$

est assurée dans deux cas :

- 1)  $\dot{\mathbf{a}} = 0$ , c'est-à-dire lorsque le point  $A$  est fixé relativement à  $O$  ;
- 2) si  $\dot{\mathbf{a}}$  est parallèle à  $\mathbf{v}_C$ , c'est-à-dire si le point  $A$  se meut parallèlement au centre de masse.

D'où

*le taux de variation de la quantité de mouvement angulaire d'un point est égal au moment des forces extérieures autour de ce point pour autant que ce point soit inertiel, se meuve parallèlement au centre de masse ou soit le centre de masse.*

On peut également calculer par rapport à  $A$  le moment de la quantité de mouvement relatif par rapport au même point

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{rel}(A) &= \sum_i \mathbf{p}_i \times m_i \left( \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \right) \\ &= \sum_i \mathbf{p}_i \times m_i (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{a}}) \end{aligned}$$

soit

$$\mathbf{H}_{rel}(A) = \mathbf{H}(A) + \dot{\mathbf{a}} \times \sum_i m_i \mathbf{p}_i \quad (1.3.21)$$

Dans le cas où le point  $A$  est le centre de masse du système, l'équation se réduit au résultat intéressant

$$\boxed{\mathbf{H}_{rel}(C) = \mathbf{H}(C)} \quad (1.3.22)$$

qui simplifie souvent considérablement le calcul de  $\mathbf{H}(C)$ .

### 1.4 Le mouvement d'un corps rigide

Un corps rigide est un système dynamique qui, bien que consistant en un nombre important de points matériels, possède un petit nombre de degrés de liberté. La contrainte de rigidité réduit à 6 le nombre de degrés de liberté dans le cas le plus général, celui d'un corps libre de translation et de rotation dans l'espace.

Plutôt que de considérer le corps rigide comme un système de points matériels, on procède par intégration sur le volume. Les 6 degrés de liberté impliquent l'écriture de 6 équations du mouvement pour la détermination des six variables. Trois de ces équations décrivent le mouvement du centre de masse : ce sont les équations (1.3.7). Les trois autres décrivent le mouvement de rotation autour du centre de masse et résultent de considérations sur la quantité de mouvement angulaire. Soit  $\omega$  la vitesse angulaire du corps rigide. Sa quantité de mouvement angulaire autour du centre de masse  $C$  est

$$\mathbf{H}(C) = \int_V \mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r}) \rho dV \quad (1.4.1)$$

où  $\mathbf{r}$  est le rayon vecteur de l'élément de volume  $dV$  relativement à  $C$ .  $\rho$  est la masse du matériau par unité de volume.

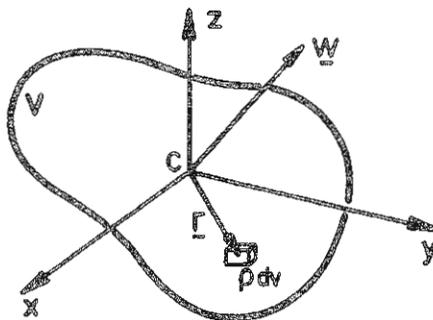


figure 1.4.1

Par développement du double produit vectoriel, on trouve

$$\mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r}) = r^2 \omega - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \omega)$$

D'où l'expression de la quantité de mouvement angulaire autour de  $C$

$$\mathbf{H}(C) = \mathbf{I}(C) \omega \quad (1.4.2)$$

où  $\mathbf{I}(C)$  est le tenseur d'inertie autour du centre de gravité, qui a pour terme général

$$I_{ij}(C) = \int_V \rho [r^2 \delta_{ij} - r_i r_j] dV \quad (1.4.3)$$

Lorsque le corps est indéformable, les différents termes de (1.4.3) ne dépendent pas du mouvement. Si l'on se limite à ce cas, on peut en discuter les propriétés. Adoptons un système d'axes  $(x, y, z)$  orthogonal dont l'origine est en  $C$ . Si l'on utilise la notation matricielle

$$\mathbf{I}(C) = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_V \rho [y^2 + z^2] dV, & I_{yy} &= \int_V \rho [x^2 + z^2] dV, & I_{zz} &= \int_V \rho [x^2 + y^2] dV \\ I_{xy} &= \int_V \rho xy dV, & I_{yz} &= \int_V \rho yz dV, & I_{xz} &= \int_V \rho xz dV \end{aligned}$$

il est clair que les éléments du tenseur symétrique du second ordre  $\mathbf{I}$  sont les moments et produits d'inertie usuels.

Si l'on doit calculer le moment d'inertie autour d'une ligne définie par un vecteur unitaire quelconque  $\mathbf{e}$ , on le calcule par

$$\mathbf{I}_{ee} = \mathbf{e}^T \mathbf{I} \mathbf{e}$$

Il est toujours possible de déterminer en  $C$  un système d'axes orthogonaux tels que le tenseur  $\mathbf{I}$  soit réduit à la forme diagonale.

Retournant à l'analyse du mouvement rotatoire, on s'aperçoit que le tenseur d'inertie  $\mathbf{I}$  est dépendant du temps, à moins d'utiliser un système d'axes li es au corps et qui tourne donc avec lui. Soit donc  $S_1$  le repère li e au corps : pour la simplicité des écritures, supposons qu'il coïncide avec les axes principaux d'inertie. Dénotons d'autre part par  $S$  un repère d'orientation fixe dans l'espace, centr e en  $C$ . Dans ce cas, tenant compte de (1.2.4) et (1.3.20)

$$\left[ \frac{d}{dt} \mathbf{H}(C) \right]_S = \left[ \frac{d}{dt} \mathbf{H}(C) \right]_{S_1} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}(C) = \mathbf{M}(C) \quad (1.4.4)$$

et tenant compte de l'invariance des moments d'inertie par rapport au mouvement

$$\mathbf{I}(C) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}(C) \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}(C) \quad (1.4.5)$$

Puisque l'on admet que les axes sont tels que

$$\mathbf{I}(C) = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Le système (1.4.5) fournit les trois équations scalaires d'Euler régissant le mouvement de rotation :

$$\begin{aligned} I_{xx} \dot{\omega}_x + (I_{zz} - I_{yy}) \omega_y \omega_z &= M_x \\ I_{yy} \dot{\omega}_y + (I_{xx} - I_{zz}) \omega_z \omega_x &= M_y \\ I_{zz} \dot{\omega}_z + (I_{yy} - I_{xx}) \omega_x \omega_y &= M_z \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Leur intégration dans le cas général est un problème difficile et ne peut le plus souvent être réalisée que par voie numérique. Il est intéressant de calculer également, en termes du tenseur d'inertie, l'énergie cinétique associée au mouvement de rotation

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_V \rho (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \rho \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dV \end{aligned}$$

Soit, par (1.4.1) et (1.4.2)

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (1.4.7)$$

D'où le résultat

*l'énergie cinétique associée au mouvement de rotation est la forme quadratique du tenseur des inerties obtenue à partir du vecteur des vitesses angulaires.*

**Exemple 3**

Soit une plaque de moments principaux d'inertie  $I_1 = \frac{mb^2}{2}$  et  $I_2 = \frac{ma^2}{2}$  que l'on met en rotation à la vitesse autour d'un axe faisant un angle avec l'axe principal d'inertie. Sa rotation induit aux paliers un couple que l'on peut évaluer comme suit.

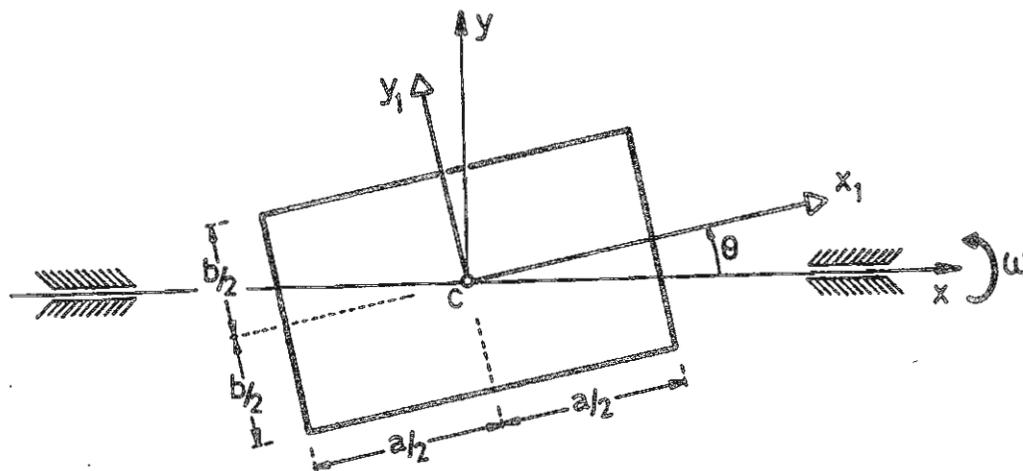


figure 1.4.2  
Couple gyroscopique sur plaque en rotation

Calculons les composantes du vecteur de rotation dans le repère lié à la plaque

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega \cos \theta \\ -\omega \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il en résulte le vecteur de quantité de mouvement angulaire

$$H = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \cos \theta \\ -\omega \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \omega \cos \theta \\ -I_2 \omega \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

On calcule ensuite les moments autour du centre de gravité

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \cos \theta \\ -\omega \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \omega \cos \theta \\ -I_2 \omega \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega^2 (I_1 - I_2) \cos \theta \sin \theta \end{bmatrix}$$

Le couple résultant est donc un couple de basculement autour d'un axe perpendiculaire et d'intensité

$$M_3 = \omega^2 (I_1 - I_2) \cos \theta \sin \theta$$

Son signe indique que le couple appliqué par le rotor sur ses paliers agit dans le sens des aiguilles d'une montre et tend donc à ramener le rotor sur l'axe de rotation tant que  $I_1 > I_2$ . Ce couple d'origine gyroscopique joue, comme on le verra, un rôle fondamental dans le comportement des machines tournant à grande vitesse.

**1.5 Dynamique analytique**

La connaissance de la dépendance par rapport au temps des vecteurs positions  $r_i(t)$  définissant la position d'un système de points matériels relativement à un repère de référence peut être obtenue indirectement à partir de la connaissance de certains paramètres  $q_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) si les relations

$$\begin{aligned} r_i &= r_i(q_j, t) & i &= 1, \dots, n \\ & & j &= 1, \dots, m \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

sont connues. Les paramètres  $q_j$  qui déterminent complètement la position du système dans l'espace sont les *coordonnées généralisées* et sont en nombre égal au nombre de degrés de liberté. Tout choix de paramètre qui spécifie de façon univoque la configuration du système est approprié. On distingue essentiellement deux types de systèmes mécaniques:

- les systèmes *holonomes*, dans lesquels les liaisons existant entre points matériels prennent la forme

$$f(\mathbf{r}_i, t) = 0 \quad (1.5.2)$$

et peuvent donc être résolues de manière explicite pour fournir la position des différents points du système à partir de coordonnées généralisées que l'on peut varier de façon indépendante, sans violation des liaisons;

- les systèmes *non holonomes*, dans lesquels les coordonnées ne peuvent être variées de façon indépendante mais doivent vérifier des liaisons non intégrables a priori. Les liaisons s'expriment alors sous forme différentielle

$$\sum_j a_{kj} dq_j + b_k dt = 0 \quad k = 1, \dots, s \quad (1.5.3)$$

Dans le cas le plus général, les coefficients  $a_{kj}$  et  $b_k$  peuvent dépendre des  $q_j$  et de  $t$ . Si le temps apparaît explicitement dans les contraintes (1.5.2) et (1.5.3), le système est rhéonome. Autrement, il est dit scléronome.

### 1.5.1 Notion de déplacement virtuel

La mécanique analytique repose sur la notion de déplacement virtuel ou de variation de déplacement que l'on définit comme suit. Soit  $\mathbf{r}_i(q_j, t)$  la configuration réelle du système à un instant donné  $t$ . Imaginons une configuration voisine compatible avec les liaisons  $\mathbf{r}_i(q_j^*, t)$  et définissons les variations des coordonnées généralisées par

$$\delta q_j = q_j^* - q_j \quad (1.5.4)$$

Il en résulte les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (1.5.5)$$

Notons également que les vitesses généralisées sont telles que

$$\delta \dot{q}_j = \dot{q}_j^* - \dot{q}_j = \frac{d}{dt}(q_j^* - q_j) = \frac{d}{dt}(\delta q_j) \quad (1.5.6)$$

ce qui implique que les opérations de variation et de dérivation par rapport au temps sont commutables.

### 1.5.2 Forces généralisées et principe de d'Alembert

Soit un déplacement virtuel  $\delta \mathbf{r}_i$  du système compatible avec les liaisons. Il en résulte l'expression du travail fourni par les forces

$$\delta \mathcal{W} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i \quad (1.5.7)$$

Séparons les forces  $\mathbf{F}_i$  agissant sur la masse  $i$  en forces extérieures appliquées et forces de liaison

$$\delta \mathcal{W} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i^e + \mathbf{F}_i^c) \cdot \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Définissons ensuite les forces généralisées correspondant aux forces appliquées d'une part et aux liaisons d'autre part, en posant

$$Q_j^e = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^e \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

$$Q_j^c = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^c \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

auquel cas

$$\delta W = \sum_{j=1}^m Q_i^e \delta q_j + \sum_{j=1}^m Q_i^c \delta q_j$$

Comme, en l'absence de friction, le travail total associé aux forces de liaison est nul, il reste

$$\delta W = \sum_{j=1}^m Q_j^e \delta q_j \quad (1.5.8)$$

Nous omettrons dorénavant l'indice  $e$  pour dénommer les forces généralisées extérieures.

Dans les cas où l'hypothèse de l'existence d'un potentiel de forces extérieures est vérifiée, entraînant

$$Q_j = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_j} \quad (1.5.9)$$

on obtient alors le résultat

$$\delta W = -\delta \mathcal{V}$$

Pour prendre en compte les forces d'inertie, on peut écrire les équations du mouvement sous la forme d'équations d'équilibre dynamique

$$\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = 0$$

auquel cas le travail virtuel associé est nul

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (1.5.10)$$

Le principe contenu dans l'équation (1.5.10) étend aux systèmes dynamiques le principe des travaux virtuels et est dû à d'Alembert. Lorsqu'on se limite à des déplacements compatibles avec les liaisons, le principe peut s'écrire

$$\sum_{j=1}^m Q_j \delta q_j = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i \quad (1.5.11)$$

### 1.5.3 Les équations de Lagrange

Les équations de Lagrange constituent le fondement de la mécanique analytique. Nous les présenterons ici dans le cas général d'un système non holonome rhéonome, consistant en  $n$  points matériels de masse  $m_i$ , décrit par  $m$  coordonnées généralisées devant satisfaire les liaisons non holonomes

$$\sum_j a_{kj} dq_j + b_k dt = 0 \quad k = 1, \dots, s \quad (1.5.12)$$

Elles sont obtenues en exprimant, dans le principe de d'Alembert, les termes d'inertie en fonction de l'énergie cinétique calculée à partir des coordonnées généralisées.

Par définition

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$$

avec

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (1.5.13)$$

d'où

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (1.5.14)$$

et

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right]$$

Notons d'autre part que

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial q_j} &= \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right)\end{aligned}$$

et par sommation sur les  $q_j$ , on obtient

$$\sum_j \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_j \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i$$

Il en résulte l'équation de travail virtuel en termes des coordonnées généralisées

$$\sum_j \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0 \quad (1.5.15)$$

Dans le cas non holonome, les  $q_j$  sont des quantités non dépendantes qui doivent vérifier les équations de liaison

$$\sum_j a_{kj} \delta q_j = 0 \quad k = 1, \dots, s \quad (1.5.16)$$

On utilise dans ce cas le théorème des multiplicateurs lagrangiens selon lequel une condition suffisante d'annulation de l'expression différentielle (1.5.15), dans laquelle les variations sont contraintes par (1.5.16), est d'exprimer l'équilibre dynamique en termes de forces de liaison représentées par des multiplicateurs lagrangiens sous la forme

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j - \sum_{k=1}^s \lambda_k a_{kj} \\ \sum_j a_{kj} \dot{q}_j + b_k = 0 \end{cases} \quad (1.5.17)$$

Si le système est holonome, le système d'équations (1.5.17) se réduit à

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad j = 1, \dots, n \quad (1.5.18)$$

Lorsqu'il existe une fonction potentielle  $\mathcal{V}$  telle que

$$Q_j = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

l'équation (1.5.18) peut s'écrire en termes du lagrangien du système, défini par la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle

$$\mathcal{L} = T - \mathcal{V} \quad (1.5.19)$$

sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (1.5.20)$$

Un facteur essentiel contribuant à la solution des équations (1.5.20) est l'existence de coordonnées cycliques. En fait, dans les problèmes dynamiques, la possibilité de trouver une représentation analytique du mouvement dépend de l'existence de coordonnées cycliques. Une coordonnée  $q_j$  est cyclique si elle n'apparaît pas explicitement dans le lagrangien

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$$

Si la relation précédente est valide, il en résulte que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = c_j \quad (1.5.21)$$

auquel cas une intégrale première du mouvement est accessible.

**Exemple 4**

Considérons le moteur monocylindre de la figure 1.5.1. Le formalisme de Lagrange permet d'en exprimer très simplement l'équation du mouvement dont résulte le comportement dynamique. L'origine des axes  $(x, y)$  est placée sur l'axe du vilebrequin du moteur et l'axe  $x$  est parallèle à l'axe du cylindre.

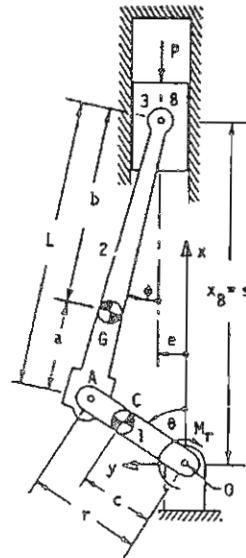


figure 1.5.1

On note successivement:

- $l$  longueur de la bielle  $AB$
- $r$  longueur  $OA$  de la manivelle
- $\lambda = \frac{r}{l}$  rapport des longueurs
- $c$  position du centre de masse de la manivelle
- $a$  et  $b$  distances des points  $A$  et  $B$  au centre de masse de la bielle
- $e$  excentrement du piston
- $m_1$  masse de la manivelle
- $m_2$  masse de la bielle
- $m_3$  masse du piston
- $J_1$  moment d'inertie de la manivelle autour de  $C$
- $J_2 = m_2 r_G^2$  moment d'inertie de la bielle autour de  $G$
- $\theta$  angle de la manivelle, variable d'entrée
- $\phi$  angle de la bielle
- $s$  déplacement du piston
- $P(t)$  force exercée par les gaz sur le piston
- $M_r$  couple résistant exercé par la charge sur le vilebrequin

*Relations cinématiques*

On détermine d'abord la cinématique du système en notant que, par projections verticale et horizontale

$$\begin{aligned} r \cos \theta + l \cos \phi &= s \\ r \sin \theta - l \sin \phi &= e \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \phi &= \sin^{-1}(\lambda \sin \theta - \frac{e}{l}) \\ s &= r(\cos \theta + \frac{1}{\lambda} \cos \phi) \end{aligned} \tag{1.5.22}$$

Par dérivation temporelle, on calcule les rapports de vitesse

$$\begin{aligned} k_\phi &= \frac{\dot{\phi}}{\dot{\theta}} = \frac{\lambda \cos \theta}{\cos \phi} = \frac{\lambda \cos \theta}{\sqrt{1 - (\lambda \sin \theta - \frac{e}{\ell})^2}} \\ k_s &= \frac{\dot{s}}{\dot{\theta}} = -r(\sin \theta + \frac{k_\phi}{\lambda} \sin \phi) \end{aligned} \quad (1.5.23)$$

ainsi que leurs dérivées

$$\begin{aligned} k'_\phi &= \frac{dk_\phi}{d\theta} = -\lambda \frac{\sin \theta}{\cos \phi} + k_\phi^2 \tan \phi \\ k'_s &= \frac{dk_s}{d\theta} = -r(\cos \theta + \frac{1}{\lambda} k'_\phi \sin \phi + \frac{1}{\lambda} k_\phi^2 \cos \phi) \end{aligned} \quad (1.5.24)$$

*Calcul de l'énergie cinétique et moment d'inertie équivalent*

L'énergie cinétique du moteur comporte trois termes

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3 \quad (1.5.25)$$

- L'énergie cinétique de la manivelle:

$$\mathcal{T}_1 = \frac{1}{2}(J_1 + m_1 c^2)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2 \quad (1.5.26)$$

où  $J_0 = J_1 + m_1 c^2$  est le moment d'inertie de la manivelle autour de l'axe du vilebrequin.

- L'énergie cinétique du piston:

$$\mathcal{T}_3 = \frac{1}{2}m_3 s^2 \quad (1.5.27)$$

- L'énergie cinétique de la bielle:

$$\mathcal{T}_2 = \frac{1}{2}J_2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_G^2 \quad (1.5.28)$$

expression que l'on peut mettre sous la forme équivalente

$$\mathcal{T}_2 = \frac{1}{2}m_A(r\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_B\dot{s}^2 + J_{AB}\dot{\phi}^2 \quad (1.5.29)$$

en reportant la masse de la bielle de manière statique à ses deux extrémités

$$m_A = \frac{m_2 b}{\ell} \quad m_B = \frac{m_2 a}{\ell}$$

et à condition d'introduire le moment d'inertie correcteur

$$J_{AB} = J_2 - m_2 ab = m_2(r_G^2 - ab)$$

Par sommation, on obtient l'énergie cinétique totale

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}I(\theta)\dot{\theta}^2 \quad (1.5.30)$$

avec le moment d'inertie équivalent, fonction de l'angle de rotation de la manivelle

$$I(\theta) = (J_0 + m_A r^2) + (m_3 + m_B)k_s^2 + J_{AB}k_\phi^2 \quad (1.5.31)$$

Par développement en série de  $k_s$  et  $k_\phi$  (1.5.23), et dans le cas d'un moteur à excentrement nul, on peut en construire l'expression approch e

$$I(\theta) \simeq J_0 + m_A r^2 + (m_3 + m_B)r^2 \sin^2 \theta + J_{AB}\lambda^2 \cos^2 \theta = A - B \cos 2\theta$$

avec

$$\begin{aligned} A &= J_0 + m_A r^2 + \frac{1}{2}[(m_3 + m_B)r^2 + J_{AB}\lambda^2] \\ B &= [\frac{1}{2}(m_3 + m_B)r^2 - J_{AB}\lambda^2] \end{aligned}$$

*Equations du mouvement*

Compte tenu des conventions de signe adoptées, on calcule comme suit le travail virtuel (1.5.8) de la pression des gaz et du couple résultant

$$\begin{aligned} \delta W &= Q\delta\theta = -P\delta s - M_r\delta\theta \\ &= -(Pk_s + M_r)\delta\theta \end{aligned} \tag{1.5.32}$$

d'où l'équation du mouvement du système

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) + \frac{\partial T}{\partial \theta} + Q = 0$$

qui s'écrit explicitement

$$I(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta)\dot{\theta}^2 = Pk_s + M_r \tag{1.5.33}$$

où

$$C(\theta) = \frac{1}{2} \frac{dI}{d\theta} = (m_3 + m_B)k_s k'_s + J_{AB}k_\phi k'_\phi \tag{1.5.34}$$

est le coefficient centrifuge caractéristique du moteur. L'approximation consistante avec celle adoptée pour  $I(\theta)$  donne

$$C(\theta) \simeq B \sin 2\theta$$

La figure 1.5.2 représente, pour un choix de dimensions réaliste, l'évolution de ces deux quantités au cours d'un cycle. Elle met en évidence une variation considérable des paramètres d'inertie du moteur avec la rotation, effet que l'on doit neutraliser par procédure d'équilibrage.

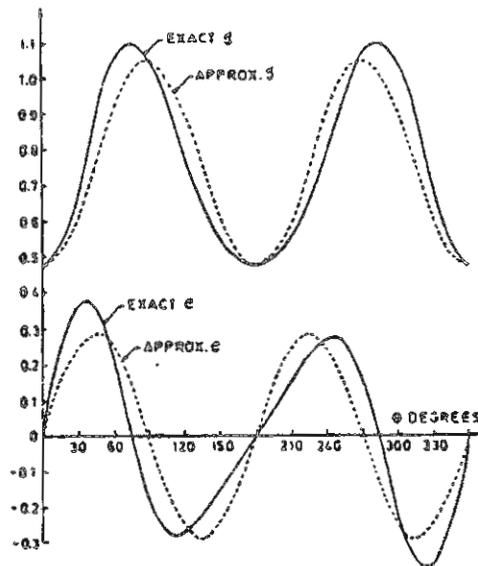


figure 1.5.2  
Variation du moment d'inertie et du couple centrifuge au cours d'un cycle moteur

**Exemple 5:** Calcul des efforts de liaison dans le moteur monocylindre

La procédure que nous avons suivie pour exprimer l'équation régissant le mouvement du moteur monocylindrique ne nous donne pas accès aux efforts de liaison entre les différents organes. Ceux-ci peuvent toutefois être calculés également par la méthode des équations de Lagrange à condition de dissocier les déplacements des différents éléments du mécanisme et d'exprimer les contraintes cinématiques à l'aide de multiplicateurs

de Lagrange. Soient  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  les déplacements des centres de masse de la manivelle et de la bielle. L'énergie cinétique totale du système s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}J_2\dot{\phi}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}m_3\dot{s}^2 \end{aligned} \quad (1.5.35)$$

avec les contraintes cinématiques

$$\begin{aligned} r \cos \theta + l \cos \phi &= s \\ r \sin \theta &= l \sin \phi + e \\ x_1 &= c \cos \theta \\ y_1 &= c \sin \theta \\ x_2 &= r \cos \theta + a \cos \phi \\ y_2 &= b \sin \phi + e \end{aligned} \quad (1.5.36)$$

Exprimons-les sous forme différentielle et associons à chacune d'elles un multiplicateur  $\lambda_i$ .

$$\begin{aligned} \lambda_1 : r \sin \theta \delta \theta + l \sin \phi \delta \phi + \delta s &= 0 \\ \lambda_2 : r \cos \theta \delta \theta - l \cos \phi \delta \phi &= 0 \\ \lambda_3 : \delta x_1 + c \sin \theta \delta \theta &= 0 \\ \lambda_4 : \delta y_1 - c \cos \theta \delta \theta &= 0 \\ \lambda_5 : \delta x_2 + r \sin \theta \delta \theta + a \sin \phi \delta \phi &= 0 \\ \lambda_6 : \delta y_2 - b \cos \phi \delta \phi &= 0 \end{aligned}$$

Leur introduction dans les équations de Lagrange (1.5.16) fournit le système

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= \lambda_3 \\ m_1 \ddot{y}_1 &= \lambda_4 \\ m_2 \ddot{x}_2 &= \lambda_5 \\ m_2 \ddot{y}_2 &= \lambda_6 \\ m_3 \ddot{s} &= \lambda_1 - P \\ J_1 \ddot{\theta} &= -M_r + (\lambda_1 + \lambda_5)r \sin \theta + \lambda_2 r \cos \theta + \lambda_3 c \sin \theta - \lambda_4 c \cos \theta \\ J_2 \ddot{\phi} &= \lambda_1 l \sin \phi - \lambda_2 l \cos \phi + \lambda_5 a \sin \phi - \lambda_6 b \cos \phi \end{aligned} \quad (1.5.37)$$

Il ressort immédiatement de l'examen des équations (1.5.37) que les différents multiplicateurs ont la signification de résultantes de réactions aux articulations du mécanisme. Par exemple, en exprimant l'équilibre dynamique de la manivelle

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 - (X_{01} + X_{12}) &= 0 \\ m_1 \ddot{y}_1 - (Y_{01} + Y_{12}) &= 0 \\ J_1 \ddot{\theta} + M_r - X_{01}c \sin \theta + X_{12}(r - c) \sin \theta + Y_{01}c \cos \theta - Y_{12}(r - c) \cos \theta &= 0 \end{aligned} \quad (1.5.38)$$

où  $(X_{01}, Y_{01})$  et  $(X_{12}, Y_{12})$  représentent respectivement l'action du bâti et de la bielle sur la manivelle. Par comparaison de (1.5.37) et (1.5.38), on obtient les relations entre réactions et multiplicateurs

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= X_{01} + X_{12} \\ \lambda_4 &= Y_{01} + Y_{12} \\ \lambda_1 + \lambda_5 &= -X_{12} \\ \lambda_2 &= Y_{12} \end{aligned}$$

et l'équilibre de la bielle donnerait une série d'équations analogues. Le calcul des multiplicateurs associés aux contraintes de liaison permet donc l'évaluation aisée des efforts de liaison dans le mécanisme en vue de son dimensionnement.

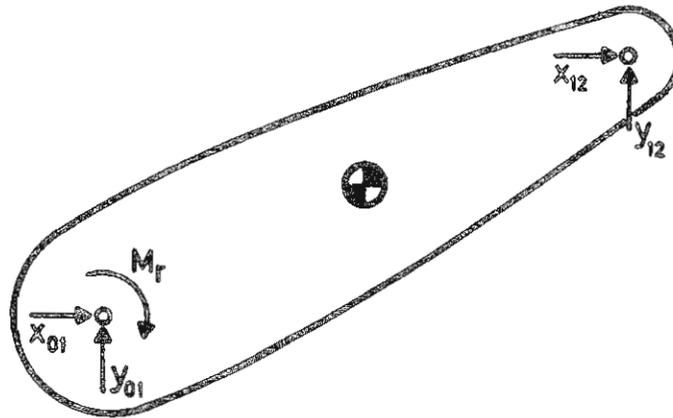


figure 1.5.3  
Schéma rendu libre de la manivelle

1.5.4 Angles d'Euler

Pour utiliser les méthodes lagrangiennes pour l'analyse du mouvement d'un corps rigide, on doit choisir un ensemble de coordonnées généralisées qui permet de déterminer de façon univoque la position du corps par rapport à un repère de direction fixe dans l'espace. On a vu qu'on peut en effet se limiter à l'étude du mouvement de rotation autour du centre de masse.

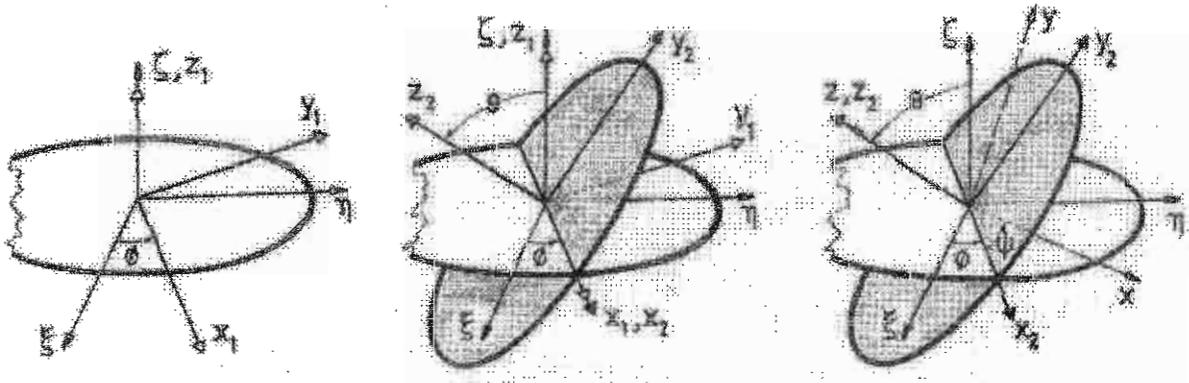


figure 1.5.4  
(xi, eta, zeta): repère inertiel  
(x, y, z): repère dynamique

On amène le repère (xi, eta, zeta) en coïncidence avec le repère (x, y, z) en 3 stades.

1) rotation phi autour de zeta pour produire (x1, y1, z1)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

2) rotation  $\theta$  autour de  $x_1$  pour produire  $(x_2, y_2, z_2)$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

3) rotation autour de  $z_2$  d'un angle  $\phi$  pour construire

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

D'où la transformation

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{CBA} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \mathbf{D} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathbf{D} = \mathbf{CBA} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.5.39)$$

Les matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  étant orthogonales, on a également la transformation inverse

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \mathbf{D}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{D}^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1.5.40)$$

avec

$$\mathbf{D}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}^T$$

Pour calculer l'énergie cinétique de rotation du solide, on l'exprime en termes des composantes de la vitesse angulaire exprim e dans les axes attachés au corps (supposés principaux d'inertie)

$$T = \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2) \quad (1.5.41)$$

avec le vecteur des vitesses angulaires

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} &= \dot{\phi} \underline{u}_{z_1} + \dot{\theta} \underline{u}_{x_2} + \dot{\psi} \underline{u}_z \\ &= \dot{\phi} \mathbf{CB} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \dot{\theta} \mathbf{C} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\psi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

soit

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'un rotor symétrique tel que  $I_{xx} = I_{yy} = I$ , on obtient

$$2T = I(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + I_{zz}(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (1.5.42)$$

expression dans laquelle seul l'angle  $\theta$  intervient. D'où les coordonnées  $\phi$  et  $\psi$  sont cycliques dans la mesure où elles n'interviennent pas non plus dans l'expression de  $\mathcal{V}$ .

### 1.5.5 Principe de Hamilton

En conclusion, on peut encore rappeler que les équations de Lagrange peuvent être obtenues par une voie différente de celle présentée ci-dessus. Le point de départ adopté est dans ce cas le principe de Hamilton qui s'énonce comme suit pour un système holonome. Le mouvement réel d'un système mécanique entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , pour lesquels sa configuration est connue, s'effectue de telle sorte que l'intégrale du lagrangien du mouvement soit stationnaire

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0 \quad (1.5.43)$$

Appliqué au cas du point matériel, le principe (1.5.43) restitue l'équation du mouvement sous la forme (1.2.1). Lorsqu'on l'applique à un système de  $n$  points matériels, dont le lagrangien est écrit en termes de coordonnées généralisées,

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T - \mathcal{V} \quad (1.5.44)$$

on retrouve les équations de Lagrange comme suit : on calcule en premier lieu la variation du lagrangien

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$$

et on intègre ensuite par parties l'expression (1.5.43). Regroupant les termes, on obtient

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt = 0$$

Le premier terme disparaît en vertu de la règle des extrémités fixées qui limite l'applicabilité du principe de Hamilton. Le second devant s'annuler pour une variation  $q$  arbitraire sera nul si, et seulement si

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

L'application du principe de Hamilton n'apporte aucune information supplémentaire concernant le comportement d'un système mécanique. Par contre, il constitue dans certains cas une méthode d'approche d'une puissance considérable, en particulier dans l'étude des systèmes continus.

### 1.6 Références

1. H.A. ROTHBART (Ed.), *Mechanical design and system handbook*, McGraw Hill, 1964
2. J.M. PRENTIS, *Dynamics of mechanical systems*, Ellis Horwood, 1980
3. B. PAUL, *Kinematics and dynamics of planar machinery*, Prentice Hall, 1979
4. H. GOLDSTEIN, *Classical Mechanics*, Addison Wesley, 1957
5. L. MEIROVITCH, *Methods of analytical dynamics*, McGraw Hill, 1970



## 2. L'Oscillateur à un Degré de Liberté

---





## 2.1 Equation du mouvement

Un système à un degré de liberté (1 ddl) est un système dont la configuration peut à chaque instant être décrite par une seule variable.

Considérons en particulier le système de la figure (2.1.1) qui sert de modèle pour tous les systèmes à un degré de liberté dont les caractéristiques sont linéaires. Il consiste en:

- une inertie pure (masse  $m$  supportée par des rouleaux sans friction ni inertie);
- un ressort  $k$  de caractéristique linéaire;
- un mécanisme de dissipation représenté par un amortisseur de constante  $c$ .

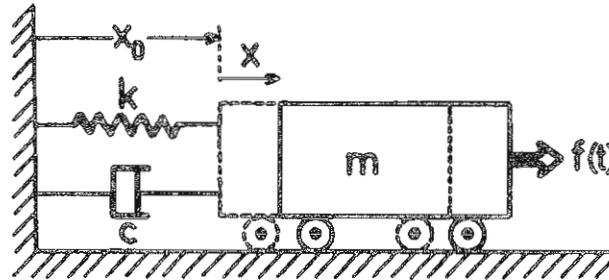


figure 2.1.1  
Système à un degré de liberté

Le système est soumis à l'action d'une force extérieure variable dans le temps  $f(t)$ .  $x_0$  définit la position de la masse au repos. Lorsqu'elle est écartée de sa position d'équilibre d'une distance  $x$ , elle est soumise à l'action des forces suivantes s'opposant au mouvement:

- la force de rappel du ressort  $-kx$
- la force d'amortissement  $-c\dot{x}$
- la force d'inertie  $-m\ddot{x}$

D'où l'équation du mouvement

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)} \quad (2.1.1)$$

## 2.2 Vibrations libres non amorties

Examinons d'abord le comportement du système lorsqu'il n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure. Dans le cas où  $f = c = 0$ , l'équation

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.2.1)$$

admet la solution générale que l'on peut mettre sous l'une ou l'autre des formes

$$\begin{aligned} x(t) &= X \cos(\omega_0 t - \phi) = X \mathcal{R}_e[e^{i(\omega_0 t - \phi)}] \\ &= A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Elle est caractérisée par:

- l' *amplitude*  $X$  de la vibration libre;
- l' *angle de déphasage*  $\phi$  qui mesure le retard de la réponse sur l'excitation;
- la *pulsation naturelle*

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad (2.2.3)$$

qui se mesure en radians/s.

On peut aussi définir les quantités associées à la pulsation naturelle:

- la *fréquence propre*  $f$  mesurée en cycles/s ou Hertz (Hz):

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (2.2.4)$$

- la *période*  $T$  de la vibration mesurée en secondes:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

A tout instant, la solution libre peut s'exprimer en fonction de l'état initial du système complètement défini par son déplacement  $x_0$  et sa vitesse  $\dot{x}_0$ :

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (2.2.5)$$

d'où les expressions de l'amplitude et du déphasage

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2} \quad \tan \phi = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0} \quad (2.2.6)$$

### 2.3 Vibrations libres amorties

Lorsqu'on prend en compte l'amortissement, l'équation (2.1.1) régissant la vibration libre prend la forme

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.3.1)$$

Essayons une solution générale de la forme  $x = e^{pt}$ . Il en résulte l'équation

$$[mp^2 + cp + k]e^{pt} = 0$$

qui admet les racines

$$p_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

Définissons:

- la *valeur critique de l'amortissement* en dessous de laquelle les racines restent complexes conjuguées

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2\omega_0 m \quad (2.3.2)$$

- le *coefficient d'amortissement*

$$\epsilon = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\omega_0 m} \quad (2.3.3)$$

qui mesure le rapport de l'amortissement réel à l'amortissement critique.

Les racines peuvent alors être écrites sous la forme

$$p_{1,2} = \omega_0(-\epsilon \pm i\sqrt{1 - \epsilon^2}) \quad (2.3.4)$$

Trois types de solutions sont possibles, selon le signe de l'expression sous le radical.

- $\epsilon < 1$  : mouvement oscillatoire amorti

La solution est de type harmonique avec une amplitude exponentiellement décroissante

$$x(t) = e^{-\epsilon\omega_0 t} [A \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2} t) + B \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2} t)] \quad (2.3.5)$$

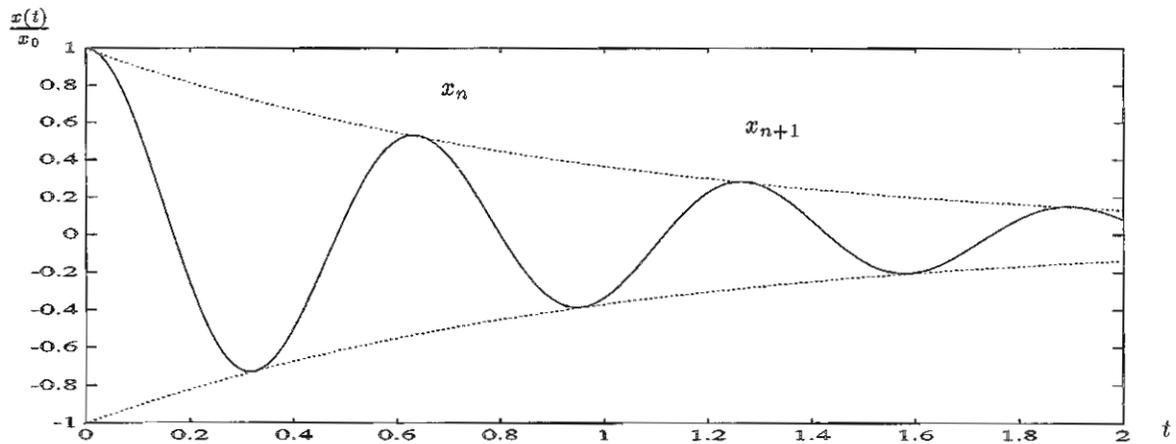


figure 2.3.1  
Réponse en fonction du temps  
d'un système faiblement amorti ( $\epsilon < 1$ )

et la fréquence de la vibration amortie est plus basse que celle de la vibration non amortie

$$\boxed{\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2}} \quad (2.3.6)$$

En termes des conditions initiales de déplacement et de vitesse, les constantes  $A$  et  $B$  ont pour valeur

$$A = x_0 \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2}} (\dot{x}_0 + \epsilon \omega_0 x_0)$$

La figure (2.3.1) représente l'allure de la réponse du système à un déplacement initial en fonction du temps. Pour estimer l'amortissement dans le système à partir d'un essai de vibration libre, on mesure le *décroissement logarithmique*

$$\boxed{\Delta = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}}} \quad (2.3.7)$$

où  $x_n$  et  $x_{n+1}$  sont deux maxima successifs de la réponse, distants de  $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2}}$ . En termes du coefficient d'amortissement, on obtient

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{\frac{2\pi\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}}$$

et l'expression du décroissement logarithmique

$$\Delta = \frac{2\pi\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \simeq 2\pi\epsilon \quad (2.3.8)$$

b)  $\epsilon > 1$  : mouvement apériodique

Lorsque l'amortissement dépasse l'amortissement critique, la solution est de type exponentiel

$$x(t) = e^{-\epsilon\omega_0 t} [A e^{\omega_0 \sqrt{\epsilon^2 - 1} t} + B e^{-\omega_0 \sqrt{\epsilon^2 - 1} t}] \quad (2.3.9)$$

Sa représentation (fig. 2.3.2) montre que lorsque le système est déplacé de sa position d'équilibre, il tend à y retourner graduellement.

c)  $\epsilon = 1$  : mouvement apériodique

Du fait de l'existence d'une racine double  $p = -\omega_0 \epsilon$ , la solution est donnée par

$$x(t) = e^{-\epsilon\omega_0 t} [A + Bt] \quad (2.3.10)$$

De même que dans le cas précédent, le système retourne graduellement à sa position d'équilibre. Du fait de la disparition de l'exponentielle croissante, c'est dans le cas  $\epsilon = 1$  qu'il y retourne le plus rapidement.

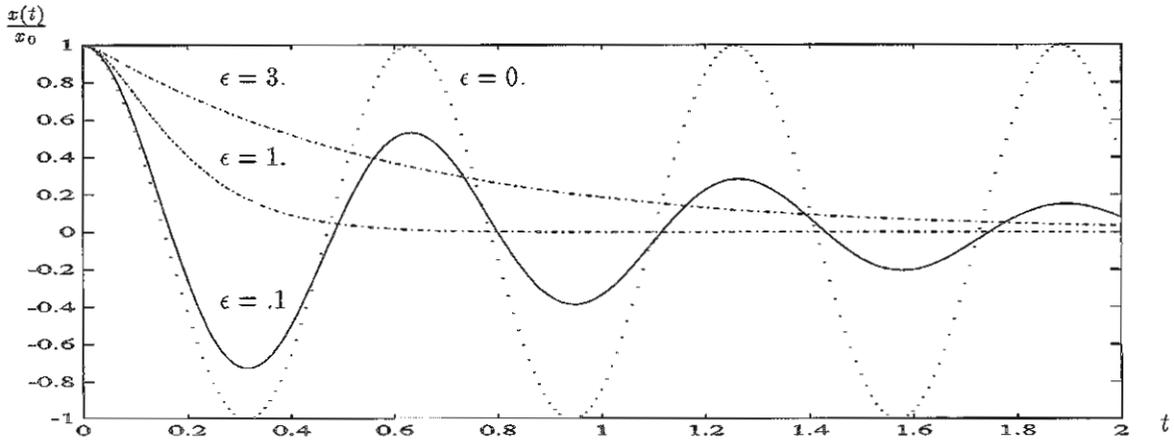


figure 2.3.2  
 comparaison de la réponse en fonction du temps  
 de systèmes caractérisés par des coefficients d'amortissement différents

Représentation de la réponse dans le plan de phase

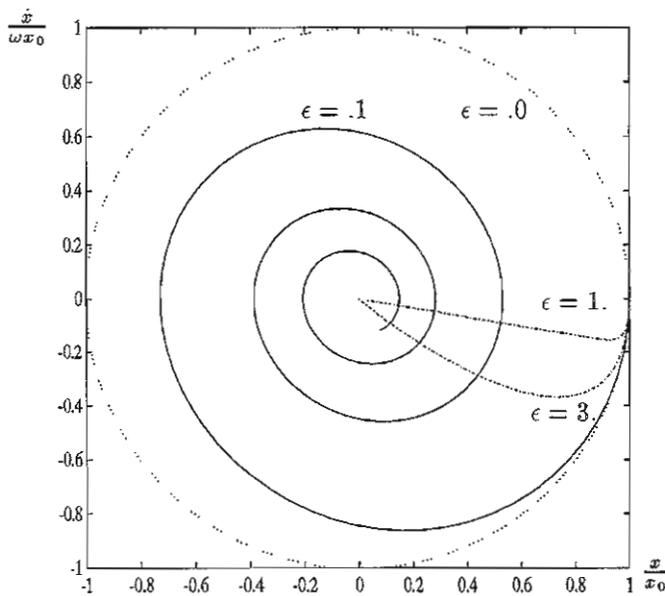


figure 2.3.3  
 comparaison de la réponse dans le plan de phase de  
 systèmes caractérisés par des coefficients d'amortissement différents

Une manière alternative de représenter l'évolution de la réponse en fonction du temps consiste à la représenter dans le plan de phase. Pour cela, notons que l'état du système est complètement déterminé par la connaissance de son déplacement et sa vitesse à tout instant, l'accélération pouvant être recalculée à partir de l'équation d'équilibre (2.3.1).

Le diagramme de phase consiste donc à représenter la réponse du système en fonction de sa vitesse. La figure (2.3.3) montre le diagramme ainsi obtenu selon que l'amortissement est nul, inférieur, égal ou supérieur à la valeur critique. Tant que  $\epsilon > 0$ , la solution converge vers l'origine : elle prend la forme d'une spirale convergente lorsque  $\epsilon < 1$ , et donne lieu à une courbe monotone lorsque  $0 < \epsilon \leq 1$

Lorsque l'amortissement est nul, La solution prend la forme d'un cercle limite.

2.4 Vibrations libres avec amortissement par frottement sec

L'amortissement de Coulomb se produit lors du glissement d'un corps sur une surface sèche. Pour amorcer le mouvement, on doit exercer sur le corps une force qui excède la résistance au mouvement qui résulte de la friction. La force de friction est parallèle à la surface et proportionnelle à la force normale à celle-ci, c'est-à-dire au poids de la masse dans le cas du système de la figure (2.4.1).

La constante de proportionnalité est le coefficient de frottement statique  $\mu_s$ :  $0 < \mu_s < 1$  selon les matériaux et l'état de surface.

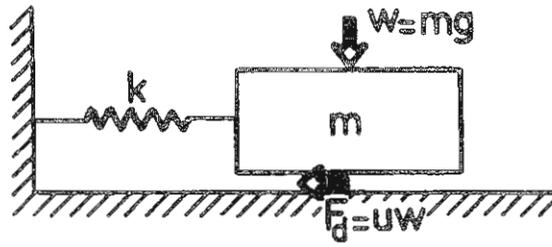


figure 2.4.1  
Système avec amortissement de Coulomb

Une fois le mouvement initié, la force de frottement se réduit à  $\mu_c W$ , où  $\mu_c \leq \mu_s$  est le coefficient cinématique de frottement.

La force de frottement est de sens opposé à celui de la vitesse et reste constante tant que la force d'inertie et la force de rappel du ressort sont suffisantes pour vaincre le frottement. Le mouvement s'arrête lorsque celles-ci deviennent insuffisantes.

Ici nous ne distinguerons pas les coefficients statique et cinématique de frottement. Nous écrirons donc

$$F_d = \mu W$$

auquel cas l'équation du mouvement (2.1.1) devient

$$m\ddot{x} + F_d \text{sign}(\dot{x}) + kx = 0 \quad (2.4.1)$$

avec la fonction

$$\text{sign}(\dot{x}) = \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \quad (2.4.2)$$

Le système (2.4.1) est donc non linéaire mais peut néanmoins être séparé en deux équations linéaires selon le sens du mouvement

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= -F_d & \text{si } \dot{x} > 0 \\ m\ddot{x} + kx &= F_d & \text{si } \dot{x} < 0 \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Sa solution peut ainsi être calculée sur un intervalle de temps correspondant à une demi-période. Prenons l'exemple de la réponse à un déplacement initial  $x_0$  suffisamment grand pour que la force de rappel du ressort excède la force de frottement sec. La vitesse est alors négative, et le mouvement est régi par la deuxième équation (2.4.3)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 f_d \quad (2.4.4)$$

où

$$f_d = \frac{F_d}{k} \quad (2.4.5)$$

représente un déplacement équivalent.

La solution de (2.4.4) est immédiate

$$x(t) = (x_0 - f_d) \cos \omega_0 t + f_d \quad (2.4.6)$$

et reste valide tant que  $\dot{x} < 0$ . On calcule donc la vitesse

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 (x_0 - f_d) \sin \omega_0 t \quad (2.4.7)$$

qui s'annule pour  $t = \frac{\pi}{\omega_0}$ , et auquel cas

$$x(t_1) = 2f_d - x_0 \quad (2.4.8)$$

Pourvu que  $x(t_1)$  soit suffisamment grand pour provoquer une force élastique supérieure à celle du frottement sec, la masse acquiert pour  $t > t_1$  une vitesse positive et le mouvement est alors régi par la seconde équation (2.4.3)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\omega_0^2 f_d \quad (2.4.9)$$

qui admet la solution

$$\begin{aligned} x(t) &= [x(t_1) + f_d] \cos \omega_0(t - t_1) - f_d \\ &= [3f_d - x_0] \cos \omega_0(t - t_1) - f_d \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Lorsqu'on la compare à (2.4.6), la solution harmonique a une amplitude réduite de  $2f_d$  et comporte une partie constante négative égale à  $-f_d$ . La vitesse s'annule à nouveau pour  $t_2 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  et le déplacement vaut alors

$$x(t_2) = x_0 - 4f_d \quad (2.4.11)$$

La comparaison de (2.4.8) et (2.4.11) montre que sur un intervalle de temps correspondant à une demi-période, la décroissance de l'amplitude est égale à  $2f_d$ . L'amortissement sec donne donc lieu à une décroissance des amplitudes qui est linéaire dans le temps ainsi que le montre la figure (2.4.2). Le mouvement stoppe brusquement lorsque la force élastique due au déplacement à la fin d'un demi-cycle n'est plus suffisante pour vaincre le frottement statique, c'est-à-dire après un nombre  $n$  de cycles tel que

$$x_0 - 2nf_d < f_d \quad (2.4.12)$$

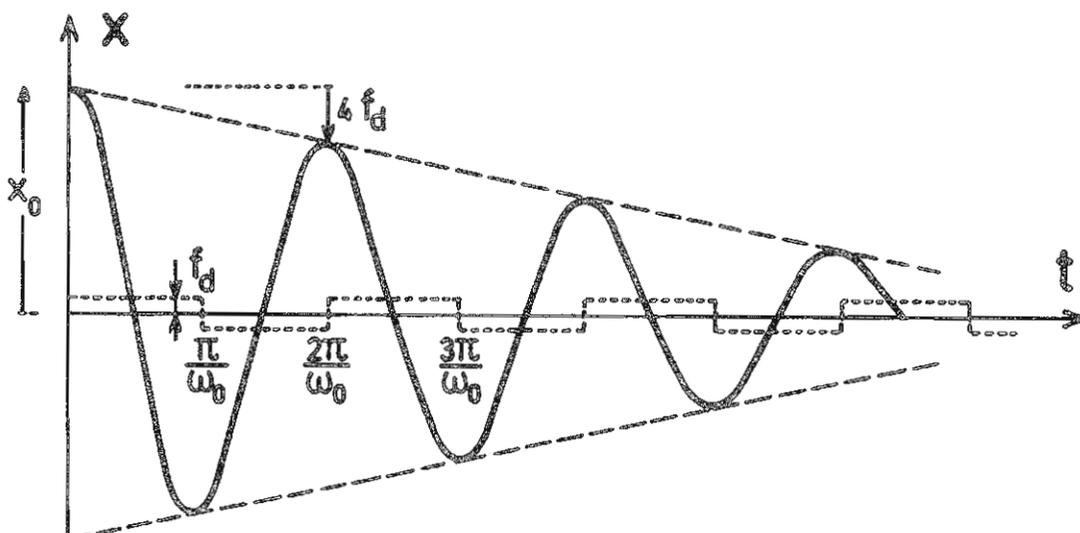


figure 2.4.2  
Evolution temporelle du déplacement  
dans un système amorti par frottement sec

## 2.5 Vibrations forcées

On entend par vibration forcée le mouvement d'un système résultant de l'application d'une force harmonique dans le temps. La réponse peut être caractérisée de deux manières:

- par l'amplitude du mouvement de la masse;
- par la transmissibilité absolue du système, que l'on définit par le rapport de la force transmise à la fondation à la force appliquée.

Toute réponse à une excitation extérieure résulte de la superposition de deux mouvements:

- la réponse du système libre, qui est la solution générale de l'équation sans second membre et dépend des conditions initiales. Du fait de l'amortissement qui affecte tout système physique, on admet qu'elle disparaît au bout d'un certain temps;
- la réponse forcée, solution particulière de l'équation avec second membre.

C'est cette seconde partie de la réponse qui nous intéresse ici, car c'est elle qui décrit la réponse du système en régime établi.

## 2.5.1 Vibrations forcées non amorties

Calculons d'abord la réponse forcée dans le cas non amorti. L'équation (2.1.1) du mouvement devient

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t \quad (2.5.1)$$

où  $\Omega$  est la fréquence de l'excitation extérieure d'amplitude  $F_0$ . Si l'on exprime que la réponse est de même forme que l'excitation:

$$x(t) = X \cos \Omega t$$

on obtient l'amplitude de la réponse

$$X = \frac{F_0}{k - \Omega^2 m} = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}} \quad (2.5.2)$$

On voit donc que la réponse résultant de l'application statique de la force  $\frac{F_0}{k}$  est majorée par le coefficient d'amplification dynamique  $\frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}$ . Son allure en fonction de la fréquence réduite  $\frac{\Omega}{\omega_0}$  est représentée en traits pleins sur la figure (2.5.1) et montre l'existence d'une résonance lorsque la fréquence d'excitation  $\Omega$  coïncide avec la fréquence naturelle  $\omega_0$ .

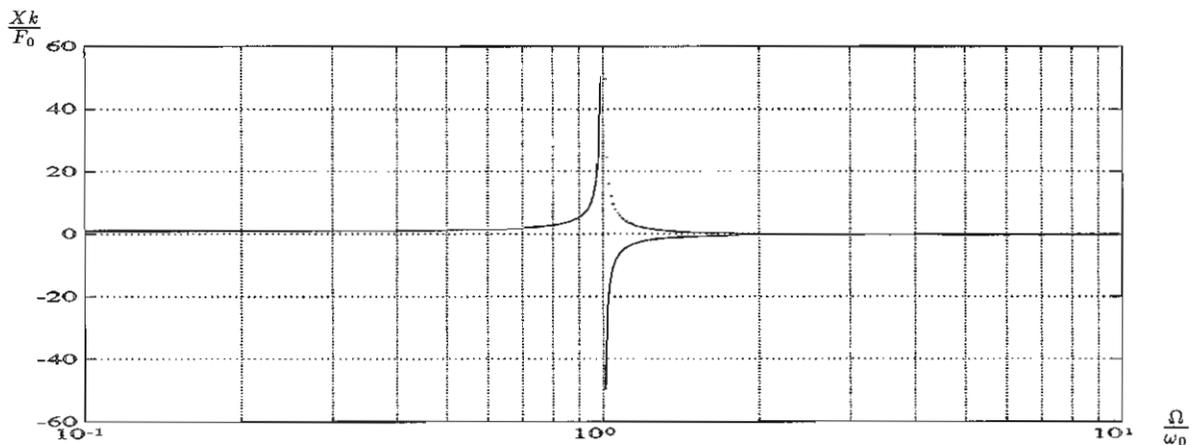


figure 2.5.1  
Réponse forcée d'un système à 1 ddl  
Amplitude du mouvement en fonction de la fréquence

La réponse peut également être mise sous la forme

$$x(t) = |X| \cos(\Omega t - \phi) \quad (2.5.3)$$

auquel cas l'amplitude de la vibration (en pointillés sur la figure 2.5.1) est prise en module. Le déphasage  $\phi$  correspondant vaut 0 ou  $\pi$  selon que  $\Omega$  est inférieur ou supérieur à l'excitation, ce qui montre qu'excitation et mouvement sont en phase ou en opposition de phase selon que  $\frac{\Omega}{\omega_0} < 1$  ou  $\frac{\Omega}{\omega_0} > 1$ .

## Le cas de la résonance

D'un point de vue physique, le cas de la résonance où l'amplitude de la réponse (2.5.2) devient infinie est inacceptable. En effet, une force d'intensité finie ne peut générer instantanément une réponse infinie.

Cette contradiction peut être levée en exprimant le fait qu'à la résonance, la solution est nécessairement de type transitoire et résulte donc de la combinaison des deux contributions de la réponse.

Considérons le cas d'une excitation  $F_0 \cos \omega_0 t$  appliquée brusquement en  $t = 0$  sur le système au repos et exprimons la solution complète sous la forme

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{k - \Omega^2 m} \cos \Omega t$$

L'application des conditions initiales fournit les coefficients

$$A = \frac{-F_0}{k(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2})} \quad \text{et} \quad B = 0$$

d'où la solution pour une fréquence d'excitation  $\Omega$  quelconque

$$x(t) = \frac{F_0}{k(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2})} (\cos \Omega t - \cos \omega_0 t) \tag{2.5.4}$$

Lorsque  $\Omega \rightarrow \omega_0$ , par application à (2.5.4) de la règle de l'Hopital on obtient la solution

$$x(t) = \frac{F_0 \omega_0 t}{k} \sin \omega_0 t \tag{2.5.5}$$

La solution (2.5.5) correspond à un mouvement de fréquence égale à la fréquence de résonance et d'amplitude linéairement croissante avec le temps. Elle est représentée par la figure (2.5.2).

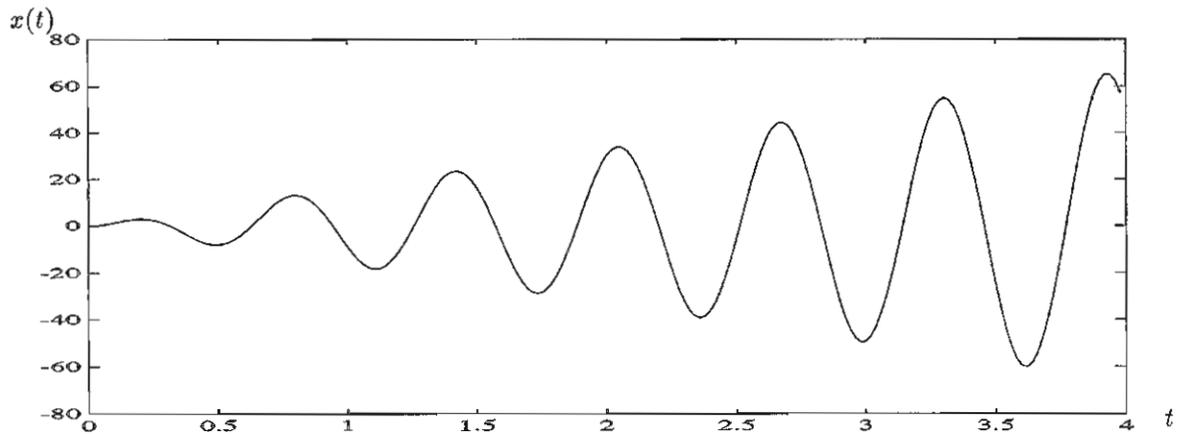


figure 2.5.2  
Réponse d'un système à 1 ddl à la résonance

### 2.5.2 Vibrations forcées amorties

Pour obtenir la réponse à l'équation du mouvement amorti

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t \tag{2.5.6}$$

exprimons encore la solution sous la forme (2.5.3). Séparant les termes en  $\cos \Omega t$  et  $\sin \Omega t$ , il vient

$$\begin{aligned} (k - \Omega^2 m)|X| \cos \phi + \Omega c|X| \sin \phi &= F_0 \\ (k - \Omega^2 m) \sin \phi - \Omega c \cos \phi &= 0 \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

De la deuxième équation (2.5.7), divisée par  $k$  et tenant compte de (2.2.3) et (2.3.3), on tire en premier lieu l'expression du déphasage

$$\tan \phi = \frac{2\epsilon\Omega}{\omega_0(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2})} \tag{2.5.8}$$

La première équation (2.5.7) fournit ensuite le module de la réponse

$$|X| = \frac{F_0}{k \cos \phi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\Omega c}{k} \tan \phi}$$

soit, compte tenu de (2.3.3) et (2.5.8)

$$|X| = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2})^2 + (2\epsilon \frac{\Omega}{\omega_0})^2}} \quad (2.5.9)$$

Le même résultat peut être obtenu en exprimant que l'excitation de (2.5.6) correspond à la partie réelle de l'excitation complexe  $F_0 e^{i\Omega t}$ . La solution de (2.5.6) est alors la partie réelle de celle de l'équation complexe correspondante

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\Omega t} \quad (2.5.10)$$

Si on l'exprime sous la forme

$$x = X e^{i\Omega t} = H(\Omega) F_0 e^{i\Omega t} \quad (2.5.11)$$

on obtient l'amplitude complexe de la réponse

$$X = \frac{F_0}{(k - \Omega^2 m) + i\Omega c} = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}) + 2i\epsilon \frac{\Omega}{\omega_0}}$$

que l'on peut remettre sous la forme polaire

$$X = |X| e^{-i\phi} \quad (2.5.12)$$

avec  $|X|$  et  $\phi$  donnés respectivement par (2.5.9) et (2.5.8).

Le rapport

$$H(\Omega) = \frac{X}{F_0} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}) + 2i\epsilon \frac{\Omega}{\omega_0}} \quad (2.5.13)$$

est la *fonction de transfert en fréquence* du système. Elle apparaît comme le produit de la fonction de transfert statique  $\frac{1}{k}$  et du facteur d'amplification dynamique complexe  $\frac{1}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}) + 2i\epsilon \frac{\Omega}{\omega_0}}$ . Elle joue un rôle fondamental dans les méthodes fréquentielles d'analyse de systèmes vibrants.

La figure 10 représente, en fonction de la fréquence d'excitation, le module de la réponse et son déphasage. On observe que l'amplitude est limitée par le taux d'amortissement et que le déphasage au voisinage de la résonance est d'autant plus progressif que l'amortissement est important.

On peut encore représenter, comme le montre la figure (2.5.3), les forces en présence dans un mouvement de vibration forcée, en adoptant comme direction du mouvement la verticale.

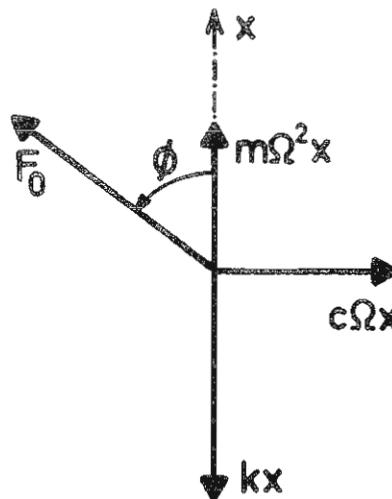
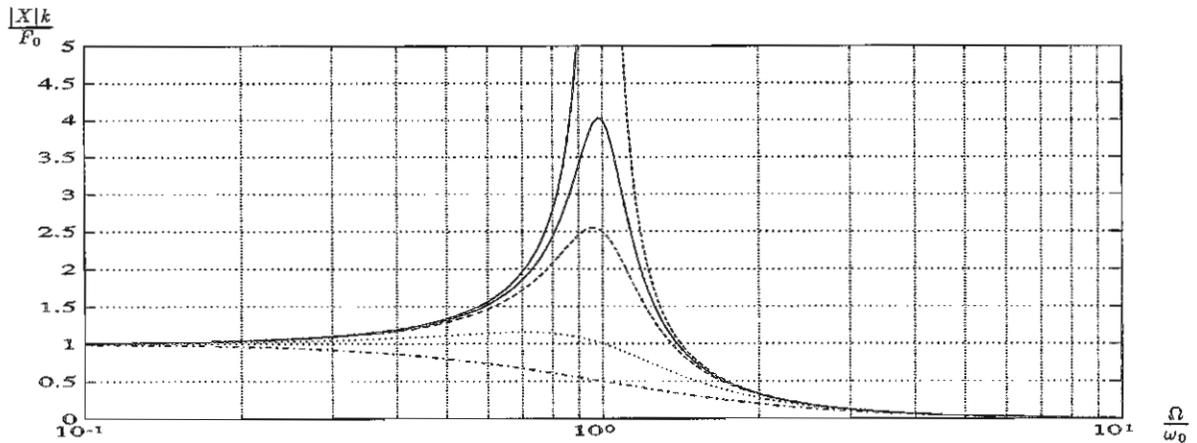


figure 2.5.3  
Réponse forcée d'un système amorti à 1 ddl  
Équilibre dynamique des forces

Amplitude



Déphasage

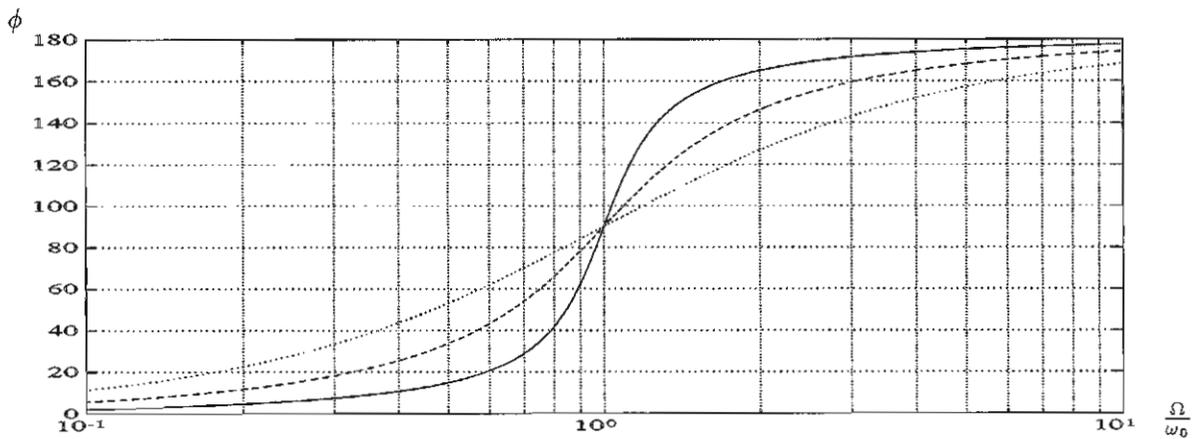


figure 2.5.4  
Réponse forcée d'un système amorti à 1 ddl  
Amplitude et déphasage de la réponse avec la fréquence

On note que:

- la composante  $F_0 \cos \phi$  compense l'équilibre entre la force de rappel élastique et la force d'inertie:

$$(k - \Omega^2 m)|X| - F_0 \cos \phi = 0$$

- la composante  $F_0 \sin \phi$  compense la force de dissipation:

$$c\Omega |X| - F_0 \sin \phi = 0$$

En ce qui concerne la définition de la résonance, on notera également qu'elle peut être définie de deux façons différentes:

- le maximum de la réponse apparaît pour une fréquence telle que  $\frac{\partial |X|}{\partial \Omega} = 0$ , soit

$$\frac{-2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{4c^2}{\omega_0^2} = 0$$

D'où la fr equance de résonance en amplitude

$$\boxed{\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - 2\epsilon^2}} \quad (2.5.14)$$

qui est toujours inférieure à la fr equance de résonance du système non amorti. L'amplitude de la réponse  $y$  est égale à

$$|X|_{max} = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{2\epsilon} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \quad (2.5.15)$$

- La résonance de phase ( $\phi = \frac{\pi}{2}$ ) se produit lorsque la fr equance d'excitation coïncide avec la fr equance de résonance du système non amorti. L'amplitude du mouvement  $y$  est égale à

$$|X|_{\frac{\pi}{2}} = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{2\epsilon} \quad (2.5.16)$$

soit légèrement inférieure au maximum absolu (2.5.15).

L'acuité de la résonance se mesure par le *facteur de qualité* en calculant la largeur relative du pic de résonance aux points de demi-puissance (figure 2.5.5).

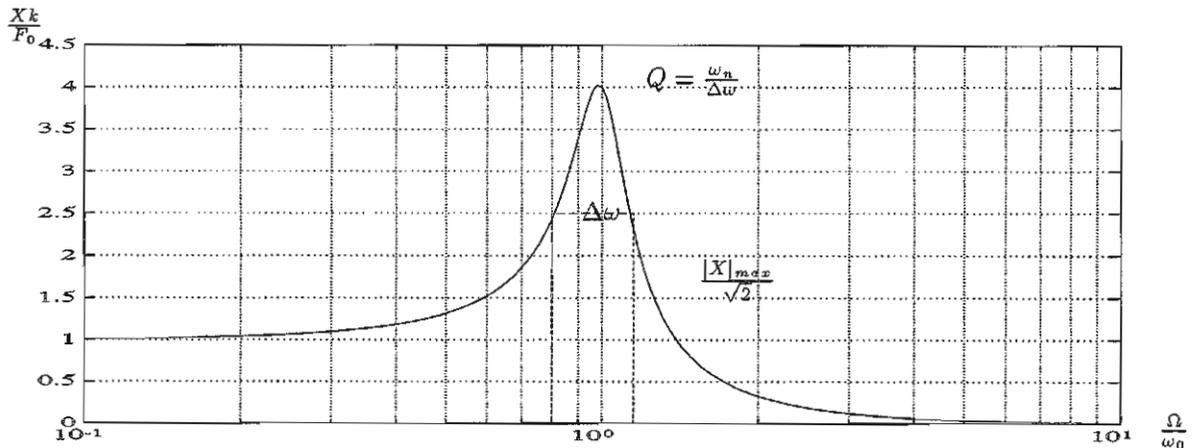


figure 2.5.5  
Mesure de l'acuité de la résonance

On calcule donc les racines de l'équation

$$\frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2})^2 + (2\epsilon \frac{\Omega}{\omega_0})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |X|_{max}$$

soit, tenant compte de (2.5.15)

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 - 2\epsilon^2 \pm 2\epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2}$$

d'où le résultat approch e

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\Omega} \simeq \frac{1}{2\epsilon}} \quad (2.5.17)$$

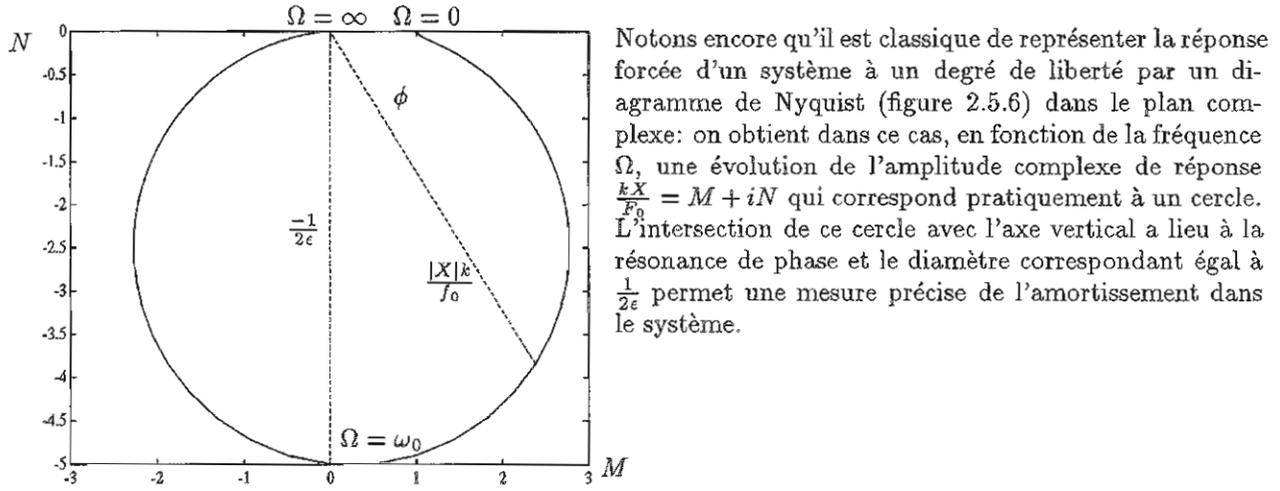


figure 2.5.6

Représentation de l'amplitude complexe de réponse par un diagramme de Nyquist

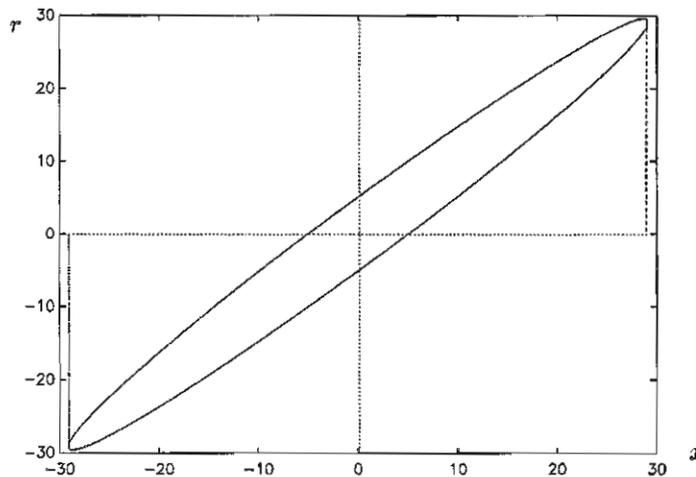


figure 2.5.7

Energie dissipée par amortissement visqueux

### 2.5.3 Puissance dissipée par amortissement

Lorsque le mouvement est amorti par un amortisseur visqueux, la force totale exercée par le ressort et l'amortisseur est

$$r = kx + c\dot{x}$$

soit, si le mouvement est harmonique

$$r = k|X| \cos(\Omega t - \phi) - \Omega c|X| \sin(\Omega t - \phi)$$

d'où, dans le plan  $(r, x)$ , le diagramme elliptique de la figure (2.5.7).

L'énergie dissipée sur un cycle de chargement

$$W = \int_t^{t+\frac{2\pi}{\Omega}} r \dot{x} dt = \pi c \Omega |X|^2 \tag{2.5.18}$$

est égale à l'aire de l'ellipse.

L'expérience montre que tous les systèmes mécaniques sont le si ege d'une dissipation d'énergie et, dans les systèmes électriques en particulier, cette dissipation est principalement le résultat de frottements internes. De l'expérimentation réalisée sur un grand nombre de matériaux, il résulte que l'énergie dissipée par cycle en raison de la friction interne est en gros proportionnelle au carr e de l'amplitude du déplacement, soit

$$W = \alpha |X|^2 \quad (2.5.19)$$

où  $\alpha$  est une constante indépendante de la fr equance d'excitation. Ce type d'amortissement, que l'on appelle *amortissement structural*, résulte du *phénomène d'hystéresis* li e à la mise en charge cyclique du matériel. L'énergie dissipée par cycle de chargement est alors égale à l'aire de la boucle d'hystéresis relevée expérimentalement sur un diagramme tel que celui de la figure (2.5.8).

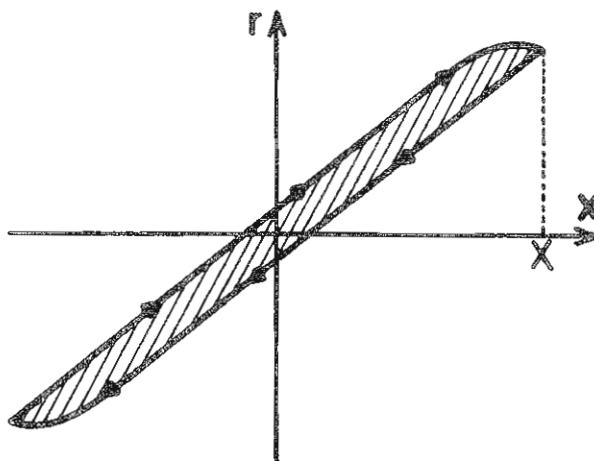


figure 2.5.8  
Boucle d'hystéresis d'un système  
avec amortissement structural

La dissipation par amortissement étant maximale à la résonance, on peut néanmoins représenter un système avec amortissement quelconque par un système équivalent avec amortissement visqueux caract eris e par la constante d'amortissement

$$c_{eq} = \frac{W}{\pi \Omega |X|^2} \quad (2.5.20)$$

Lorsqu'on se limite  a l'étude du mouvement harmonique, il est courant d'adopter plutôt le modèle hystérétique d'amortissement qui conserve la linéarité du système tout en donnant lieu à une dissipation selon la loi (2.5.19). Le modèle hystérétique consiste à admettre que les forces de dissipation sont proportionnelles aux forces élastiques, tout en étant en phase avec la vitesse; dans le plan complexe, son équation s'écrit

$$m\ddot{x} + k(1 + ig)x = F_0 e^{i\Omega t} \quad (2.5.21)$$

avec le coefficient d'amortissement structural

$$g = \frac{W}{\pi k |X|^2} = \frac{\alpha}{\pi k} \quad (2.5.22)$$

La réponse forcée du système est la partie réelle de la solution

$$x(t) = \frac{F_0 e^{i\Omega t}}{k(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} + ig)} \quad (2.5.23)$$

et, contrairement au cas visqueux, le maximum d'amplitude est atteint lorsque  $\Omega = \omega_0$ .

Il est aisé de vérifier que le diagramme de Nyquist que l'on peut construire à partir de (2.5.23) est un cercle de diamètre  $\frac{1}{g}$  et de centre  $(0, \frac{-1}{2g})$ .

Il est important de bien retenir que le modèle hystérétique que l'on vient de décrire ne permet de décrire valablement que le régime harmonique. On se rend d'ailleurs compte des limitations de ce modèle lorsqu'on considère le cas limite de la réponse statique, pour lequel on calcule à partir de (2.5.23) une réponse d'amplitude complexe. Cette absurdité provient du fait que le modèle hystérétique, bien que très utile pour produire des résultats quantitativement corrects en régime harmonique, viole en fait le principe de causalité selon lequel la réponse à un instant donné ne peut dépendre que du passé de l'excitation.

Le modèle hystérétique est particulièrement utilisé en aéroélasticité pour décrire le phénomène de flottement (oscillation forcée provenant du couplage de la vibration de la structure avec l'écoulement aérodynamique).

### 2.5.4 Valeurs quadratiques moyennes de l'excitation et de la réponse

Dans beaucoup de problèmes de vibration, on est intéressé seulement par l'amplitude de la vibration et non par sa phase. Il est donc intéressant de caractériser réponse et excitation par leur valeur quadratique moyenne sur un cycle de période  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$

$$\boxed{\overline{x^2} = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad \text{et} \quad \overline{f^2} = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} \quad (2.5.24)$$

Calculons tout d'abord la valeur quadratique moyenne de l'excitation en l'exprimant sous la forme

$$f(t) = \mathcal{R}_e[F_0 e^{i\Omega t}] = \mathcal{R}_e[F(t)] \quad (2.5.25)$$

où, dans le cas général,  $F_0$  est une amplitude complexe d'excitation. Mettons les parties réelle et imaginaire de l'excitation sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_e[F(t)] &= \frac{1}{2}[F_0 e^{i\Omega t} + F_0^* e^{-i\Omega t}] = f(t) \\ \mathcal{I}_m[F(t)] &= \frac{1}{2i}[F_0 e^{i\Omega t} - F_0^* e^{-i\Omega t}] \end{aligned}$$

où  $F_0^*$  est le complexe conjugué de l'amplitude  $F_0$ , ce qui permet de calculer la valeur quadratique

$$f^2(t) = \frac{1}{4}[F_0^2 e^{2i\Omega t} + 2F_0 F_0^* + F_0^{*2} e^{-2i\Omega t}] \quad (2.5.26)$$

Lorsque l'on calcule la valeur quadratique moyenne

$$\overline{f^2} = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt$$

on observe que les deux contributions périodiques de (2.5.26) sont nulles et on obtient

$$\boxed{\overline{f^2} = \frac{1}{2} F_0 F_0^* = \frac{1}{2} |F_0|^2} \quad (2.5.27)$$

On calcule ensuite la réponse complexe par

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{R}_e[X e^{i\Omega t}] \\ &= \mathcal{R}_e[H(\Omega) F_0 e^{i\Omega t}] \end{aligned}$$

Par analogie avec (2.5.27), on obtient la valeur quadratique moyenne de la réponse

$$\overline{x^2} = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{2} |X|^2 \quad (2.5.28)$$

soit

$$\boxed{\overline{x^2} = \frac{1}{2} |H(\Omega)|^2 |F_0|^2 = |H(\Omega)|^2 \overline{f^2}} \quad (2.5.29)$$

Lorsque l'intégration (2.5.24) est réalisée sur une période  $T$  supérieure à un cycle, il est aisé de contrôler que les résultats (2.5.27) et (2.5.29) sont inchangés pour autant que l'intervalle de calcul des valeurs quadratiques reste un multiple quelconque de la période. Il en résulte immédiatement que l'on peut aussi calculer les valeurs quadratiques moyennes par une intégration sur un intervalle de temps suffisamment long

$$\begin{aligned}\overline{f^2} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \frac{1}{2} |F_0|^2 \\ \overline{x^2} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{2} |H(\Omega)|^2 |F_0|^2\end{aligned}\quad (2.5.30)$$

Si le résultat (2.5.30) est mis sous la forme

$$|H(\Omega)|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overline{x^2}}{\overline{f^2}} \quad (2.5.31)$$

il montre que le rapport des valeurs quadratiques moyennes de la réponse et de l'excitation converge vers le carré du module de la fonction de transfert lorsque l'intervalle d'échantillonnage tend vers l'infini.

Les résultats de ce paragraphe sont fondamentaux tant pour l'étude expérimentale du comportement vibratoire d'un système que pour le calcul de sa réponse à une excitation aléatoire. Ils seront étendus ultérieurement au cas d'une excitation périodique mais non harmonique.

### 2.5.5 Principes de l'isolation vibratoire

On est fréquemment confronté au problème de l'isolation d'une machine ou d'un équipement vis à vis de son support. Deux cas sont possibles:

- la machine ou l'équipement considéré est lui-même générateur de vibrations, et on veut éviter que celles-ci soient transmises à l'environnement.
- le bon fonctionnement de l'équipement considéré implique qu'il ne subisse pas l'influence des vibrations du support auquel il est fixé.

Dans les deux cas, le principe de *l'isolation vibratoire* est le même: on conçoit la suspension de manière à ce qu'elle joue le rôle de *filtre mécanique*.

#### Isolation des machines

Considérons le cas où l'on veut éviter qu'une machine transmette à sa fondation des vibrations indésirables. C'est le cas par exemple d'un moteur à explosion dont l'équilibrage n'est jamais réalisé de façon parfaite.

Soit  $F \cos \Omega t$  la force harmonique résultant du défaut d'équilibrage. La machine transmet à sa fondation une force

$$r = kx + c\dot{x} = |R| \cos(\Omega t - \psi)$$

d'amplitude

$$|R| = |X| \sqrt{k^2 + \Omega^2 c^2}$$

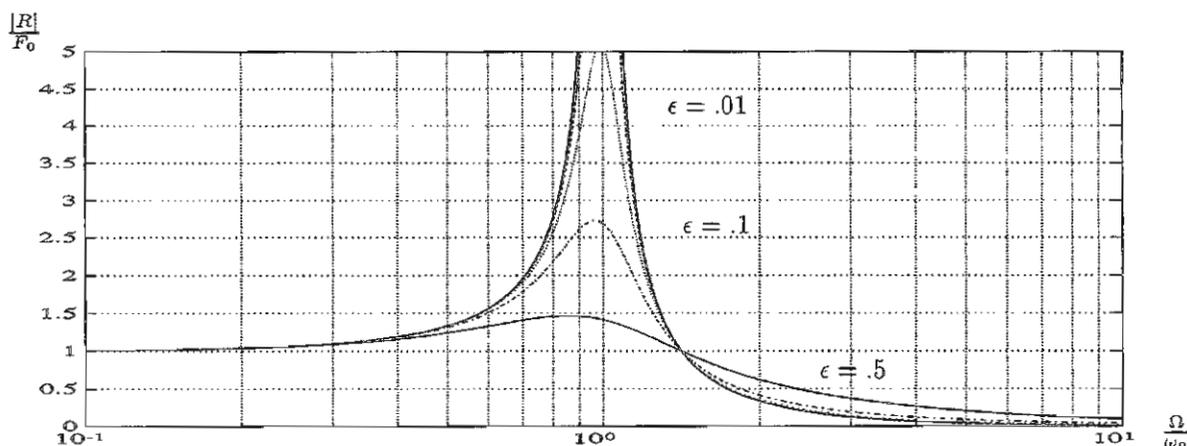
On définit la *transmissibilité absolue* du système comme le rapport de l'amplitude de la force transmise à la force appliquée

$$T = \frac{|R|}{F_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\epsilon \frac{\Omega}{\omega_0})^2}{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2})^2 + (2\epsilon \frac{\Omega}{\omega_0})^2}} \quad (2.5.32)$$

avec le déphasage

$$\psi = \tan^{-1} \frac{2\epsilon (\frac{\Omega}{\omega_0})^3}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} + (2\epsilon \frac{\Omega}{\omega_0})^2} \quad (2.5.33)$$

## Transmissibilité



## Phase

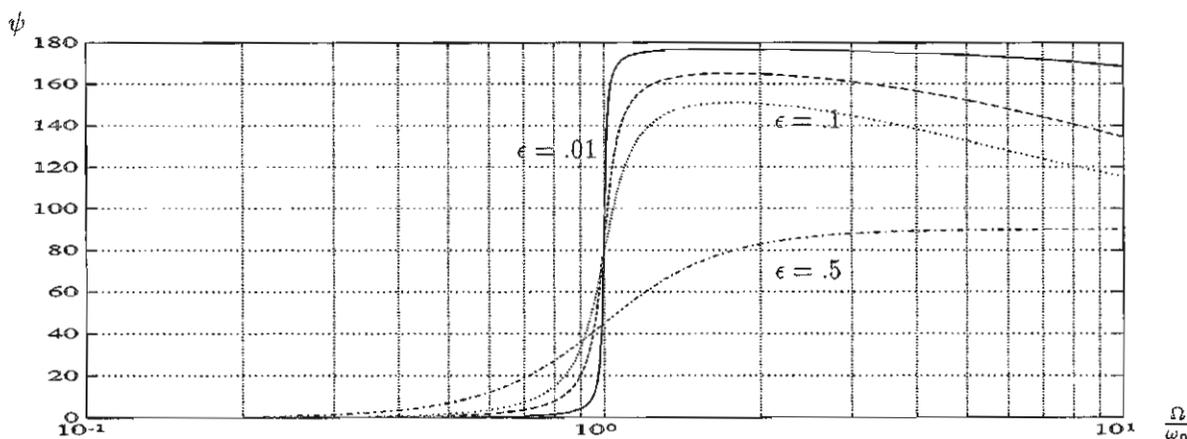


figure 2.5.9  
Transmissibilité d'un système amorti  
à un degré de liberté

Elle est représentée en amplitude et en phase par les diagrammes de la figure (2.5.9).

On y observe que :

- en dessous de la fréquence de résonance, la transmissibilité est toujours  $> 1$ ; la force transmise excède donc toujours la force  $F_0$  appliquée statiquement;
- à la résonance, la force transmise est limitée par l'amortissement dans le système;
- la transmissibilité devient inférieure à l'unité pour  $\frac{\Omega}{\omega_0} > \sqrt{2}$  et la force transmise est d'autant plus faible que l'amortissement dans le système est petit.

En conclusion, il est nécessaire de dimensionner les ressorts de suspension de telle sorte que la fréquence de résonance de la machine sur sa suspension soit petite vis-à-vis de celle de l'excitation. L'amortissement n'est avantageux que dans le domaine de fréquence  $\Omega < \sqrt{2}\omega_0$  où il limite l'amplitude de résonance; au-delà, sa présence détériore la qualité de l'isolation.

## Exemples de procédés d'isolation de machines

Figure (2.5.10)

- (a) Le moteur est équipé d'isolateurs de vibration sous la forme d'anneaux de caoutchouc séparant le moyeu du stator du support sur lequel le moteur est fixé.

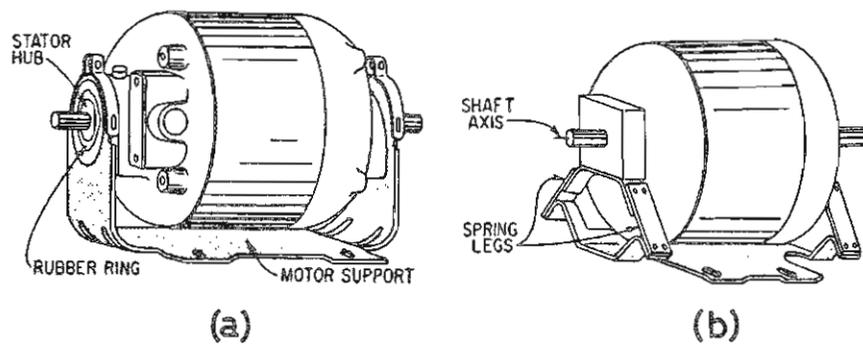


figure 2.5.10  
modes d'isolation d'un moteur électrique

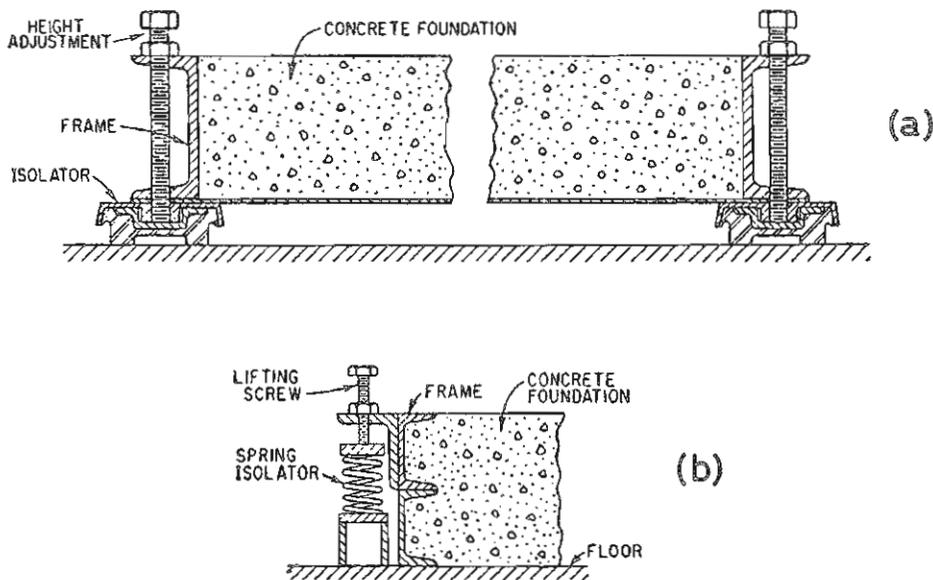


figure 2.5.11  
Construction de dalles flottantes

- (b) Le moteur est monté sur des isolateurs de vibration consistant en deux jambes de flexion dispos es   45 . Le montage résultant présente une raideur faible en torsion mais grande pour les mouvements de translation.

Figure (2.5.11)

- (a) Fondation indépendante support e par des isolateurs de vibration et conçue pour être pos e   même le sol.
- (b) Fondation similaire, construite en couvrant le sol d'un papier imperméable, posant un châssis métallique sur celui-ci, dans lequel on coule du b ton. Après séchage, la dalle flottante est rendue opérationnelle en la levant à l'aide des vis prévues à cet effet.

#### Machines pr sentrant un balourd

Comme illustration de systèmes soumis à une excitation harmonique, considérons le cas de la figure (2.5.12). Deux masses excentriques  $m/2$  tournent dans des directions oppos es avec une vitesse angulaire  $\Omega$ . Ce modèle est représentatif:

- soit d'une machine pr sentrant un défaut d'équilibre,

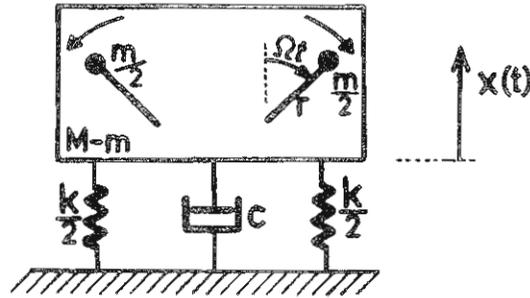


figure 2.5.12  
Excitation provenant du balourd  
d'une machine tournante

- soit d'un dispositif de mise en vibration d'une structure (moteur balourdé).

La raison pour laquelle on considère deux masses tournant dans des sens opposés est que les composantes horizontales de l'excitation se compensent et que seule subsiste la force harmonique verticale.

Le déplacement vertical des masses excentriques est

$$x + r \cos \Omega t$$

où  $x$  est le déplacement du bâti de machine mesuré par rapport à sa position d'équilibre. Moyennant ces définitions, l'équation différentielle du système est

$$(M - m)\ddot{x} + m \frac{d^2}{dt^2}(x + r \cos \Omega t) + c\dot{x} + kx = 0$$

soit

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\Omega^2 r \cos \Omega t \tag{2.5.34}$$

L'équation (2.5.13) permet d'en calculer directement la solution

$$x(t) = H(\Omega)m\Omega^2 r e^{i\Omega t} = |X|e^{i(\Omega t - \phi)} \tag{2.5.35}$$

avec

$$|X| = \frac{mr}{M} \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\epsilon \frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \tan \phi = \frac{2\epsilon\Omega}{\omega_0 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)}$$

La figure (2.5.13) montre l'évolution de la valeur absolue de l'amplitude en fonction de la fréquence d'excitation.

Elle montre que:

- quel que soit le taux d'amortissement dans le système, l'amplitude du mouvement de la masse principale tend vers la valeur  $-\frac{mr}{M}$ , ce qui correspond à une absence de mouvement pour le centre de gravité lorsque le système tourne à grande vitesse.
- L'effet du balourd peut être réduit autant que l'on veut en diminuant le rapport  $\frac{m}{M}$ .

*Excitation par le support*

Un autre mode d'excitation important (constructions soumises à un séisme, équipement embarqué sur véhicule, capteurs de vibrations, ...) est l'excitation par le support. Considérons le système de la figure (2.5.14) dont le support est soumis à un mouvement harmonique.

L'équation du mouvement s'écrit

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \tag{2.5.36}$$

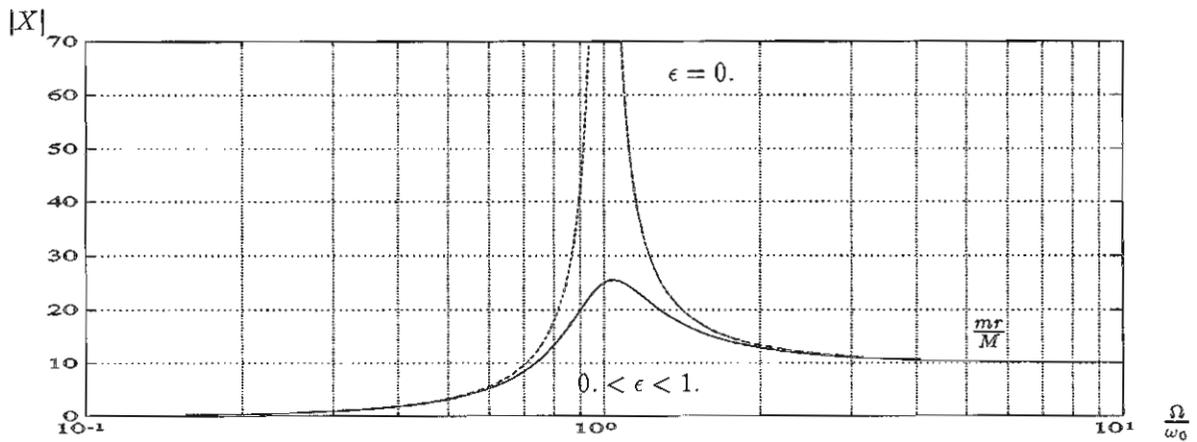


figure 2.5.13  
Variation avec la vitesse de rotation  
de l'amplitude de la vibration produite par un balourd

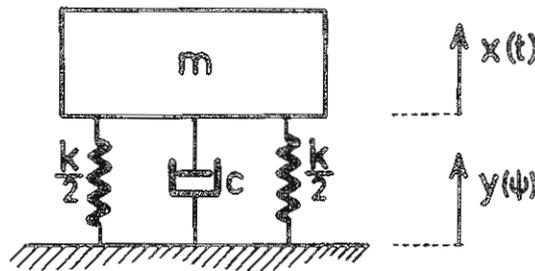


figure 2.5.14  
Excitation par le support

soit, en termes du déplacement absolu  $x$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y} \tag{2.5.37}$$

Si l'on représente le mouvement du support par

$$y = Y e^{i\Omega t}$$

et celui de la masse par

$$x = X e^{i\Omega t}$$

on obtient l'expression complexe de la *transmissibilité absolue*

$$\frac{X}{Y} = \frac{k + i\Omega c}{k - \Omega^2 m + i\Omega c} = \frac{1 + 2i\frac{\epsilon\Omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} + 2i\frac{\epsilon\Omega}{\omega_0}} = \left| \frac{X}{Y} \right| e^{-i\psi}$$

soit, en amplitude et en phase

$$\left| \frac{X}{Y} \right| = \sqrt{\frac{1 + (2\frac{\epsilon\Omega}{\omega_0})^2}{[1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}]^2 + (2\frac{\epsilon\Omega}{\omega_0})^2}} \quad \text{et} \quad \psi = \tan^{-1} \frac{2\epsilon(\frac{\Omega}{\omega_0})^3}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} + (2\epsilon\frac{\Omega}{\omega_0})^2} \tag{2.5.38}$$

La transmissibilité absolue calculée ici en termes de déplacements admet la même expression que celle (2.5.32) calculée en termes de forces. Elle montre que lorsque la fréquence propre du système est faible vis-à-vis de

celle de l'excitation, la masse  $m$  devient insensible à la vibration du support. Par contre, elle accompagne celui-ci dans son mouvement lorsque la fréquence d'excitation est très basse.

Si l'on caractérise la réponse par le déplacement relatif du support et de la masse

$$z = x - y$$

La réponse est cette fois régie par l'équation

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \tag{2.5.39}$$

de telle sorte que si l'on représente le mouvement relatif sous forme complexe  $z = Ze^{i\Omega t}$ , on calcule l'expression complexe de la *transmissibilité relative* (fig. 2.5.15)

$$\frac{Z}{Y} = \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} + 2i\frac{\epsilon\Omega}{\omega_0}} \tag{2.5.40}$$

soit, en amplitude et en phase

$$\left|\frac{Z}{Y}\right| = \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\epsilon\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \tan \phi = \frac{2\epsilon\Omega}{\omega_0\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)}$$

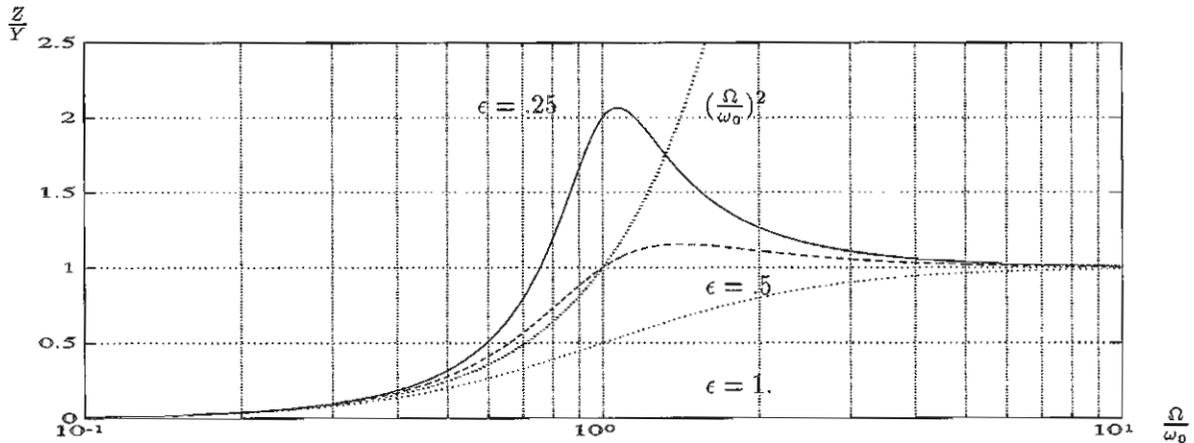


figure 2.5.15  
Transmissibilité relative  
d'un système excité par le support

On observe cette fois que l'amplitude du déplacement relatif du support varie comme le carré de la fréquence d'excitation tant que celle-ci reste faible vis-à-vis de la fréquence propre. Cette propriété d'un oscillateur excité par le support est mise à profit dans la mesure de hautes fréquences de vibrations par accéléromètres.

### 2.6 Principe de superposition

Lorsqu'on veut calculer la réponse du système linéaire

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \tag{2.6.1}$$

à une excitation  $f(t)$  quelconque, on peut mettre à profit la linéarité du système pour appliquer le principe de superposition.

Définissons par

$$\mathcal{L}[\dots] = m \frac{d^2}{dt^2} + c \frac{d}{dt} + k \quad (2.6.2)$$

l'opérateur lin ear qui nous permet de mettre (2.6.1) sous la forme

$$\mathcal{L}[x(t)] = f(t) \quad (2.6.3)$$

et soient  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$  deux excitations qui donnent lieu aux réponses  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$

$$\mathcal{L}[x_1(t)] = f_1(t) \quad \text{and} \quad \mathcal{L}[x_2(t)] = f_2(t) \quad (2.6.4)$$

Si l'on considère ensuite une excitation  $f_3(t)$  de la forme

$$f_3(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \quad (2.6.5)$$

la linéarité de l'opérateur dans la variable  $x$  et ses dérivées entraine que la réponse correspondante est

$$x_3(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \quad (2.6.6)$$

puisque l'on a bien

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x_3(t)] &= \mathcal{L}[c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)] \\ &= c_1 \mathcal{L}[x_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[x_2(t)] \\ &= c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \\ &= f_3(t) \end{aligned}$$

L'équation (2.6.6) représente le principe de superposition qui ne s'applique qu'aux systèmes lin ear. Son intérêt considérable résulte du fait que la réponse totale d'un système peut toujours être calculée en exprimant l'excitation sous la forme d'une somme de sollicitations élémentaires (harmoniques, indicielles, impulsionnelles, ...). Nous l'appliquerons d'abord au calcul de la réponse à une excitation périodique, à celui d'une excitation quelconque ensuite.

## 2.7 Réponse à une excitation périodique

Le cas de l'excitation périodique se ramène très naturellement, par le principe de superposition, à une somme de réponses harmoniques, puisque l'excitation périodique peut être décomposée par séries de Fourier en une somme d'excitations harmoniques (fig. 2.7.1).

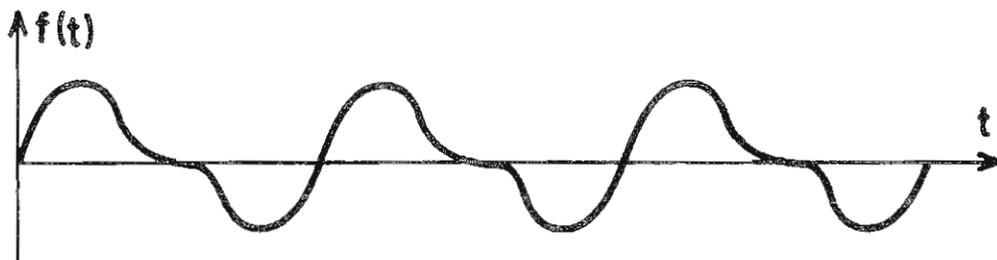


figure 2.7.1  
Fonction d'excitation périodique

Soit  $f(t)$  une excitation périodique de période  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$  que l'on suppose représentable par une série convergente de fonctions harmoniques à coefficients réels

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (a_p \cos p\Omega t + b_p \sin p\Omega t) \quad (2.7.1)$$

avec les coefficients

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos p\Omega t dt & p = 0, 1, 2, \dots \\ b_p &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin p\Omega t dt & p = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

qui représentent la participation des différents harmoniques à  $f(t)$ . En particulier,  $\frac{1}{2}a_0$  représente la valeur moyenne de  $f(t)$ . La représentation par série de Fourier est toujours possible pour autant que les intégrales (2.7.2) existent.

L'étude de la réponse forcée du système amorti à un degré de liberté a fait apparatre l'intérêt de la représentation complexe du cas harmonique. De même ici nous substituerons à la représentation (2.7.1) de l'excitation l'une ou l'autre des représentations équivalentes

$$f(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p e^{ip\Omega t} \quad (2.7.3)$$

ou encore

$$f(t) = \mathcal{R}_e \left[ \sum_{p=0}^{\infty} A_p e^{ip\Omega t} \right] \quad (2.7.4)$$

qui donnent lieu aux coefficients

$$C_p = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ip\Omega t} dt \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.7.5)$$

tels que

$$\begin{aligned} C_{-p} &= C_p^* \\ A_p &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-ip\Omega t} dt & p = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

avec les équivalences

$$\begin{aligned} a_0 &= 2C_0 & a_p &= \mathcal{R}_e[C_p] & b_p &= -\mathcal{I}_m[C_p] \\ A_p &= 2C_p \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

On utilisera ici la représentation (2.7.4) qui permet, par application du principe de superposition, de mettre la réponse sous la forme déduite de l'équation (2.5.11)

$$x(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \mathcal{R}_e [H(p\Omega) A_p e^{ip\Omega t}] \quad (2.7.8)$$

où  $H(p\Omega)$  est la fonction de transfert du système à la fréquence  $p\Omega$

$$H(p\Omega) = H_p = \frac{1}{1 - \left(\frac{p\Omega}{\omega_0}\right)^2 + 2i\epsilon\left(\frac{p\Omega}{\omega_0}\right)} \quad (2.7.9)$$

La réponse (2.7.8) peut également être mise sous la forme

$$x(t) = \mathcal{R}_e \left[ \sum_{p=0}^{\infty} |H_p| A_p e^{i(p\Omega t - \Phi_p)} \right] \quad (2.7.10)$$

où  $|H_p|$  est le module de (2.7.9) et

$$\Phi_p = \tan^{-1} \left[ \frac{2\epsilon \frac{p\Omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{p\Omega}{\omega_0}\right)^2} \right] \quad (2.7.11)$$

est le déphase associ e à l'harmonique  $p$  de l'excitation.

Lorsque l'on n'est int eress e que par une caractérisation de l'excitation en réponse et en amplitude, on peut, tout comme dans le cas harmonique, calculer les valeurs quadratiques moyennes

$$\begin{aligned} \overline{f^2} &= \frac{1}{T} \int_0^T (\mathcal{R}_e \sum_{p=0}^{\infty} A_p e^{ip\Omega t})^2 dt \\ &= \frac{1}{4T} \int_0^T [\sum_{p=0}^{\infty} (A_p e^{ip\Omega t} + A_p^* e^{-ip\Omega t})]^2 dt \end{aligned}$$

et de même

$$\overline{x^2} = \frac{1}{T} \int_0^T (\mathcal{R}_e \sum_{p=0}^{\infty} H_p A_p e^{ip\Omega t})^2 dt$$

Tenant compte du fait que

$$\int_0^T e^{ik\Omega t} dt = 0 \quad k \text{ entier } \neq 0$$

On obtient, tous calculs faits, la généralisation des résultats (2.5.30)

$$\begin{aligned} \overline{f^2} &= \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} A_p A_p^* = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} |A_p|^2 \\ \overline{x^2} &= \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} H_p A_p H_p^* A_p^* = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} |H_p|^2 |A_p|^2 \end{aligned} \quad (2.7.12)$$

Les contributions de chaque fréquence individuelle à l'excitation et à la réponse correspondante peuvent être caractérisées respectivement par les fonctions

- densité de puissance spectrale de l'excitation

$$G_f(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} |A_p|^2 \delta(\omega - p\Omega) \quad (2.7.13)$$

- densité de puissance spectrale de la réponse

$$G_x(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} |H_p|^2 |A_p|^2 \delta(\omega - p\Omega) \quad (2.7.14)$$

où  $\delta(x)$  représente la fonction de Dirac, et telles que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} G_f(\omega) d\omega &= \overline{f^2} \\ \int_0^{\infty} G_x(\omega) d\omega &= \overline{x^2} \end{aligned}$$

La figure (2.7.2) représente une fonction de densité spectrale de puissance (excitation ou réponse) typique d'un système à excitation périodique.

Selon qu'il s'agit d'une excitation ou d'une réponse, les pics correspondant aux différents harmoniques ont une amplitude  $\frac{1}{2}|A_p|^2$  ou  $\frac{1}{2}|H_p|^2|A_p|^2$ .

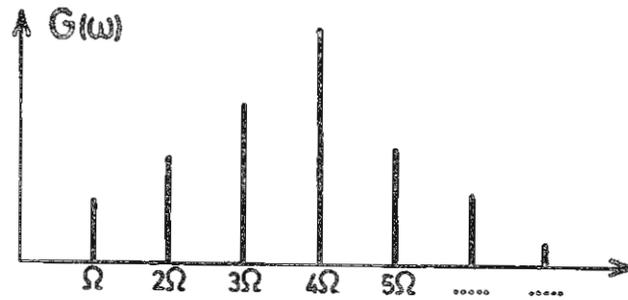


figure 2.7.2  
Densité de puissance spectrale  
d'une grandeur périodique

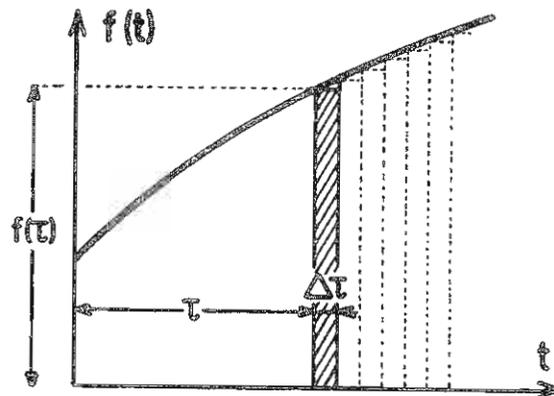


figure 2.8.1  
Décomposition de l'excitation  
en impulsions élémentaires

## 2.8 Réponse à une excitation non périodique

Dans le cas d'une excitation quelconque, il est possible, de la même manière que pour une excitation périodique, de décomposer l'excitation  $f(t)$  en fonctions élémentaires et de calculer ensuite la réponse par application du principe de superposition. Selon les cas, on décomposera l'excitation en

- une infinité de contributions sinusodales, par transformation de Fourier ;
- une infinité d'impulsions élémentaires, d'intensité  $f(\tau)\Delta\tau$ , comme représenté à la figure (2.8.1).
- une infinité d'échelons élémentaires, d'intensité  $\Delta f(\tau)$ , comme représenté à la figure (2.8.2).

La réponse à une contribution sinusodale ayant déjà été calculée, il nous reste à calculer la réponse à une impulsion ou un échelon élémentaire.

### 2.8.1 Calcul de la réponse à une impulsion

Considérons le cas d'un système soumis à une excitation impulsionnelle d'intensité  $f_0$  à l'instant  $t = 0$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0\delta(t) \tag{2.8.1}$$

avec les conditions initiales homogènes  $\dot{x}_0 = x_0 = 0$ .

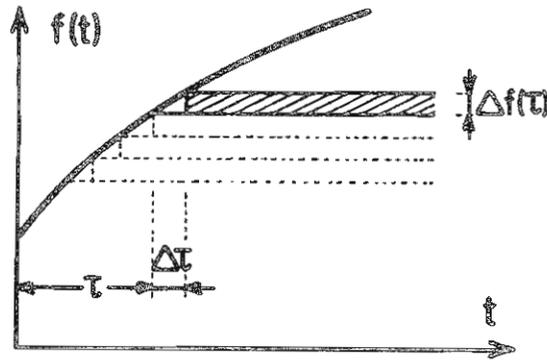


figure 2.8.2  
Décomposition de l'excitation  
en échelons élémentaires

Si l'on intègre sur un intervalle de temps  $\Delta t$  infiniment court et que l'on prend la limite pour  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} (m\ddot{x} + c\dot{x} + kx) dt = f_0 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} \delta(t) dt = f_0$$

avec d'autre part, dans le membre de gauche

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} m\ddot{x} dt &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [m\dot{x}]_0^{\Delta t} = m\dot{x}(0^+) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} c\dot{x} dt &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [cx]_0^{\Delta t} = 0 \end{aligned}$$

vu la continuité du déplacement, et de même

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^{\Delta t} kx dt = 0$$

On en déduit que soumettre un système à une impulsion  $f_0$  revient à lui communiquer une vitesse initiale

$$\dot{x}(0^+) = \frac{f_0}{m} \quad (2.8.2)$$

Avec les conditions initiales  $x_0 = 0$  et  $\dot{x}_0 = \frac{f_0}{m}$ , l'équation (2.3.5) fournit donc l'expression de la réponse

$$x(t) = \frac{f_0}{m\omega_0\sqrt{1-\epsilon^2}} e^{-\epsilon\omega_0 t} \sin \omega_0 \sqrt{1-\epsilon^2} t$$

On en déduit l'expression de la réponse impulsionnelle  $h(t)$ , obtenue en faisant  $f_0 = 1$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{m\omega_0\sqrt{1-\epsilon^2}} e^{-\epsilon\omega_0 t} \sin \omega_0 \sqrt{1-\epsilon^2} t & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad (2.8.3)$$

### 2.8.2 Calcul de la réponse à une excitation quelconque par superposition de réponses impulsionnelles

Reportons-nous à la décomposition de l'excitation en une somme d'impulsions d'intensité  $f(t)$  comme représenté à la figure (2.8.1).

A chaque impulsion élémentaire  $f(\tau)\Delta\tau \delta(t - \tau)$  correspond la réponse élémentaire

$$\Delta x(t, \tau) = f(\tau)\Delta\tau h(t - \tau)$$

d'où la réponse totale pour des conditions initiales homogènes

$$x(t) \simeq \sum f(\tau)h(t - \tau)\Delta\tau$$

soit, par passage à la limite pour  $\Delta\tau \rightarrow 0$

$$\boxed{x(t) = \int_0^t f(\tau)h(t - \tau)d\tau} \quad (2.8.4)$$

Le résultat (2.8.4) montre que la réponse à une excitation peut s'exprimer comme le produit de convolution de l'excitation et la réponse impulsionnelle.

### 2.8.3 Calcul de la réponse indicielle

Dans le cas où le système subit une excitation en forme d'échelon dans le temps

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= f_0 & t > 0 \\ x_0 = \dot{x}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

sa réponse s'exprime comme la superposition d'une vibration libre et de la solution particulière  $x = \frac{f_0}{k}$ , soit

$$x(t) = \frac{f_0}{k} + e^{-\epsilon\omega_0 t} [A \cos \omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2} t + B \sin \omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2} t]$$

et l'application des conditions aux limites fournit les coefficients

$$A = -\frac{f_0}{k} \quad \text{et} \quad B = \frac{A\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$$

La réponse de (2.8.5) s'écrit donc

$$x(t) = \frac{f_0}{k} \left\{ 1 - e^{-\epsilon\omega_0 t} \left[ \cos \omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2} t + \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \sin \omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2} t \right] \right\}$$

et on en déduit, pour un échelon unitaire, la réponse indicielle  $g(t)$

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{k} \left\{ 1 - e^{-\epsilon\omega_0 t} \left[ \cos \omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2} t + \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \sin \omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2} t \right] \right\} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad (2.8.6)$$

### 2.8.4 Calcul de la réponse à une excitation quelconque par superposition de réponses indicelles

La figure (2.8.2) montre que l'excitation  $f(t)$  peut être considérée comme le résultat d'échelons de charge élémentaires  $\Delta f(\tau)$ . A chaque échelon de charge  $\Delta f(\tau)$  appliqué en  $t = \tau$  correspond la réponse élémentaire

$$\Delta x(t, \tau) = \Delta f(\tau)g(t - \tau)$$

d'où, par superposition, la réponse totale pour des conditions initiales homogènes

$$x(t) \simeq f(0)g(t) + \sum \frac{\Delta f(\tau)}{\Delta \tau} g(t - \tau) \Delta \tau$$

et par passage à la limite pour  $\Delta \tau \rightarrow 0$

$$\boxed{x(t) = f(0)g(t) + \int_0^t \frac{df(\tau)}{d\tau} g(t - \tau) d\tau} \quad (2.8.7)$$

Sous cette forme, la réponse comporte deux parties :

- la réponse correspondant au saut de charge  $f(0)$  en  $t = 0$ ;
- le produit de convolution de la réponse indicelle avec la dérivée de l'excitation.

On notera que le résultat (2.8.7) est équivalent à (2.8.4) puisque l'on a par intégration par parties

$$x(t) = f(0)g(t) + [f(\tau)g(t - \tau)]_0^t + \int_0^t f(\tau) \frac{dg(\tau)}{d\tau} (t - \tau) d\tau$$

soit, en notant que  $g(0) = 0$

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) \frac{dg}{d\tau} (t - \tau) d\tau \quad (2.8.8)$$

Par comparaison des résultats (2.8.4) et (2.8.8), on déduit que la réponse impulsionnelle est la dérivée de la réponse indicelle

$$\boxed{h(t) = \frac{dg}{dt}} \quad (2.8.9)$$

de même que la fonction de Dirac s'interprète formellement comme la dérivée d'une fonction échelon.

### 2.8.5 Calcul de la réponse à une excitation quelconque par transformée de Fourier

Reprenons le résultat (2.7.3) obtenu pour la représentation d'une fonction périodique de période  $T$

$$f(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p e^{ip\Omega t} \quad \Omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.8.10)$$

avec les coefficients

$$C_p = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ip\Omega t} dt \quad (2.8.11)$$

Si l'on pose

$$p\Omega = \Omega_p \quad \Delta\Omega_p = (p+1)\Omega - \Omega_p = \frac{2\pi}{T}$$

on peut réécrire les résultats (2.8.10) et (2.8.11) sous la forme

$$f(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} (TC_p) e^{i\Omega_p t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (TC_p) e^{i\Omega_p t} \Delta\Omega_p$$

$$TC_p = \int_0^T f(t) e^{-i\Omega_p t} dt$$

Pour une fonction non périodique, on peut faire tendre la période  $T \rightarrow \infty$  et poser

$$\Omega_p = \omega$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (TC_p) = F(\omega)$$

auquel cas on obtient les relations intégrales de transformation qui permettent de représenter la fonction  $f(t)$  dans le plan fréquentiel et inversement sa transformée  $F(\omega)$  dans le plan temporel

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ F(\omega) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \end{aligned}} \quad (2.8.12)$$

Les fonctions  $f(t)$  et  $F(\omega)$  représentent une paire de transformées de Fourier.  $F(\omega)$  peut être considéré comme la densité spectrale de l'excitation, en ce sens que  $F(\omega)d\omega$  est la contribution des harmoniques dans l'intervalle  $[\omega, \omega + d\omega]$  à l'excitation  $f(t)$ . De la même manière, on obtient la représentation par intégrale de Fourier de la réponse

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.8.13)$$

qui est le correspondant de (2.7.8) pour une excitation non périodique. Sa transformée de Fourier est

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.8.14)$$

et l'on en conclut que la transformée de Fourier de la réponse est fournie par

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega)$$

De la comparaison de (2.8.4) au résultat ci-dessus on déduit le résultat fondamental selon lequel au produit de convolution de deux fonctions dans le plan temporel correspond dans le plan fréquentiel le produit algébrique des transformées de Fourier de ces deux fonctions

$$\boxed{\int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \Leftrightarrow \quad H(\omega)F(\omega)} \quad (2.8.15)$$

Considérons en particulier le cas où l'excitation est une impulsion d'intensité unitaire en  $t = 0$ , à laquelle correspond la réponse impulsionnelle  $h(t)$ . Faisant

$$f(t) = \delta(t)$$

on calcule la transformée de Fourier

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = 1$$

et on en déduit l'expression de la réponse impulsionnelle

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\Omega t} d\omega \quad (2.8.16)$$

qui montre que celle-ci est la transformée de Fourier de la fonction de transfert en fréquence (2.5.13) du système. Inversement, on a

$$H(\omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.8.17)$$

Le système peut donc être caractérisé indifféremment par sa réponse impulsionnelle ou sa réponse complexe fréquentielle, selon que l'on adopte sa représentation dans le plan temporel ou dans le plan fréquentiel.

On peut, de la même manière que dans le cas de l'excitation périodique, calculer l'énergie totale contenue dans l'excitation en évaluant l'intégrale

$$\int_0^{\infty} f^2(t) dt$$

que l'on peut transformer comme suit en mettant à profit le caractère réel de  $f(t)$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f^2(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \int_0^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) d\omega \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\int_0^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega} \quad (2.8.18)$$

Le résultat (2.8.18) montre que l'énergie totale contenue dans le signal d'excitation peut indifféremment être  valu e par intégration de sa densité d'énergie dans le plan temporel ou dans le plan fréquentiel. On peut de la même manière calculer l'énergie totale contenue dans la réponse

$$\boxed{\int_0^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 |F(\omega)|^2 d\omega} \quad (2.8.19)$$

Notons enfin que la transformée de Fourier est particulièrement bien adaptée à une évaluation numérique (Fast Fourier Transform). De ce fait, elle est la base des méthodes modernes d'identification du comportement dynamique des structures par voie digitale.

## 2.9 Réponse spectrale

Le principe de la réponse spectrale consiste à évaluer la réponse du système à partir de réponses précalculées pour certaines formes d'excitation prédéfinies. Cette manière de procéder permet d'éviter le calcul explicite de la réponse dans le temps lorsque la connaissance détaillée de son évolution n'est pas nécessaire.

On définit le *spectre de réponse* d'un système à 1 ddl à une excitation spécifiée (choc, secousse sismique, etc.) comme étant le *diagramme de la réponse maximale*  tabli en fonction de la fréquence naturelle du système et, éventuellement, de son coefficient d'amortissement.

Supposons le système soumis à une excitation d'intensité statique  $F_0$  et d'évolution temporelle  $\phi(t)$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0\phi(t) \quad (2.9.1)$$

Si l'on définit la réponse statique

$$x_{st} = \frac{F_0}{k} \quad (2.9.2)$$

tenant compte de (2.8.3) et (2.8.4) le maximum de la réponse à des conditions initiales nulles peut être  valu e par le *facteur de réponse dynamique*

$$\boxed{n = \left(\frac{x}{x_{stat}}\right)_{max} = \max_{0 < t < \infty} \left[ \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \int_0^t \phi(\tau) e^{-\epsilon\omega_0(t-\tau)} \sin \omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2}(t - \tau) d\tau \right]} \quad (2.9.3)$$

*Le cas de la réponse à un échelon de force*

Lorsque le système est soumis à un échelon de force d'intensité  $F_0$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \quad t > 0 \quad (2.9.4)$$

la réponse indicielle (2.8.6) fournit l'expression de la réponse

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left\{ 1 - e^{-\epsilon \omega_0 t} \left[ \cos \omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2} t + \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \sin \omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2} t \right] \right\} \quad t > 0 \quad (2.9.5)$$

et la vitesse correspondante a pour expression

$$\dot{x}(t) = \frac{F_0}{k} \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} e^{-\epsilon \omega_0 t} \sin \omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2} t \quad (2.9.6)$$

Elle s'annule pour la première fois et donne lieu à une valeur maximale du déplacement au temps

$$t_{max} = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2}} \quad (2.9.7)$$

Le facteur de réponse dynamique dépend donc dans ce cas du coefficient d'amortissement mais n'est pas influencé par la fréquence propre du système

$$n = \left( \frac{x}{x_{stat}} \right)_{max} = 1 + \exp \left( -\frac{\epsilon \pi}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \right) \quad (2.9.8)$$

Son évolution en fonction du coefficient d'amortissement est représentée par la figure (2.9.1): on observe qu'il est au maximum égal à 2 lorsque le système ne possède aucun amortissement.

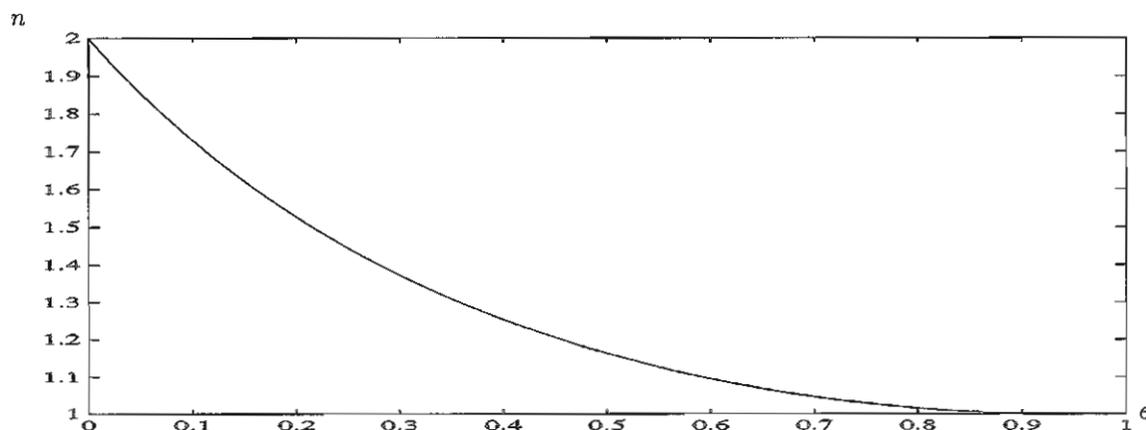


figure 2.9.1  
Système à 1 ddl soumis à échelon de charge  
Facteur de réponse dynamique en fonction de l'amortissement

*Le cas de la réponse à une impulsion rectangulaire*

Dans ce cas, la réponse est influencée par deux facteurs:

- le rapport de la durée  $t_1$  de l'impulsion vis à vis de la période  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  du système,
- le taux d'amortissement  $\epsilon$  dans le système.

La réponse à une impulsion rectangulaire peut être directement déduite du cas précédent, en notant que l'impulsion rectangulaire

$$f(t) = \begin{cases} F_0 & \text{si } 0 < t < t_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.9.9)$$

peut être construite par superposition de deux échelons.

Soit

$$x_h(t) = \frac{F_0}{k} \left\{ 1 - e^{-\epsilon \omega_0 t} \left[ \cos \omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2} t + \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \sin \omega_0 \sqrt{1 - \epsilon^2} t \right] \right\} \quad (2.9.10)$$

la réponse à un échelon obtenue en (2.9.5). En termes de celle-ci, la réponse à une impulsion rectangulaire de durée  $t_1$  peut être exprimée sous la forme

$$x(t) = \begin{cases} x_h(t) & 0 < t < t_1 \\ x_h(t) - x_h(t - t_1) & t > t_1 \end{cases} \quad (2.9.11)$$

La réponse (2.9.11) est représentée par la figure (2.9.2) dans deux cas:

- l'oscillateur a une fréquence propre élevée:  $\omega_0 t_1 > \pi$
- l'oscillateur a une fréquence propre basse:  $\omega_0 t_1 < \pi$

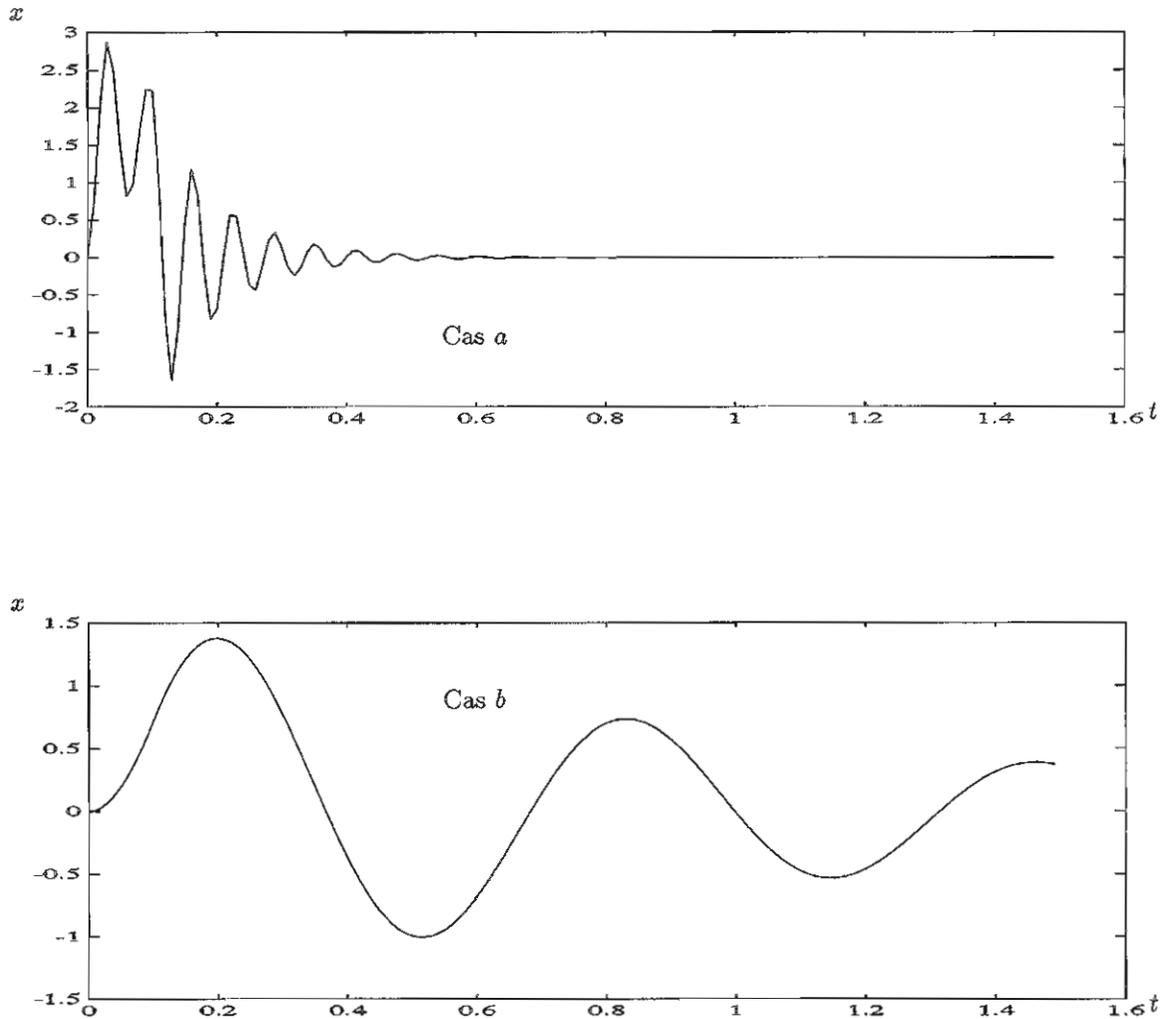


figure 2.9.2

Systeme soumis à impulsion rectangulaire

Cas a: oscillateur à fréquence propre élevée ( $\omega_0 t_1 > \pi$ )

Cas b: oscillateur à fréquence propre basse ( $\omega_0 t_1 < \pi$ )

On voit que la nature du maximum n'est pas la même dans les deux cas:

- dans le cas a), la durée de l'impulsion est suffisamment longue pour que le maximum de la réponse puisse intervenir au cours de la phase initiale;
- dans le cas b), l'excitation disparaît avant que le système n'ait atteint son premier pic. Le mouvement continue par inertie, de telle sorte que le maximum du mouvement apparait après le choc.

Pour procéder à l'évaluation du facteur de réponse dynamique, considérons le cas simplifié du système non amorti. La réponse peut alors être explicitée sous la forme

$$x(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{k}(1 - \cos \omega_0 t) & 0 < t < t_1 \\ \frac{F_0}{k}[\cos \omega_0(t - t_1) - \cos \omega_0 t] & t > t_1 \end{cases}$$

ou encore, après développement de la réponse résiduelle

$$x(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{k}(1 - \cos \omega_0 t) & 0 < t < t_1 \\ 2\frac{F_0}{k}\left[\sin \frac{\omega_0 t_1}{2} \sin \omega_0\left(t - \frac{t_1}{2}\right)\right] & t > t_1 \end{cases} \quad (2.9.12)$$

On déduit de (2.9.12) que la réponse spectrale est constituée de deux parties:

- Pour la phase initiale de la réponse:

$$n_1 = \begin{cases} 1 - \cos \omega_0 t_1 & \text{si } t_1 < \frac{T}{2} \\ 2 & \text{si } t_1 > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (2.9.13)$$

- Pour la phase résiduelle de la réponse:

$$n_2 = 2 \sin \frac{\omega_0 t_1}{2} \quad (2.9.14)$$

et le facteur de réponse dynamique peut être exprimé sous la forme

$$n = \max_{\omega_0 t_1} \{n_1, n_2\} \quad (2.9.15)$$

Le diagramme de la figure (2.9.3) montre, en fonction de la fréquence  $\omega_0$  de l'oscillateur et pour une durée d'impulsion fixée, la variation du facteur de réponse dynamique. La réponse résiduelle domine à faible fréquence, tandis que la réponse initiale gouverne la réponse spectrale à fréquence élevée.

## 2.10 Références

1. MEIROVITCH, L., Analytical methods in vibrations, The MacMillan Co, NY, 1967
2. MEIROVITCH, L., Elements of vibrations analysis, McGraw Hill, 1975
3. DEN HARTOG, J.P., Mechanical vibrations, McGraw Hill, 1976
4. HARRIS, C.M., CREDE, C.E., Shock and vibration handbook, McGraw Hill, 2d Ed., 1976
5. GERADIN, M., Cours de théorie des vibrations, Université de Liège, Rapport LTAS VF-23, 1977

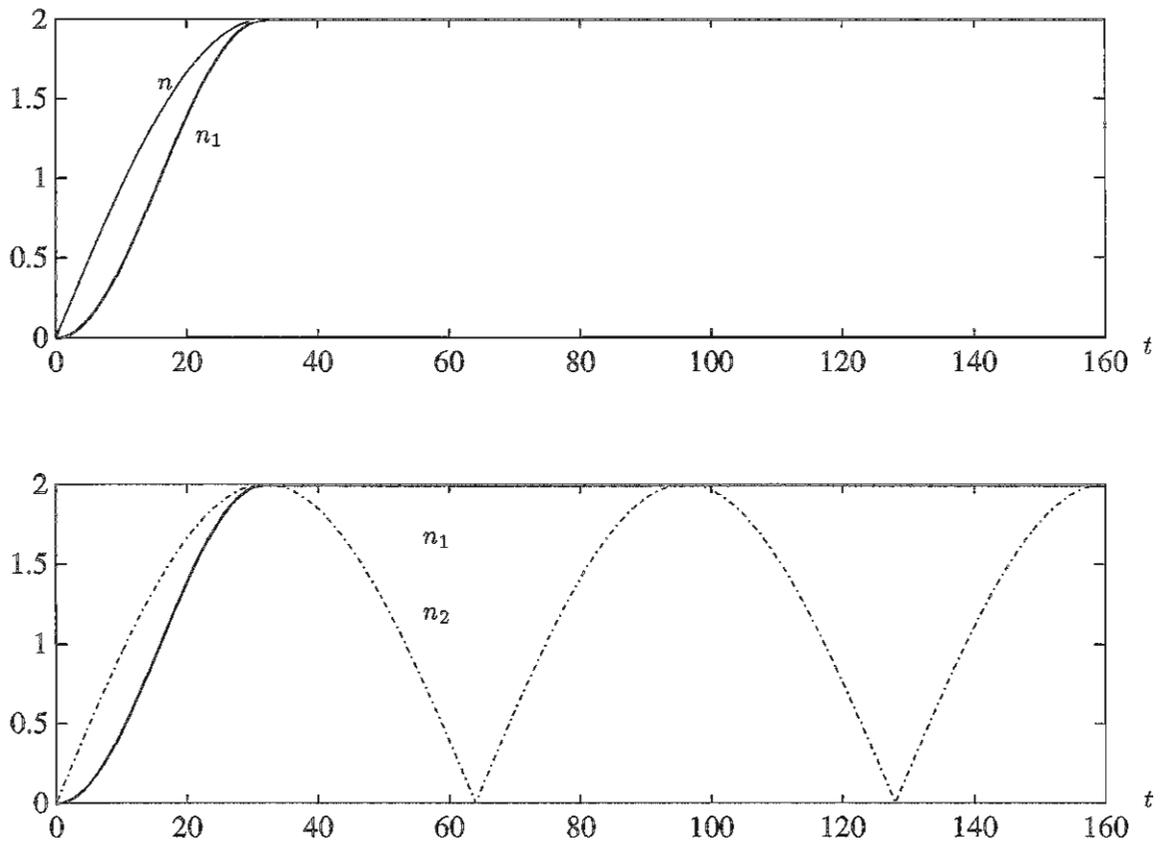


figure (2.9.3)  
Système soumis à impulsion rectangulaire  
facteur de réponse dynamique en fonction de la fréquence

### 3. Les Systèmes à Deux Degrés de Liberté

---



### 3.1 Introduction

Le comportement des systèmes à deux degrés de liberté diffère radicalement de celui de l'oscillateur à un degré de liberté par les faits suivants :

- ils possèdent deux fréquences naturelles auxquelles ils sont susceptibles de vibrer en l'absence de sollicitation extérieure ;
- pour chacune des ces fréquences, le mouvement correspondant est un mouvement synchrone (c'est-à-dire en phase) des deux masses du système ;
- le couplage entre les deux degrés de liberté autorise un transfert d'énergie d'une masse à l'autre du système.

Ce chapitre, en même temps de présenter l'intérêt de servir d'introduction aux oscillations de systèmes à  $n$  degrés de liberté dont l'étude sera faite de façon systématique dans le chapitre suivant, développe une application importante des systèmes à deux degrés de liberté : les amortisseurs dynamiques de vibration qui sont utilisés pour réduire le niveau de vibration de nombreux systèmes mécaniques.

### 3.2 Equations du mouvement d'un système non amorti

Considérons le système mécanique suivant.

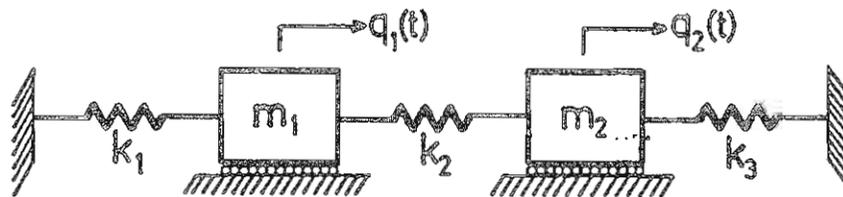


figure 3.2.1  
Système à deux degrés de liberté

Il a pour énergies potentielle et cinétique

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{2}k_1q_1^2 + \frac{1}{2}k_2(q_2 - q_1)^2 + \frac{1}{2}k_3q_2^2 \\ \mathcal{T} &= \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Si  $p_1(t)$  et  $p_2(t)$  sont les forces extérieures appliquées aux masses  $m_1$  et  $m_2$ , on peut écrire les équations du mouvement du système en utilisant les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_i} = p_i(t) \quad (3.2.2)$$

on obtient le système d'équations

$$\begin{aligned} m_1\ddot{q}_1 + k_1q_1 + k_2(q_1 - q_2) &= p_1(t) \\ m_2\ddot{q}_2 + k_2(q_2 - q_1) + k_3q_2 &= p_2(t) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

On constate donc que dans un système à 2 ddl, il y a en général couplage entre ddl ; il est uniquement par les raideurs dans le cas présent, mais il peut intervenir aussi par les inerties .

Le système (3.2.3) peut être mis sous forme matricielle

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{p}(t) \quad (3.2.4)$$

à condition de définir:

- la matrice des raideurs du système

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

que l'on écrit sous la forme générale

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

Elle est symétrique et définie positive, ce qui se traduit par la propriété

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}^T$$

où l'indice  $T$  dénote l'opération de transposition matricielle, et le fait que la forme quadratique associée est toujours positive

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbb{K} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \sum \sum k_{ij} q_i q_j > 0 \quad \mathbf{q} \neq 0$$

- la matrice des masses

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

est elle aussi symétrique et définie positive, et de forme diagonale dans le cas présent. Dans le cas général, on l'écrit sous la forme

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

et son caractère symétrique peut être confirmé en réécrivant l'énergie cinétique sous forme quadratique

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum \sum m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbb{m} \dot{\mathbf{q}} > 0 \quad \dot{\mathbf{q}} \neq 0$$

et en notant que son expression est indépendante de l'ordre des sommations.

Considérons un instant le système statique

$$\mathbb{K} \mathbf{q} = \mathbf{p}$$

associé à (3.2.2) : on peut l'écrire sous forme inverse

$$\mathbf{q} = \mathbb{F} \mathbf{p}$$

avec la matrice des coefficients d'influence

$$\mathbb{F} = \mathbb{K}^{-1} \quad (3.2.7)$$

dont la symétrie traduit le *principe de réciprocité de Maxwell*. En effet, le terme  $f_{ij} = f_{ji}$  peut être interprété comme le déplacement de la coordonnée généralisée  $q_i$  sous l'effet d'une force unitaire appliquée en  $j$ .

## Exemple de détermination d'une matrice de raideur

Supposons que l'on ait à étudier les vibrations d'une poutre en flexion sans masse supportant deux masses concentr es  $m_1$  et  $m_2$  à mi-portée et en bout de portée

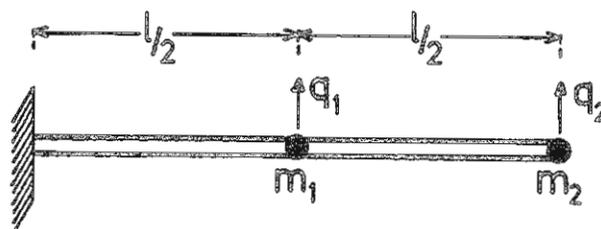


figure 3.2.2

Modèle à deux degrés de liberté d'une poutre console

Pour une poutre de longueur  $x$  supportant une charge à son extr emitt :

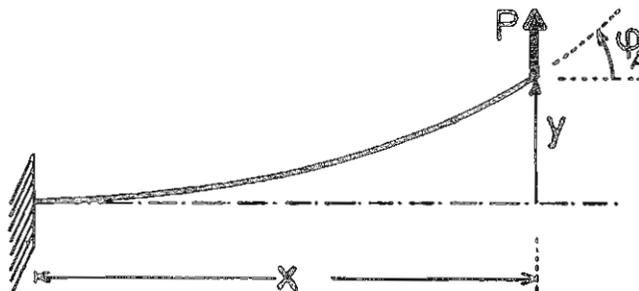


figure 3.2.3

Détermination d'un coefficient d'influence

la f eche et la rotation à l'extr emitt  valent respectivement  $y = \frac{Px^3}{3EI}$  et  $\phi = \frac{Px^2}{2EI}$ . D'où pour le système de la figure 3.2.2, les coefficients d'influence

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{\ell^3}{24EI} \\ f_{12} &= y\left(\frac{\ell}{2}\right) + \phi\left(\frac{\ell}{2}\right) \times \frac{\ell}{2} = \frac{\ell^3}{24EI} + \frac{\ell^3}{16EI} = \frac{5}{48} \frac{\ell^3}{EI} \\ f_{22} &= \frac{\ell^3}{3EI} \end{aligned}$$

Il en résulte les matrices de flexibilité et de raideur

$$\mathbf{F} = \frac{\ell^3}{3EI} \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{1}{16} & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \frac{48 EI}{7 \ell^3} \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.2.8)$$

On peut également construire une matrice de masse pour une poutre uniforme en supposant la masse de chaque tronçon reportée aux deux extr emitt s. On obtient

$$\mathbf{M} = \frac{m\ell}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.9)$$

### 3.3 Fréquences et modes propres du système non amorti

Considérons le cas du système conservatif, c'est-à-dire en l'absence de forces extérieures et de dissipation. Les équations du mouvement se réduisent alors à la forme homogène

$$\mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = 0 \quad (3.3.1)$$

Recherchons en particulier des solutions de type *synchrone*, c'est-à-dire telles que tous les points soient en phase, ce que l'on écrit

$$\mathbf{q}(t) = \phi(t)\mathbf{x} \quad (3.3.2)$$

où le vecteur  $\mathbf{x}$  représente l'amplitude du mouvement et où le scalaire  $\phi(t)$  représente sa loi d'évolution temporelle.

Par substitution de (3.3.2) dans (3.3.1), on obtient

$$\mathbf{K}\mathbf{x}\phi(t) + \mathbf{M}\mathbf{x}\ddot{\phi}(t) = 0$$

soit, si l'on explicite les deux équations du mouvement

$$\frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)} = \frac{k_{11}x_1 + k_{12}x_2}{m_1x_1} = \frac{k_{21}x_1 + k_{22}x_2}{m_2x_2}$$

ce qui n'est possible que si

$$\ddot{\phi}(t) - \lambda\phi(t) = 0 \quad (3.3.3)$$

$\mathbf{x}$  étant la solution de

$$(\mathbf{K} + \lambda\mathbf{M})\mathbf{x} = 0 \quad (3.3.4)$$

soit, explicitement

$$\begin{bmatrix} k_{11} + \lambda m_1 & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} + \lambda m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.3.5)$$

Ce système n'admet de solution non triviale que si  $\text{dtm}(\mathbf{K} + \lambda\mathbf{M}) = 0$ , équation à laquelle correspondent les racines

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2} \right) \pm \left[ \left( \frac{k_{11}}{m_1} - \frac{k_{22}}{m_2} \right)^2 + \frac{4k_{12}^2}{m_1m_2} \right]^{1/2} \right\} \quad (3.3.6)$$

Celles-ci étant manifestement toujours négatives, on peut écrire  $\lambda = -\omega^2$ , et remettre le problème des vibrations libres sous la forme classique

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{x} \quad (3.3.7)$$

dont les valeurs propres vérifient l'équation algébrique

$$\text{dtm}(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0 \quad (3.3.8)$$

La partie temporelle de la solution vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0 \quad (3.3.9)$$

et admet donc la forme générale de type harmonique

$$\phi = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (3.3.10)$$

avec une pulsation naturelle correspondant à l'une ou l'autre des racines

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2} \right) - \left[ \left( \frac{k_{11}}{m_1} - \frac{k_{22}}{m_2} \right)^2 + \frac{4k_{12}^2}{m_1m_2} \right]^{1/2} \right\} \\ \omega_2^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2} \right) + \left[ \left( \frac{k_{11}}{m_1} - \frac{k_{22}}{m_2} \right)^2 + \frac{4k_{12}^2}{m_1m_2} \right]^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Il correspond aux valeurs propres (3.3.11) deux *vecteurs propres*, ou *modes propres*, que l'on note  $\mathbf{x}_{(1)}$  et  $\mathbf{x}_{(2)}$ . Ceux-ci ne sont connus qu'à une constante près.

Ils sont calculés en exprimant les rapports d'amplitude entre composantes

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{x_{(1),2}}{x_{(1),1}} = -\frac{k_{11} - \omega_1^2 m_1}{k_{12}} = \frac{-k_{12}}{k_{22} - \omega_1^2 m_2} \\ r_2 &= \frac{x_{(2),2}}{x_{(2),1}} = -\frac{k_{11} - \omega_2^2 m_1}{k_{12}} = \frac{-k_{12}}{k_{22} - \omega_2^2 m_2} \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

et s'expriment donc

$$\mathbf{x}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ r_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ r_2 \end{bmatrix} \quad (3.3.13)$$

Les *fréquences propres*  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les fréquences auxquelles le système est susceptible de vibrer librement, et les modes propres associés décrivent les rapports d'amplitudes pour les mouvements synchrones des deux masses qui y correspondent. A tout instant, le mouvement du système peut être exprimé par deux solutions élémentaires

$$\mathbf{q}(t) = (A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t) \mathbf{x}_{(1)} + (A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t) \mathbf{x}_{(2)} \quad (3.3.14)$$

Les coefficients  $A_1, B_1, A_2$  et  $B_2$  sont à déterminer en fonction des conditions initiales.

*Exemple du système masse-ressort*

Reprenons l'exemple de la figure 3.2.1, avec les valeurs particulières

$$k_1 = k_2 = k, \quad k_3 = 2k \quad \text{et} \quad m_1 = m, \quad m_2 = 2m$$

Il en résulte les matrices de raideur et de masse

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

et les valeurs propres sont solutions de

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{7k}{4m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{7k}{2m}\right)^2 - 10\left(\frac{k}{m}\right)^2} \\ &= \left(\frac{7}{4} \pm \frac{3}{4}\right) \frac{k}{m} \end{aligned}$$

$$\text{soit} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = 1.5811 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Posant arbitrairement que la composante de chaque mode est égale à l'unité, on déduit de (3.3.10) les modes propres du système

$$\mathbf{x}_{(1)}^T = [1 \quad 1] \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_{(2)}^T = \left[1 \quad -\frac{1}{2}\right]$$

Dans le premier mode, les masses vibrent en phase, de telle sorte que le ressort central ne subisse aucune déformation. Par contre, dans le deuxième mode, les masses ont des mouvements en sens contraires et compriment le ressort central.

*Exemple de système en torsion*

Considérons le système en torsion de la figure 3.3.1, constitué de deux volants d'inertie  $I_1$  et  $I_2$  couplés par un arbre en torsion de raideur  $k = \frac{GJ}{l}$ .

Le système repose sur deux paliers, de telle sorte que la rotation de l'arbre rigide ne soit pas empêchée.

Notant  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les angles de rotation des deux inerties, on calcule successivement

$$T = \frac{1}{2}(I_1 \dot{\theta}_1^2 + I_2 \dot{\theta}_2^2) \quad \mathcal{V} = \frac{1}{2}k(\theta_2 - \theta_1)^2$$

les matrices de raideur et de masse

$$\mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

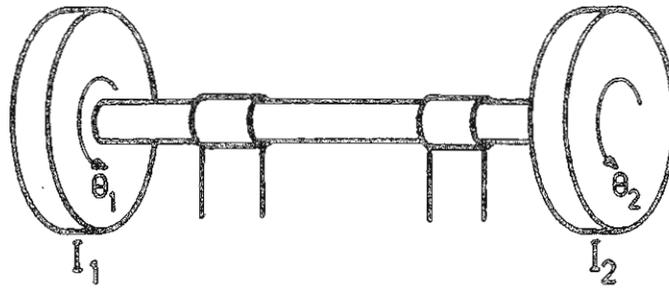


figure 3.3.1  
Système en torsion à deux degrés de liberté

et l'on note que la matrice  $\mathbb{K}$  est singulière en raison de la présence du *mode rigide de rotation* qui ne donne lieu à aucune déformation.

Le problème aux valeurs propres (3.3.8) donne lieu à l'équation aux fréquences propres

$$\det \begin{bmatrix} k - \omega^2 I_1 & -k \\ -k & k - \omega^2 I_2 \end{bmatrix} = 0$$

dont les solutions sont

$$\omega_1^2 = 0 \quad \text{et} \quad \omega_2^2 = \frac{k(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}$$

On vérifie aisément que la première correspond bien au mode rigide  $\mathbf{x}_{(1)}^T = [1 \quad 1]$ . La seconde donne lieu au mode propre élastique

$$\mathbf{x}_{(2)}^T = \left[ 1 \quad -\frac{I_1}{I_2} \right]$$

et le vecteur des forces d'inertie  $\mathbb{M}\mathbf{x}$  correspondant est

$$\mathbb{M}\mathbf{x}_{(2)} = [I_1 \quad -I_1]$$

ce qui traduit le fait que les couples d'inertie associés aux mouvement des disques 1 et 2, du fait de l'absence d'appui, sont nécessairement égaux et opposés de manière à réaliser l'équilibre dynamique au sens de d'Alembert.

*Exemple de la poutre console*

Reprenant les matrices de raideur et de masse calculées pour le modèle simplifié de poutre console de la figure 3.2.2, on obtient les valeurs propres

$$\omega^2 = \frac{96}{7} \frac{EI}{m\ell^4} [10 \pm \sqrt{86}] = \lambda \tag{3.3.15}$$

soit

$$\omega_1^2 = 9.962 \frac{EI}{m\ell^4} \quad \text{et} \quad \omega_2^2 = 264.3 \frac{EI}{m\ell^4}$$

pour lesquelles on calcule les modes correspondants en résolvant l'équation

$$\begin{bmatrix} 16 - 2\lambda & -5 \\ -5 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

avec le paramètre  $\lambda$  défini par l'équation (3.2.15). On obtient

$$\mathbf{x}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0.327 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.654 \end{bmatrix}$$

L'examen des formes correspondantes (figure 3.3.2) montre que la déformée du premier mode présente une pente assez continue alors que le deuxième mode comporte un noeud de vibration.

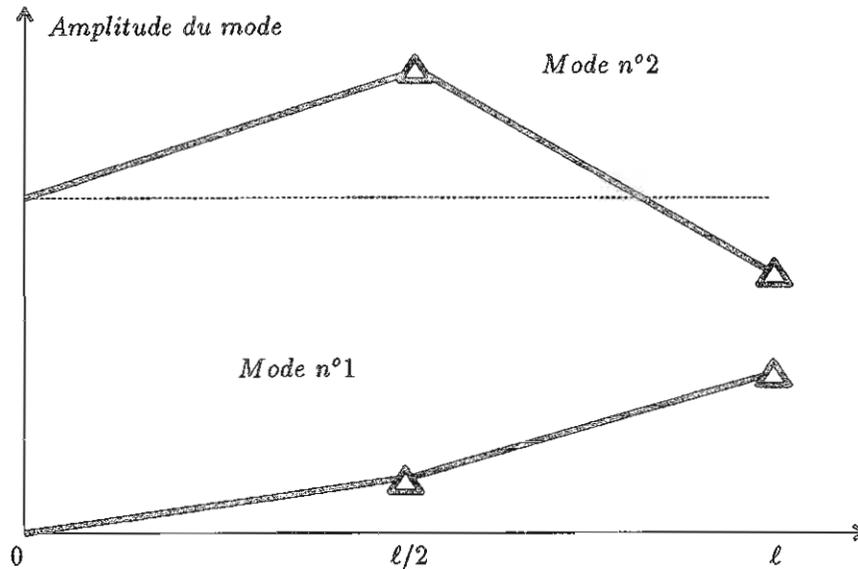


figure 3.3.2  
Modes de vibration du modèle poutre-console à 2 d.d.l.

### 3.4 Transformation de coordonnées - Couplage entre degrés de liberté

Considérons le modèle simplifié de la figure 3.3.1 permettant l'étude des vibrations d'une automobile dans le sens vertical. La suspension est représentée par des amortisseurs  $k_1$  et  $k_2$  et son amortissement est négligé. De plus, la raideur des pneus étant très grande vis-à-vis de celle de la suspension, on suppose en première approximation que la masse des essieux est solidaire du sol.

On note par  $m$  la masse du véhicule et  $I_c$  son moment d'inertie autour du centre de masse. Les essieux avant et arrière sont respectivement aux distances  $a$  et  $b$  de celui-ci. La translation verticale  $x(t)$  est mesurée à partir de la configuration d'équilibre, de telle sorte que le poids de la voiture soit équilibré par la compression initiale dans les ressorts de suspension.

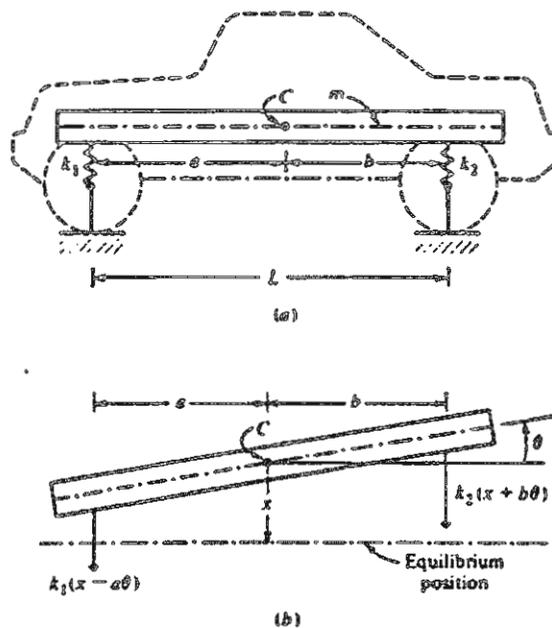


figure 3.4.1  
Schéma de principe d'une suspension de voiture modèle à deux d.d.l.

Deux choix de degrés de liberté sont possibles pour calculer les énergies potentielle et cinétique du système.

Si on utilise le déplacement  $x$  et la rotation  $\theta$  du centre de gravité

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{2}k_1(x - a\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(x + b\theta)^2 \\ \mathcal{T} &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_c\dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

il en résulte le système d'équations

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1a + k_2b \\ -k_1a + k_2b & k_1a^2 + k_2b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.4.2)$$

Si, d'autre part on utilise les déplacements  $x_1$  et  $x_2$  des essieux avant et arrière

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 \\ \mathcal{T} &= \frac{1}{2}m\left(\frac{bx_1 + ax_2}{a+b}\right)^2 + \frac{1}{2}I_c\left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{a+b}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Les équations du système s'écrivent alors

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{mb^2 + I_c}{(a+b)^2} & \frac{mab - I_c}{(a+b)^2} \\ \frac{mab - I_c}{(a+b)^2} & \frac{ma^2 + I_c}{(a+b)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.4.4)$$

Les deux systèmes d'équations décrivent le comportement du même système mécanique; toutefois, on observe que dans le premier cas le couplage entre ddl intervient uniquement à travers les raideurs, alors que dans le second cas le couplage se fait par les inerties. Le couplage entre ddl est donc toujours fonction du choix des degrés de liberté ; le découplage total entre degrés de liberté est obtenu lorsque ceux-ci sont définis dans la base des modes propres. On peut aisément réaliser un découplage total dans le premier cas en ajustant les raideurs d'essieux de telle sorte que

$$k_1a = k_2b$$

Dans ce cas, la caisse vibre naturellement en translation pure à la fréquence

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

et possède également un mode de rotation pure à la fréquence

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1a^2 + k_2b^2}{I_c}}$$

### 3.5 Le phénomène de battement

Un phénomène très intéressant est le *battement* observé lorsque les fréquences propres du système à deux degrés de liberté ont des valeurs très proches. Pour l'illustrer, considérons le cas de deux pendules identiques connectés par un ressort comme le montre la figure 3.5.1, pour lequel on calcule successivement

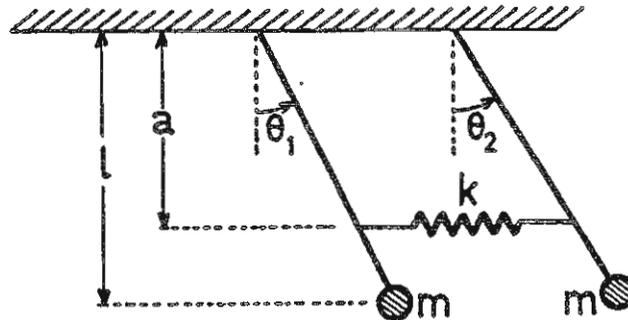


figure 3.5.1  
Système à deux degrés de liberté faiblement couplés.

- l'énergie cinétique

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m \ell^2 [\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2] \quad (3.5.1)$$

- l'énergie potentielle

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} k a^2 (\theta_2 - \theta_1)^2 + m g \ell (2 - \cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

soit pour de faibles amplitudes de mouvement

$$\mathcal{V} \simeq \frac{1}{2} k a^2 (\theta_2 - \theta_1)^2 + \frac{1}{2} m g \ell (\theta_1^2 + \theta_2^2) \quad (3.5.2)$$

Ses équations du mouvement résultent immédiatement de l'application des équations de Lagrange

$$\begin{bmatrix} m \ell^2 & 0 \\ 0 & m \ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m g \ell + k a^2 & -k a^2 \\ -k a^2 & m g \ell + k a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = 0$$

et l'équation aux valeurs propres

$$\begin{bmatrix} m g \ell + k a^2 - \omega^2 m \ell^2 & -k a^2 \\ -k a^2 & m g \ell + k a^2 - \omega^2 m \ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.5.3)$$

donne lieu à l'équation aux fréquences

$$m g \ell + k a^2 - \omega^2 m \ell^2 = \pm k a^2$$

On en déduit les deux fréquences naturelles

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + 2 \frac{k a^2}{m \ell^2}} \quad (3.5.4)$$

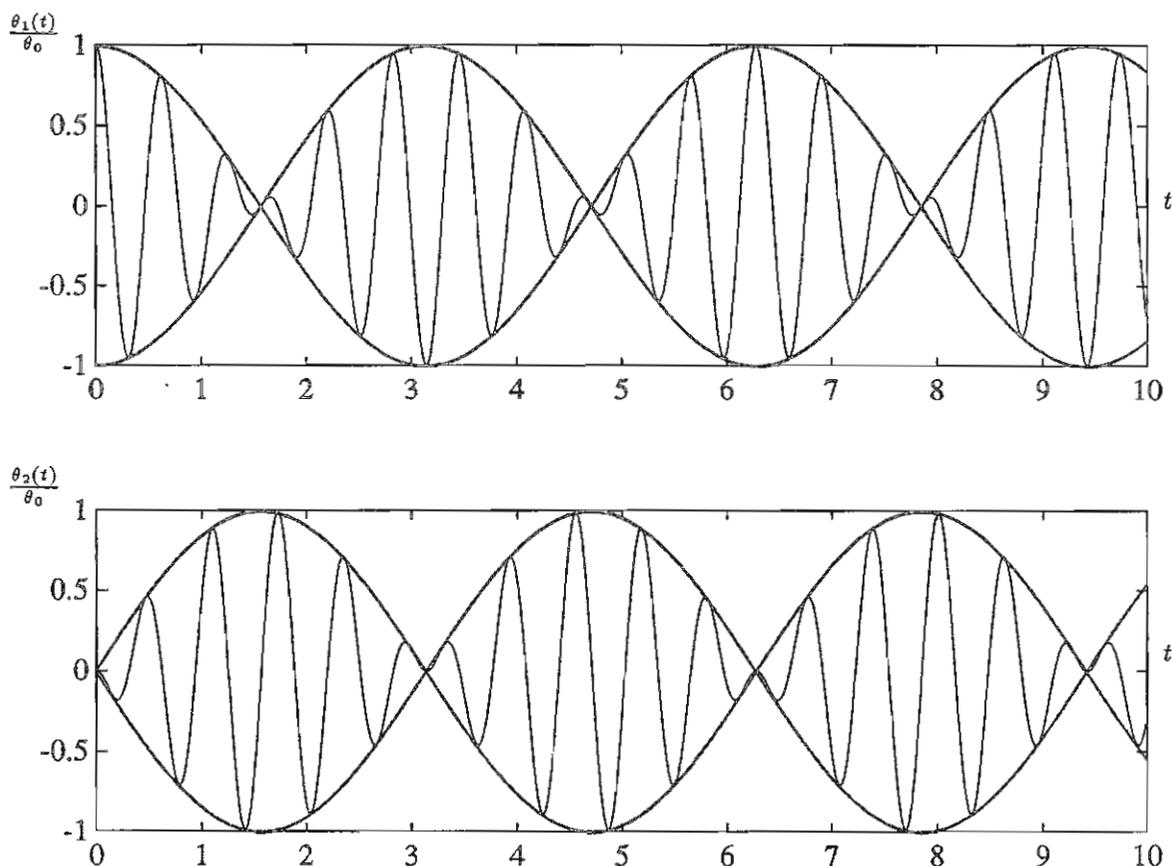


figure 3.5.2

Phénomène de battement ( $\omega_1 = 11 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_2 = 9 \text{ rad/s}$ )

Les modes correspondants sont obtenus par substitution de (3.5.2) dans l'équation du mouvement (3.5.1)

$$\mathbf{x}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

On voit que dans le premier mode, les deux pendules oscillent en phase, dont sans aucune compression du ressort et sans changement de fréquence, alors que dans le deuxième mode les pendules sont en opposition de phase.

Le mouvement libre admet, compte tenu de (3.3.12), la solution générale

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t \\ \theta_2(t) &= A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t - A_2 \cos \omega_2 t - B_2 \sin \omega_2 t \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Calculons les coefficients  $A_i$  et  $B_i$  pour les conditions initiales

$$\theta_1(0) = \theta_0, \quad \theta_2(0) = \dot{\theta}_2(0) = \dot{\theta}_1(0) = 0$$

Les équations (3.5.5) deviennent

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{1}{2} \theta_0 [\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t] = \theta_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \\ \theta_2(t) &= \frac{1}{2} \theta_0 [\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t] = \theta_0 \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où le couplage par le ressort est très faible, on peut définir une fréquence moyenne et un écart de fréquence

$$\begin{aligned} \omega_m &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \simeq \sqrt{\frac{g}{\ell}} + \frac{1}{2} \frac{k}{m} \frac{a^2}{\sqrt{g\ell^3}} \\ \frac{1}{2} \Delta\omega &= \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \simeq \frac{1}{2} \frac{k}{m} \frac{a^2}{\sqrt{g\ell^3}} \end{aligned}$$

et le mouvement prend la forme

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \theta_0 \cos \frac{1}{2} \Delta\omega t \cdot \cos \omega_m t \\ \theta_2(t) &= \theta_0 \sin \frac{1}{2} \Delta\omega t \cdot \sin \omega_m t \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Il s'agit donc d'un mouvement de fréquence  $\omega_m$  dont l'amplitude est modulée par une fonction harmonique de fréquence  $\Delta\omega/2$ ,  $\Delta\omega$  étant la fréquence du battement.

Le phénomène de battement ainsi mis en évidence est caractérisé par un échange périodique d'énergie entre les deux degrés de liberté puisque l'on constate que l'amplitude de l'un est maximale lorsque l'autre est pratiquement au repos.

### 3.6 La prise en compte des forces de dissipation

Considérons à présent le même système, doté d'un amortissement réparti de même manière que la raideur.

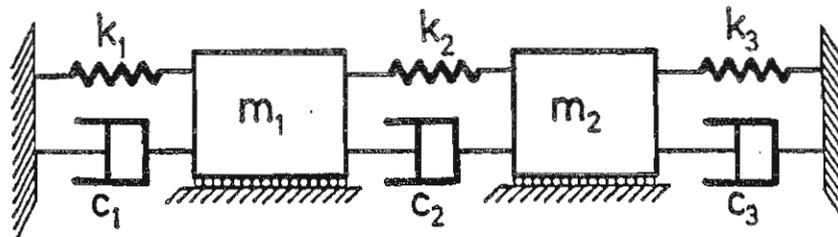


figure 3.6.1  
Système dissipatif à deux d.d.l.

On peut adopter l'hypothèse de Rayleigh [1] selon laquelle la dissipation est proportionnelle à la vitesse de déformation et calculer une fonction de dissipation quadratique dans les vitesses généralisées

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.6.1)$$

dont on déduit les forces généralisées de dissipation par

$$Q_d = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (3.6.2)$$

Pour le système de la figure 3.6.1, la fonction de dissipation de Rayleigh s'écrira

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} c_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2 + \frac{1}{2} c_3 \dot{q}_2^2$$

d'où la *matrice d'amortissement*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad (3.6.3)$$

Tout comme la matrice de raideur, elle est symétrique et définie positive, ce qui traduit le fait que le système est purement dissipatif.

Ecrivant les équations de Lagrange sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{Q}(t) \quad (3.6.4)$$

il vient les *équations générales* décrivant le mouvement du *système amorti*

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{p}(t) \quad (3.6.5)$$

où le terme

- $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}$  représente les forces d'inertie,
- $\mathbf{K} \mathbf{q}$  représente les forces de rappel élastique,
- $\mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}$  représente les forces de dissipation,
- $\mathbf{p}(t)$  représente la sollicitation extérieure.

Le système différentiel linéaire à coefficients constants (3.7.1) comporte  $n$  équations du second ordre à  $n$  inconnues. Sa réponse dépend donc des conditions initiales sur le déplacement et la vitesse en  $t = 0$ , notées  $\mathbf{q}_0$  et  $\dot{\mathbf{q}}_0$ .

### 3.7 Vibrations libres du système amorti

En l'absence de forces extérieures, on obtient les équations du mouvement régissant les vibrations libres du système amorti

$$\mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} = 0 \quad (3.7.1)$$

dont on exprime la solution générale sous la forme

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{x} e^{\lambda t}$$

La substitution de celle-ci dans l'équation (3.7.1) fournit l'expression du problème aux valeurs propres

$$\begin{bmatrix} k_{11} + \lambda b_{11} + \lambda^2 m_{11} & k_{12} + \lambda b_{12} + \lambda^2 m_{12} \\ k_{12} + \lambda b_{12} + \lambda^2 m_{12} & k_{22} + \lambda b_{22} + \lambda^2 m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.7.2)$$

ce qui donne lieu à l'équation caractéristique du quatrième ordre en  $\lambda$  à coefficients réels. Il est possible de montrer que pour un système purement dissipatif, propriété qui se traduit par la condition que  $\mathbf{B}$  est définie positive, les racines sont soit réelles négatives, soit complexes conjuguées à partie réelle négative, selon que le mode correspondant est faiblement ou fortement amorti. Un calcul long et fastidieux permettrait de vérifier ce résultat par le critère de Routh-Hurwitz. Toutefois, une preuve beaucoup plus aisée en sera obtenue lors

de l'étude détaillée des systèmes à  $n$  degrés de liberté. Dans le cas d'un amortissement faible, on peut les exprimer sous la forme complexe

$$\left. \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix} \right\} = -\mu_1 \pm i\omega'_1 \quad \text{et} \quad \left. \begin{matrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{matrix} \right\} = -\mu_2 \pm i\omega'_2 \quad \mu_1, \mu_2 > 0 \quad (3.7.3)$$

où  $\omega'_j$  désigne les fréquences amorties, inférieures à celles du système conservatif associé.

Pour exprimer les modes correspondants, on les représente sous la forme

$$\mathbf{x}^{(j)} = \begin{bmatrix} 1 \\ r_j \end{bmatrix} \quad (3.7.4)$$

le rapport  $r_j$  entre composantes étant calculé par l'une ou l'autre des relations

$$r_j = \frac{k_{11} + \lambda_j b_{11} + \lambda_j^2 m_{11}}{k_{12} + \lambda_j b_{12} + \lambda_j^2 m_{12}} = \frac{k_{12} + \lambda_j b_{12} + \lambda_j^2 m_{12}}{k_{22} + \lambda_j b_{22} + \lambda_j^2 m_{22}} \quad (3.7.5)$$

de telle sorte que les modes propres du système amorti soient eux aussi complexes conjugués

$$\left. \begin{matrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \end{matrix} \right\} = \mathbf{y}^{(1)} \pm i\mathbf{z}^{(1)} \quad \text{et} \quad \left. \begin{matrix} \mathbf{x}^{(3)} \\ \mathbf{x}^{(4)} \end{matrix} \right\} = \mathbf{y}^{(2)} \pm i\mathbf{z}^{(2)} \quad (3.7.6)$$

On peut donc exprimer la réponse libre du système amorti sous la forme

$$\mathbf{q}(t) = e^{-\mu_1 t} [C_1 \mathbf{x}^{(1)} e^{i\omega'_1 t} + C_2 \mathbf{x}^{(2)} e^{-i\omega'_1 t}] + e^{-\mu_2 t} [C_3 \mathbf{x}^{(3)} e^{i\omega'_2 t} + C_4 \mathbf{x}^{(4)} e^{-i\omega'_2 t}]$$

Les modes étant eux-mêmes de forme complexe, la contribution de chacun d'eux à la solution temporelle comporte un déphasage entre composantes. On peut l'exprimer composante par composante sous la forme réelle

$$\begin{aligned} q_1(t) &= A_{11} e^{-\mu_1 t} \cos(\omega_1' t + \Phi_{11}) + A_{12} e^{-\mu_2 t} \cos(\omega_2' t + \Phi_{12}) \\ q_2(t) &= A_{21} e^{-\mu_1 t} \cos(\omega_1' t + \Phi_{21}) + A_{22} e^{-\mu_2 t} \cos(\omega_2' t + \Phi_{22}) \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

Un cas particulier important est celui de l'*amortissement proportionnel* caractérisé par une matrice d'amortissement de la forme

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M} \quad (3.7.8)$$

Retournant à l'équation aux valeurs propres (3.7.2), on peut mettre celle-ci sous la forme

$$dtm \begin{bmatrix} k_{11}(1 + \alpha\lambda) + m_{11}(\beta\lambda + \lambda^2) & k_{12}(1 + \alpha\lambda) + m_{12}(\beta\lambda + \lambda^2) \\ k_{12}(1 + \alpha\lambda) + m_{12}(\beta\lambda + \lambda^2) & k_{22}(1 + \alpha\lambda) + m_{22}(\beta\lambda + \lambda^2) \end{bmatrix} = 0$$

et sa résolution est immédiate à condition d'opérer le changement de variables

$$\mu = \frac{\beta\lambda + \lambda^2}{1 + \alpha\lambda} \quad (3.7.9)$$

et de comparer le système ainsi obtenu au système conservatif (3.3.8) associé. On obtient la correspondance entre racines

$$\lambda_j^2 + (\beta + \alpha\omega_j^2)\lambda_j + \omega_j^2 = 0 \quad (3.7.10)$$

et les modes propres coïncident dans ce cas avec ceux du système conservatif. Le facteur  $\beta + \alpha\omega^2$  peut être considéré comme un facteur d'amortissement attaché au mode et donne lieu à un *taux d'amortissement critique modal*

$$\varepsilon_j = \frac{1}{2} \left( \alpha\omega_j + \frac{\beta}{\omega_j} \right) \quad (3.7.11)$$

en terme duquel on calcule les racines

$$\lambda_j = \omega_j (-\varepsilon_j \pm i\sqrt{1 - \varepsilon_j^2}) \quad (3.7.12)$$

La solution vibrations libres correspondante

$$\mathbf{q}(t) = C_1 e^{-\varepsilon_1 \omega_1 t} \cos(\sqrt{1 - \varepsilon_1^2} \omega_1 t + \Phi_1) \mathbf{x}^{(1)} + C_2 e^{-\varepsilon_2 \omega_2 t} \cos(\sqrt{1 - \varepsilon_2^2} \omega_2 t + \Phi_2) \mathbf{x}^{(2)} \quad (3.7.13)$$

ne fait plus intervenir de déphasage entre différentes composantes d'une même contribution modale à la solution.

L'hypothèse d'amortissement proportionnel ainsi introduite remonte à Rayleigh [1]. Elle a été reprise et généralisée notamment par Caughey [2] et est largement utilisée dans l'étude des systèmes faiblement dissipatifs pour lesquels on peut sans grande erreur assimiler les modes propres du système amorti à ceux du système conservatif et caractériser la dissipation par le coefficient d'amortissement de chacun des deux modes.

### 3.8 Réponse forcée

Retournons à l'équation (3.6.5) décrivant le mouvement du système amorti et considérons le cas d'une excitation harmonique

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \mathbf{f} e^{i\omega t} \quad (3.8.1)$$

La réponse forcée harmonique s'exprime sous la forme correspondante

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \mathbf{x} e^{i\omega t} \quad (3.8.2)$$

où  $x_1$  et  $x_2$  sont des amplitudes complexes de mouvement qui vérifient l'équation

$$[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (3.8.3)$$

La matrice

$$\mathbf{Z}(\omega) = \mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \quad (3.8.4)$$

de terme général

$$z_{ij}(\omega) = k_{ij} + i\omega c_{ij} - \omega^2 m_{ij}$$

est la matrice des impédances complexes du système et son inverse, qui fournit  $\mathbf{B}$  les amplitudes de déplacement en fonction de celles de l'excitation,

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{Z}^{-1}(\omega) \quad (3.8.5)$$

est la matrice des coefficients d'influence dynamiques ; on obtient

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{1}{\det[\mathbf{Z}(\omega)]} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{22}(\omega) & -\mathbf{Z}_{12}(\omega) \\ -\mathbf{Z}_{12}(\omega) & \mathbf{Z}_{11}(\omega) \end{bmatrix}$$

avec, en fonction des solutions propres du système libre, l'expression du déterminant

$$\det[\mathbf{Z}(\omega)] = m_{11}m_{22}(\mu_1^2 + \omega_1^2 + 2i\omega\mu_1 - \omega^2)(\mu_2^2 + \omega_2^2 + 2i\omega\mu_2 - \omega^2)$$

En particulier, lorsque le système est exempt d'amortissement, la matrice des coefficients d'influence dynamiques perd son caractère complexe et admet l'expression explicite

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{1}{m_{11}m_{22}(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)} \begin{bmatrix} k_{22} - \omega^2 m_{22} & -k_{12} + \omega^2 m_{12} \\ -k_{12} + \omega^2 m_{12} & k_{11} - \omega^2 m_{11} \end{bmatrix}$$

Un coefficient d'influence principal tel que  $H_{11}(\omega)$  prend l'allure de la figure (3.8.1). Il montre l'apparition d'une résonance pour chacune des fréquences propres  $\omega_1^2$  et  $\omega_2^2$  du système. La fréquence d'antirésonance  $\omega_a^2 = k_{22}/m_{22}$  est d'autre part caractérisée par l'insensibilité du déplacement  $x_1$  à l'excitation qui lui est appliquée.

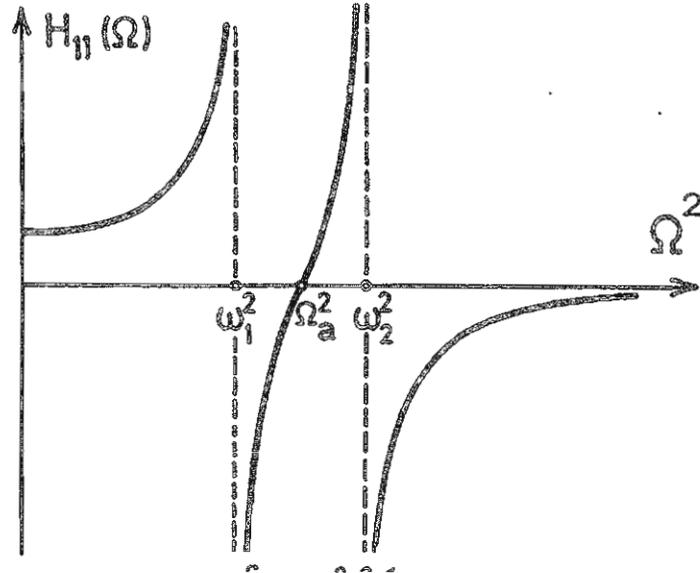


figure 3.8.1  
Evolution d'un coefficient d'influence dynamique principal avec la fréquence (système non amorti)

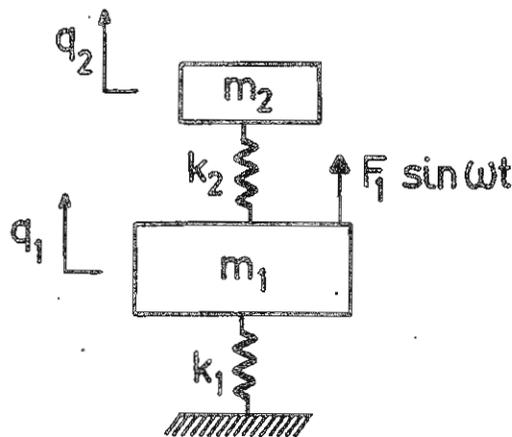


figure 3.9.1  
Schéma de principe de l'amortisseur dynamique non dissipatif

### 3.9 Les amortisseurs dynamiques de vibration non dissipatifs

Soit une masse  $m_1$ , montée sur une suspension de raideur  $k_1$  : le système vibre naturellement à la fréquence

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$

et entre en résonance lorsqu'il est sollicité par une force extérieure de même fréquence  $f(t) = F_1 \sin \omega_n t$ .

La résonance de ce système peut être modifiée de deux manières : soit par modification de la masse et/ou la raideur de la suspension, soit par addition d'un deuxième degré de liberté au système.

Considérons le système de la figure 3.9.1 modifié par addition d'une masse  $m_2$  par l'intermédiaire d'un ressort  $k_2$ .

Les équations régissant la réponse harmonique du système combiné deviennent

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.9.1}$$

dont on déduit les amplitudes de réponse des deux masses

$$x_1 = \frac{(k_2 - \omega^2 m_2) F_1}{(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 - \omega^2 m_2) - k_2^2}$$

$$x_2 = \frac{k_2 F_1}{(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 - \omega^2 m_2) - k_2^2}$$

On peut les écrire sous forme non dimensionnelle avec les définitions suivantes

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad \text{la fréquence naturelle du système primaire}$$

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad \text{la fréquence naturelle du système additionnel}$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} \quad \text{la masse additionnelle relative}$$

$$x_{st} = \frac{F_1}{k_1} \quad \text{la déflection statique du système primaire}$$

on obtient

$$x_1 = x_{st} \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}}{[1 + \mu(\frac{\omega_a}{\omega_n})^2 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2][1 - (\frac{\omega}{\omega_a})^2] - \mu(\frac{\omega_a}{\omega_n})^2} \quad (3.9.2)$$

$$x_2 = x_{st} \frac{1}{[1 + \mu(\frac{\omega_a}{\omega_n})^2 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2][1 - (\frac{\omega}{\omega_a})^2] - \mu(\frac{\omega_a}{\omega_n})^2}$$

On constate que l'amortisseur remplit sa fonction pour la fréquence d'addition  $\omega = \omega_a$ . Il vient dans ce cas

$$x_1 = 0 \quad x_2 = x_{st} \frac{-1}{\mu(\frac{\omega_a}{\omega_n})^2} = \frac{-F_1}{k_2}$$

L'égalité  $k_2 x_2 = -F_1$  montre que l'amortisseur exerce sur la masse principale  $m_1$  une force égale et opposée à la force appliquée. L'amplitude du mouvement de la masse secondaire est inversement proportionnelle à la masse elle-même.

Pour des fréquences de fonctionnement voisines de  $\omega_n = \omega_a$ , on obtient un diagramme dont l'allure est comparée à celle du système à 1 ddl par la figure 3.9.2.

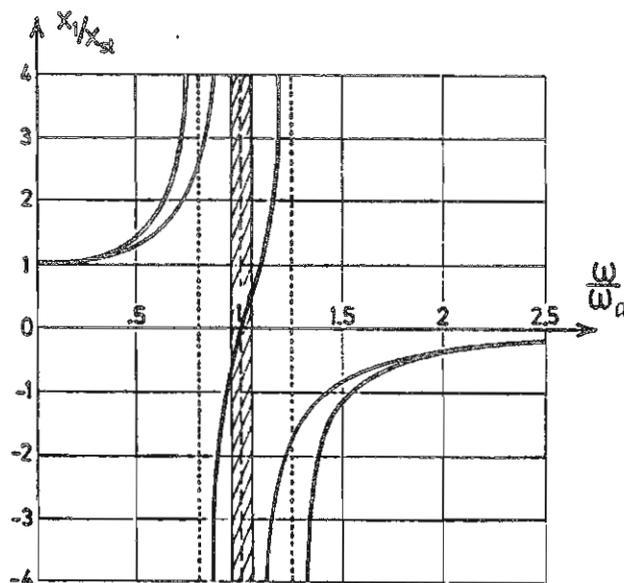


figure 3.9.2  
Amplitude déplacement de la masse principale  
en fonction de  $\omega$  dans le cas  $\omega_n = \omega_a$  et  $\mu = 0.2$

A noter que la masse additionnelle injecte une seconde fréquence de résonance dans le système et que l'amortissement n'est effectif que dans une plage de fréquence très étroite.

Si d'autre part on fait varier la masse additionnelle relative, on peut encore calculer l'évolution des fréquences du système modifié dans le cas  $\omega_n = \omega_a$ .

$$(1 + \mu - \frac{\omega^2}{\omega_a^2})(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}) - \mu = 0$$

soit

$$\omega^2 = \omega_a^2 \left[ 1 + \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\mu + \frac{\mu^2}{4}} \right] \tag{3.9.3}$$

Leur évolution est représentée par le diagramme de la figure 3.9.3.

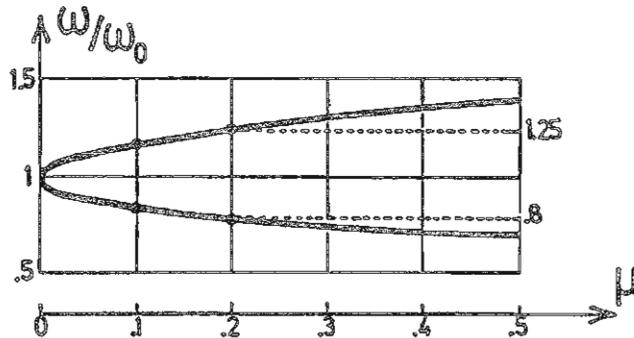


figure 3.9.3  
Evolution des fréquences propres  $\omega_1$  et  $\omega_2$   
en fonction de la masse additionnelle

Dans le cas plus général où  $\omega_a \neq \omega_n$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  peuvent être évalués par la relation

$$\omega^2 = \frac{\omega_a^2(1 + \mu) + \omega_n^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_a^2(1 + \mu) - \omega_n^2}{2}\right)^2 + \mu\omega_a^2\omega_n^2} \tag{3.9.4}$$

qui donne d'ailleurs lieu à une construction graphique analogue au cerche de Mohr.

### 3.10 Les amortisseurs dynamiques de vibration dissipatifs

L'amortisseur dynamique, en l'absence de dissipation, n'est que d'un intérêt très limité en raison de sa sélectivité en fréquence. Nous allons voir comment et dans quelle mesure son efficacité peut être étendue à une large gamme de fréquences par introduction d'une dissipation approprié.

Soit donc le système de la figure 3.10.1 dans lequel le mouvement relatif des masses  $m_1$  et  $m_2$  est amorti par un amortisseur visqueux de constante  $c$ .

Les équations régissant sa réponse forcée s'écrivent

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 e^{i\omega t} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.10.1}$$

Posant

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t} \tag{3.10.2}$$

les amplitudes complexes de réponse sont solutions de

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 + i\omega c - \omega^2 m_1 & -(k_2 + i\omega c) \\ (k_2 + i\omega c) & k_2 + i\omega c - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.10.3}$$

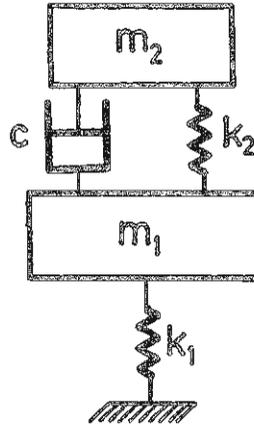


figure 3.10.1

Schéma de principe de l'amortisseur dynamique dissipatif

soit

$$x_1 = \frac{(k_2 + i\omega c - \omega^2 m_2) F_1}{[k_1 + k_2 + i\omega c - \omega^2 m_1][k_2 + i\omega c - \omega^2 m_2] - [k_2 + i\omega c]^2} \quad (3.10.4)$$

$$x_2 = \frac{(k_2 + i\omega c) F_1}{[k_1 + k_2 + i\omega c - \omega^2 m_1][k_2 + i\omega c - \omega^2 m_2] - [k_2 + i\omega c]^2}$$

Pour mettre la réponse de la masse principale sous la forme

$$\frac{x_1}{F_1} = \left| \frac{x_1}{F_1} \right| e^{i\phi}$$

on note que  $x = \frac{a+ib}{c+id}$  a pour module

$$|x| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}}$$

d'où

$$\left| \frac{x_1}{F_1} \right|^2 = \frac{(k_2 - \omega^2 m_2)^2 + \omega^2 c^2}{[(k_1 - \omega^2 m_1)(k_2 - \omega^2 m_2) - \omega^2 m_2 k_2]^2 + \omega^2 c^2 [k_1 - \omega^2 m_1 - \omega^2 m_2]^2} \quad (3.10.5)$$

On peut mettre l'expression (3.10.2) sous forme non dimensionnelle comme dans le cas non amorti en définissant

$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$	la fréquence naturelle du système primaire
$\omega_a = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$	la fréquence naturelle du système additionnel
$\mu = \frac{m_2}{m_1}$	la masse additionnelle relative
$x_{st} = \frac{F_1}{k_1}$	la déflexion statique du système primaire
$\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$	la fréquence d'excitation rapport�e à la fréquence de résonance du système primaire
$\alpha = \frac{\omega_a}{\omega_n}$	la fréquence d'addition rapport�e
$\zeta = \frac{c}{c_r}$	le pourcentage d'amortissement critique avec $c_{cr} = 2\sqrt{k_2 m_2} = 2\omega_a m_2$

Tous calculs faits, on obtient

$$\left( \frac{x_1}{x_{st}} \right)^2 = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\zeta\alpha\beta)^2}{[(1 - \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2) - \alpha^2\beta^2\mu]^2 + (2\zeta\alpha\beta)^2(1 - \beta^2 - \beta^2\mu)^2} \quad (3.10.6)$$

Dans le cas  $\mu = 1/20$  et  $\alpha = 1$ , le module de la réponse est représenté par la figure 3.10.2. Pour  $\zeta = 0$ , on retrouve la courbe de réponse de l'amortisseur dynamique non dissipatif et pour  $\zeta = \infty$ , le système dégénère en un oscillateur à un degré de liberté de masse  $m_1 + m_2$ .

On note l'existence de deux points fixes  $P$  et  $Q$ , c'est-à-dire indépendants de  $\zeta$ . Ils sont nécessairement solutions de

$$\frac{(2\alpha\beta)^2}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} = \frac{(2\alpha\beta)^2(1 - \beta^2 - \beta^2\mu)^2}{[(\alpha^2 - \beta^2)(1 - \beta^2) - \alpha^2\beta^2\mu]^2} \quad (3.10.7)$$

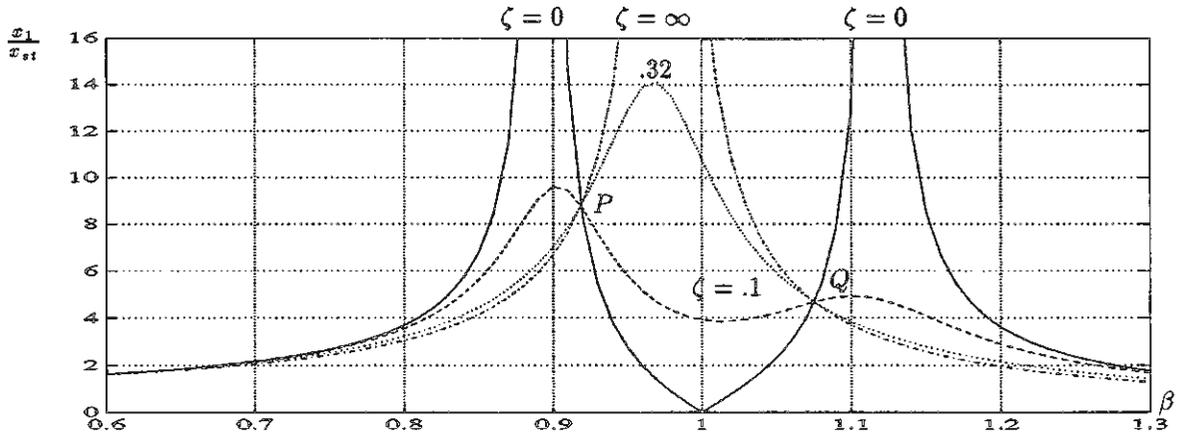


figure 3.10.2  
Réponse en fréquence de la masse principale  
en fonction de l'amortissement ( $\mu = 0.05, \alpha = 1$ )

On obtient les solutions

$$(2\alpha\beta)^2 = 0$$

$$\frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{(1 - \beta^2 - \beta^2\mu)}{(\alpha^2 - \beta^2)(1 - \beta^2) - \alpha^2\beta^2\mu} = 0$$

$$\frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{(1 - \beta^2 - \beta^2\mu)}{(\alpha^2 - \beta^2)(1 - \beta^2) - \alpha^2\beta^2\mu} = 0$$

De ces trois solutions, seule la deuxième correspond à une égalité non triviale; elle produit la relation

$$\beta^4(1 + \frac{\mu}{2}) - \beta^2(1 + \alpha^2 + \alpha^2\mu) + \alpha^2 = 0 \tag{3.10.8}$$

qui donne lieu à deux racines  $\beta_1$  et  $\beta_2$  correspondant à l'abscisse des points P et Q. L'ordonnée de ceux-ci est calculée en posant en particulier  $\zeta = \infty$ ; notant que  $\beta_1 < 1 < \beta_2$ , on obtient

$$\left(\frac{x_1}{x_{st}}\right)_P = \frac{1}{1 - \beta_1^2(1 + \mu)} \quad \text{et} \quad \left(\frac{x_1}{x_{st}}\right)_Q = \frac{1}{\beta_2^2(1 + \mu) - 1} \tag{3.10.9}$$

### 10.1 Réglage optimal

Notre objectif est de rendre minimale la réponse du système dans la plage de fréquence  $\omega \simeq \omega_a$ . Pour le réaliser, on impose en premier lieu aux deux pics de réponse, correspondant approximativement aux points P et Q, d'avoir la même ordonnée

$$\frac{1}{1 - \beta_1^2(1 + \mu)} = \frac{1}{\beta_2^2(1 + \mu) - 1}$$

soit

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{2}{1 + \mu} \tag{3.10.10}$$

Notant d'autre part que d'après (3.10.8)

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{1 + \alpha^2(1 + \mu)}{1 + \frac{\mu}{2}} \tag{3.10.11}$$

on déduit que l'amortisseur dynamique avec dissipation est réglé de façon optimale lorsque

$$\alpha = \alpha_{opt} = \frac{1}{1 + \mu} \tag{3.10.12}$$

La relation ci-dessus donne le rapport optimal à respecter entre la fr equance  $\omega_n$  du système primaire et la fr equance d'addition  $\omega_a$ . Par exemple, si la masse de l'amortisseur dynamique vaut 1/10 de la masse du système primaire, le réglage optimal correspond à la fr equance d'addition

$$\omega_a = \frac{1}{1+0.1} = 0.91\omega_n$$

### 10.2 Dissipation optimale

Pour calculer la dissipation optimale dans le système, on note qu'il est possible de choisir une valeur du paramètre d'amortissement telle que les points fixes  $P$  et  $Q$  coïncident pratiquement avec les points maxima correspondants.

Considérons la figure 3.10.3 qui correspond à un système avec amortisseur dynamique de masse  $\mu = 0.25$  r egl e de façon optimale.

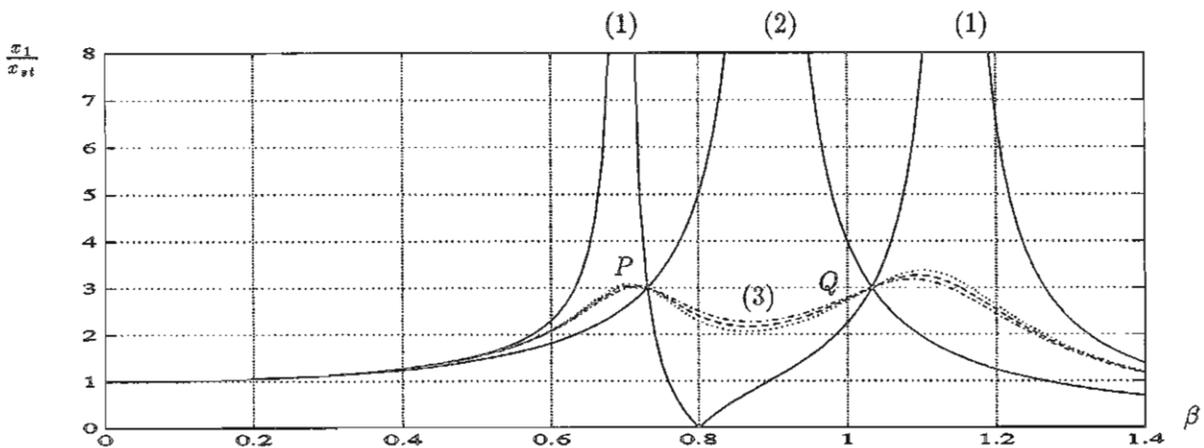


figure 3.10.3  
Recherche de l'amortissement optimal  $\mu = 0.25$

- La courbe (1) correspond au système non amorti.
- La courbe (2) correspond au cas  $\zeta = \infty$ .
- Les courbes (3) correspondent à un maximum plac e tour à tour aux points  $P$  et  $Q$ .

Si l'on calcule tour à tour les valeurs de  $\zeta^2$  donnant lieu à un maximum de réponse en exprimant pour  $\alpha = \alpha_{opt}$  les conditions

$$\left. \frac{\partial [\frac{x_1}{x_{st}}]^2}{\partial \beta^2} \right|_{\beta_1^2} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial [\frac{x_1}{x_{st}}]^2}{\partial \beta^2} \right|_{\beta_2^2} = 0 \quad (3.10.13)$$

on obtient deux conditions qui ne peuvent être r ealis es simultanément

$$\zeta_1^2 = \frac{\mu}{8(1+\mu)^3} \left( 3 - \sqrt{\frac{\mu}{\mu+2}} \right) \quad \text{et} \quad \zeta_2^2 = \frac{\mu}{8(1+\mu)^3} \left( 3 + \sqrt{\frac{\mu}{\mu+2}} \right)$$

On prendra donc comme valeur optimale approch e du pourcentage d'amortissement critique la valeur moyenne

$$\zeta_{opt}^2 = \frac{3\mu}{8(1+\mu)^3} \quad (3.10.14)$$

Si l'on reprend le cas d'un système où la masse de l'amortisseur vaut 1/10 de la masse du système initial, on trouve pour l'amortissement optimal la valeur relativement faible de  $\zeta = 0.168$ .

### 10.3 Amplitude maximale de réponse pour l'amortisseur optimal

Dans le cas où  $\alpha = \alpha_{opt}$ , les points fixes sont situés aux abscisses solutions de

$$\beta^4 - \frac{2\beta^2}{1+\mu} + \frac{2}{(2+\mu)(1+\mu)^2} = 0$$

soit

$$\beta^2 = \frac{1}{1+\mu} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{\mu}{2+\mu}} \right)$$

et l'ordonnée des points fixes  $P$  et  $Q$  vaut

$$\frac{x_1}{x_{st}} = \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}} \tag{3.10.15}$$

Elle est d'autant plus faible que la masse de l'amortisseur est grande. Dans le cas où  $\mu = 1/10$ , on obtient l'amplitude maximale de réponse

$$\frac{x_1}{x_{st}} = 4.6$$

10.4 Dissipation optimale dans un amortisseur dynamique connecté au système primaire sans ressort intermédiaire (Houdaille)

En général, l'amortisseur dynamique le plus efficace est obtenu lorsque la masse auxiliaire est connectée au système primaire par l'intermédiaire d'un ressort. Pour les systèmes en torsion, plutôt que de réaliser un amortisseur dynamique optimal, comme représenté par la figure 3.10.4., il peut s'avérer plus simple d'ajouter une masse couplée au système primaire uniquement. Le principe de montage correspond alors au schéma de la figure 3.10.5.

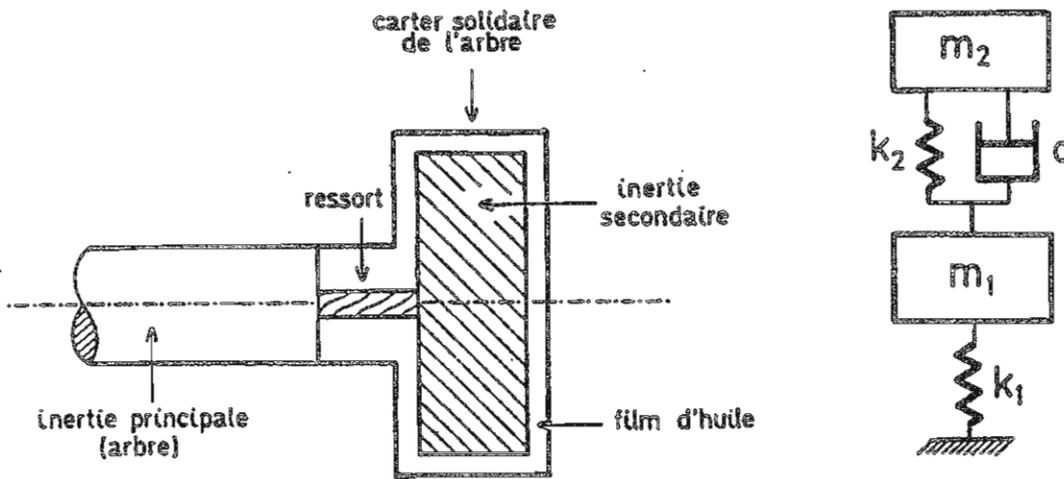


figure 3.10.4  
Amortisseur dynamique optimal

Le principe de cet amortisseur ne peut être mis à profit dans les systèmes en translation car la position relative de la masse primaire et de la masse secondaire n'est plus indifférente.

Faisant  $\alpha = 0$  et  $\zeta = \infty$  dans l'équation (3.10.6) tout en notant que le produit  $\zeta\alpha = \frac{c}{2\omega_n m_2} = \eta$  reste fini, il vient

$$\left(\frac{x_1}{x_{st}}\right)^2 = \frac{\beta^2 + 4\eta^2}{\beta^2(1-\beta^2)^2 + 4\eta^2[1-\beta^2(1+\mu)]^2} \tag{3.10.16}$$

L'amplitude de la réponse reste indépendante de  $\eta$  lorsque

$$\frac{4}{\beta^2} = \frac{4[1-\beta^2(1+\mu)]^2}{\beta^2(1-\beta^2)} \tag{3.10.17}$$

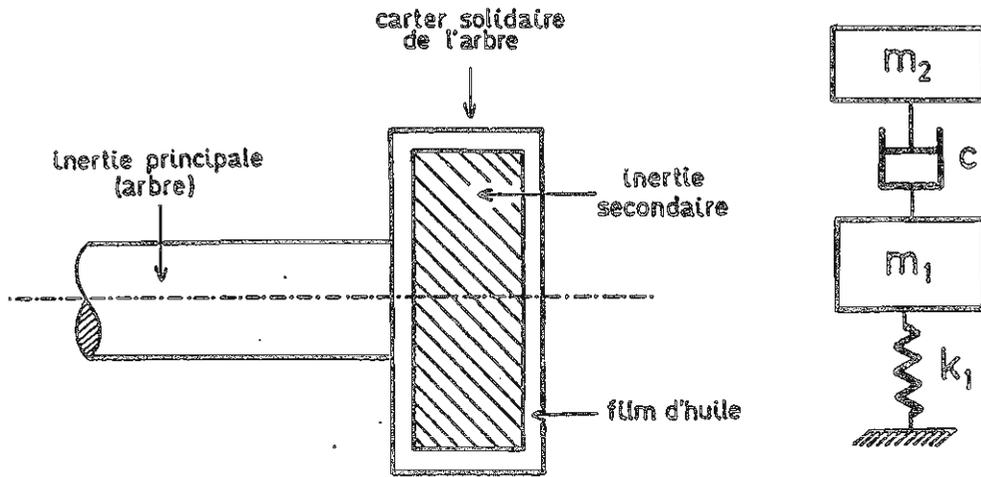


figure 3.10.5  
Amortisseur dynamique avec couplage par viscosité

d'où les points fixes de la solution

$$\beta^2 = 0 \quad \text{et} \quad \beta^2 = \frac{2}{2 + \mu}$$

Pour différentes valeurs du paramètre d'amortissement, la réponse prend l'allure représentée figure 3.10.6. Son amplitude au point fixe  $Q$  est égale à

$$\frac{x_1}{x_{st}} = \frac{2 + \mu}{\mu} \tag{3.10.18}$$

On obtient le taux de dissipation optimal correspondant

$$\eta_{opt} = \sqrt{\frac{1}{2(2 + \mu)(1 + \mu)}} \tag{3.10.19}$$

Lorsque la masse du système primaire est très grande vis-à-vis de celle de l'amortisseur visqueux, on obtient le résultat

$$\eta_{opt} = \frac{1}{2}$$

auquel on pourrait également aboutir par considérations énergétiques.

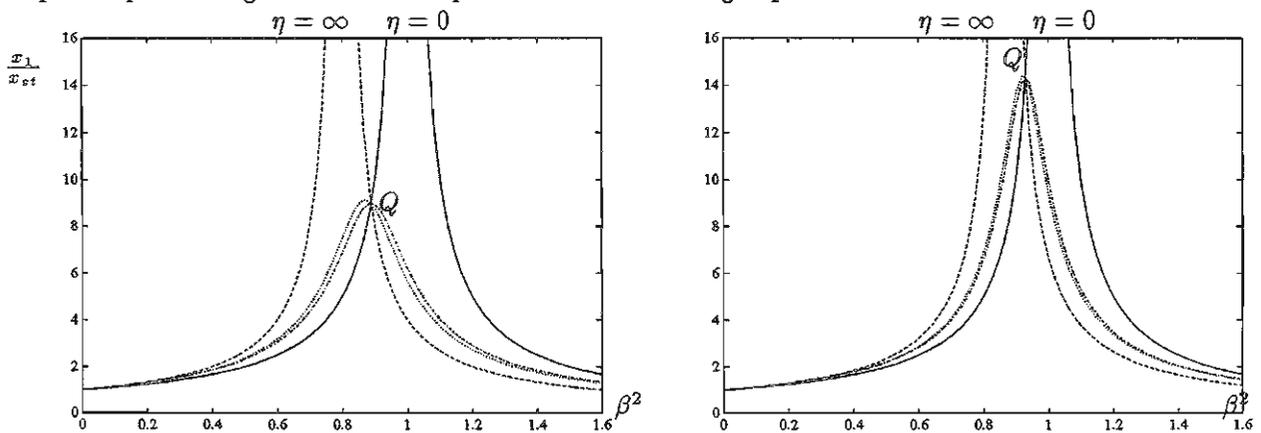


figure 3.10.6  
Réponse en fréquence de l'amortisseur dynamique avec couplage visqueux  
( $\mu = .25$  et  $\mu = .15$ )

On notera l'efficacité beaucoup moins grande de l'amortisseur dynamique avec couplage par viscosité : pour  $\mu = 1/10$  par exemple, on obtient  $\frac{x_1}{x_{st}} = 21$  au lieu de 4.6

Pour évaluer la constante d'amortissement dans un schéma de principe tel que celui de la figure 3.10.5, soit

- $\nu$  la viscosité dynamique du lubrifiant (en  $N\ s/m^2 = \text{pascal} \times \text{sec}$ )
- $e$  l'épaisseur du film d'huile
- $v$  la vitesse relative des surfaces lubrifiées
- $R$  le rayon du carter
- $L$  son épaisseur

La force de dissipation qui s'oppose au mouvement sur l'élément de surface de contact  $dS$  est donnée par

$$dF = \frac{\nu}{e} v dS \quad \text{avec} \quad v = r(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)$$

d'où le couple amortissant comportant la contribution des deux faces du disque et celle de la périphérie

$$C_d = 2 \int_0^R r dF + 2\pi R^2 L \nu \left(\frac{v}{e}\right)_{r=R} \quad (3.10.20)$$

Le premier terme donne la contribution

$$4\pi \frac{\nu}{e} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi \nu}{e} R^4 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)$$

d'où la constante totale de dissipation

$$c = \frac{\pi \nu}{e} R^4 \left(1 + 2 \frac{L}{R}\right) \quad \text{mesuré en N.m.sec/rad} \quad (3.10.21)$$

L'énergie mécanique dissipée se transformant en calories, on doit employer des huiles dont la viscosité est peu influencée par la température (huiles au silicone).

La figure 3.10.7 montre un mode de réalisation d'un tel amortisseur à fluide visqueux.

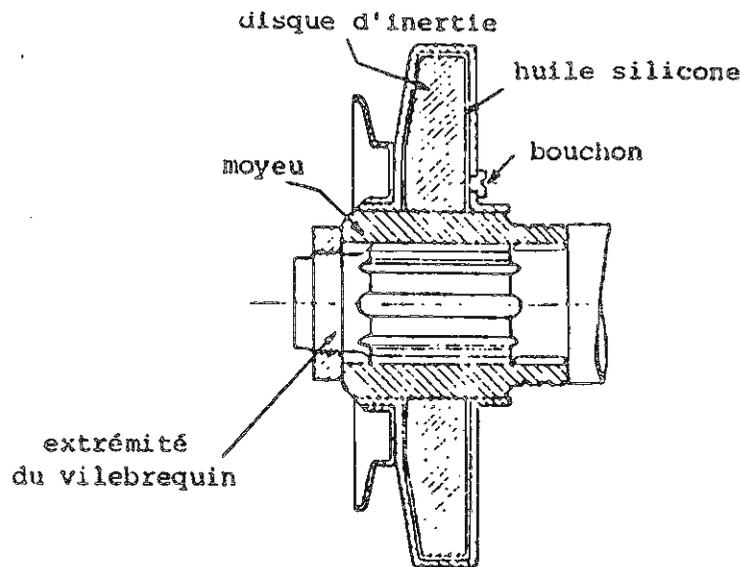


figure 3.10.7  
Amortisseur dynamique avec couplage par viscosité

On peut encore calculer l'inertie équivalente de l'amortisseur visqueux vue au travers de l'arbre en écrivant l'égalité des énergies cinétiques

$$\frac{1}{2} m_{eq} \dot{q}_1^2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 \quad (3.10.22)$$

soit

$$m_{eq} = m_2 \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = m_2 \left[\frac{i\omega c}{i\omega c - \omega^2 m_2}\right]^2$$

de module

$$|m_{eq}| = \frac{m_2}{1 + \left(\frac{\omega m_2}{c}\right)^2} = \frac{m_2}{1 + \left(\frac{\beta}{2\eta}\right)^2} \quad (3.10.23)$$

Lorsque l'amortisseur est r eg e de façon optimale, l'inertie de l'amortisseur, vue du système primaire, est égale à

$$|m_{eq}| = \frac{m_2}{2 + \mu}$$

### 10.5 Maximisation de la dissipation par viscosité dans un amortisseur dynamique

Lorsqu'on étudie un système comportant plusieurs degrés de liberté, la théorie précedente ne permet plus de dimensionner l'amortisseur dynamique destin e à l'équiper. On recourt alors au critère de la dissipation maximale par viscosité dans le système auxiliaire.

Supposons que l'amplitude du mouvement du système primaire ne soit pas affectée par le mouvement de la masse secondaire. On peut alors calculer la dissipation d'énergie dans le système auxiliaire

$$\mathcal{W}_d = \oint c(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)d(q_2 - q_1) \quad (3.10.24)$$

soit en mouvement harmonique

$$\mathcal{W}_d = \pi c \omega |x_2 - x_1|^2 \quad (3.10.25)$$

avec les rapports d'amplitude complexe de mouvement

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{k_2 + i\omega c}{k_2 + i\omega c - \omega^2 m_2} \quad (3.10.26)$$

d'où

$$x_2 - x_1 = \frac{\omega^2 m_2}{k_2 + i\omega c - \omega^2 m_2} x_1$$

et

$$\mathcal{W}_d = \frac{\pi c \omega x_1^2 m_2^2 \omega^4}{(k_2 - \omega^2 m_2)^2 + \omega^2 c^2} \quad (3.10.27)$$

Si on se limite au cas de l'amortisseur à couplage visqueux, la condition  $\frac{\partial \mathcal{W}_d}{\partial c} = 0$  fournit la constante d'amortissement

$$c_{opt} = m_2 \omega \quad (3.10.28)$$

qui donne lieu à l'absorption maximale d'énergie à la fréquence  $\omega$ . Ce résultat est cohérent avec le résultat  $\eta_{opt} \simeq \frac{1}{2}$  obtenu précedemment.

### 10.6 Amortisseur dynamique avec frottement sec

Dans l'amortisseur de Lanchester, l'amortissement est introduit par frottement entre surfaces en contact. La figure ci-dessous en montre une réalisation industrielle.

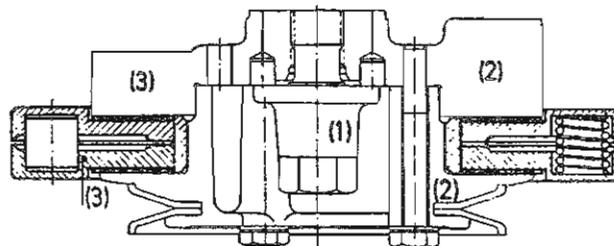


figure 9.10.8

Amortisseur dynamique à frottement sec de Lanchester

On cale sur l'arbre soumis à vibration de torsion un moyeu (1) portant deux couronnes (2) garnies d'un matériau de friction (Ferodo). Deux disques (3) d'inertie  $I$  sont montés librement sur l'arbre et pressés contre le moyeu par l'intermédiaire d'un ressort  $k$ .

L'énergie dissipée par friction, lorsque le moyeu vibre en torsion, varie en fonction de la pression sur les surfaces en contact. Si les ressorts sont fortement comprimés, le couple de friction est tel que les disques sont solidaires du moyeu. Si la pression de contact est nulle, par contre, le couple de friction est nul. Dans ces deux cas extrêmes, la dissipation par friction est nulle. La dissipation par friction se produit pour des valeurs intermédiaires du couple de friction. D'où l'évolution de l'énergie dissipée en fonction de celle du couple de friction  $C_f$  (figure 3.10.9).

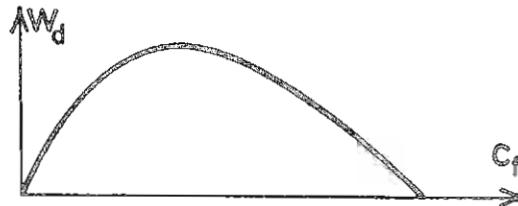


figure 3.10.9  
Energie dissipée dans un amortisseur Lanchester en fonction du couple de frottement  $C_f$

Considérons ensuite la courbe de vitesse angulaire de ce système en fonction du temps pour une valeur intermédiaire de  $C_f$  :

- la vitesse angulaire du moyeu varie de façon sinusoïdale autour d'une vitesse constante  $\Omega$  ;
- les disques libres étant soumis à un couple de frottement constant, leur accélération est constante et leur vitesse varie linéairement.

D'où la vitesse des disques libres croît aussi longtemps qu'elle reste inférieure à celle du moyeu. Le sens du couple est renversé dès que la vitesse du moyeu retombe en dessous de celle des disques. Il en résulte le diagramme de la figure 3.10.10.

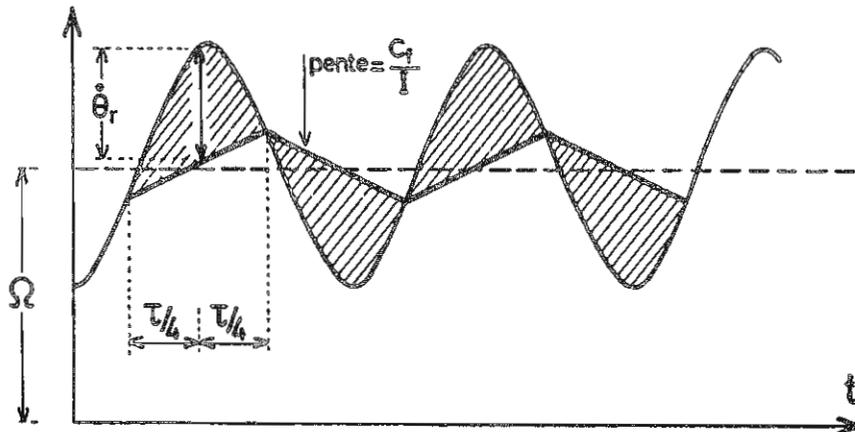


figure 3.10.10  
Déplacement relatif des masses dans un amortisseur de type Lanchester

L'énergie dissipée par cycle est égale à

$$W_d = \int_{\text{cycle}} C_f \dot{\theta}_r dt \tag{3.10.29}$$

où  $\dot{\theta}_r$  est la vitesse relative du moyeu et des volants d'inertie.

Comme le couple  $C_f$  est constant, on obtient

$$W_d = C_f \times \text{aire hachurée} \tag{3.10.30}$$

On évalue comme suit : soit  $\tau$  la période de la vibration. Par symétrie, les points de non glissement apparaissent aux instants  $-\frac{\tau}{4}$ ,  $\frac{\tau}{4}$  et  $\frac{3\tau}{4}$  à condition de placer l'origine des temps de façon appropriée.

La vitesse du moyeu est

$$\dot{\theta}_1 = \Omega + \omega\theta_1 \sin(\omega t + \phi) \quad (3.10.31)$$

et celle du disque libre

$$\dot{\theta}_2 = \frac{C_f}{I}t + \Omega \quad (3.10.32)$$

d'où la vitesse relative

$$\dot{\theta}_r = \omega\theta_1 \sin(\omega t + \phi) - \frac{C_f}{I}t$$

qui doit s'annuler en  $t = \frac{\tau}{4}$ .

Il en résulte l'angle de déphasage

$$\cos \phi = \frac{\pi C_f}{2\omega^2 I \theta_1} \quad (3.10.33)$$

Le calcul de l'énergie dissipée par cycle fournit l'expression

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_d &= 2C_f \int_{-\frac{\tau}{4}}^{\frac{\tau}{4}} [\omega\theta_1 \sin(\omega t + \phi) - \frac{C_f}{I}t] dt \\ &= 4C_f \theta_1 \sin \phi \end{aligned}$$

soit

$$\mathcal{W}_d = 4C_f \theta_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\pi C_f}{2\omega^2 I \theta_1}\right)^2} \quad (3.10.34)$$

Cette expression s'annule pour  $C_f = 0$  et pour le couple de serrage maximal

$$(C_f)_{max} = \frac{2\omega^2 I \theta_1}{\pi} \quad (3.10.35)$$

L'amortissement optimal est obtenu lorsque l'énergie dissipée par cycle est maximale : la condition

$$\frac{\partial \mathcal{W}_d}{\partial C_f} = 0$$

donne

$$(C_f)_{opt} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} I \omega^2 \theta_1 \quad (3.10.36)$$

L'énergie de dissipation correspondante est égale à

$$(\mathcal{W}_d)_{opt} = \frac{4}{\pi} I \omega^2 \theta_1^2 \quad (3.10.37)$$

### 10.7 Comparaison des différents types d'amortisseurs

La figure 3.10.11 compare l'efficacité des différents amortisseurs de vibration discutés en fonction de la masse relative  $\mu$ . La quantité de comparaison est l'amplitude du déplacement de la masse primaire rapportée à sa déflexion statique.

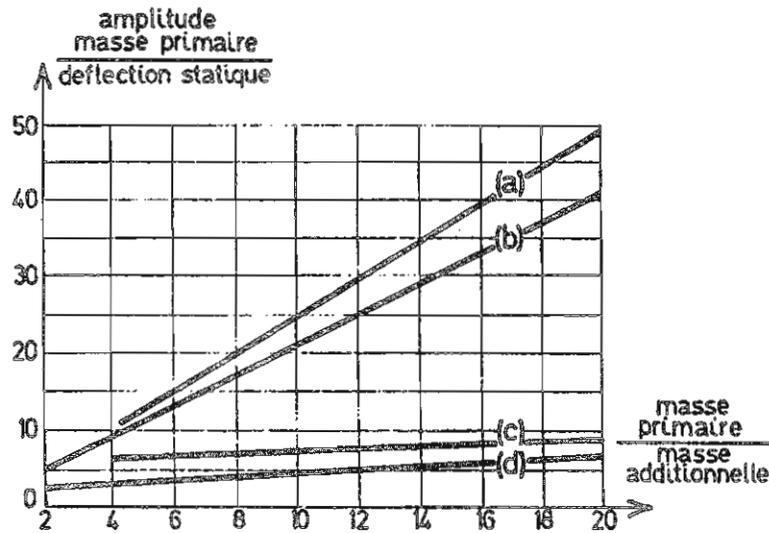


figure 3.10.11

Comparaison de l'efficacité des différents amortisseurs dynamiques

- (a) système secondaire couplé par frottement sec (Lanchester) avec amortissement optimal.
- (b) système secondaire souple par viscosité (Houdaille) avec amortissement optimal.
- (c) système auxiliaire couplé par raideur et viscosité, accordé sur la fréquence du système primaire ( $\alpha = 1$ ) et amorti de façon optimale.
- (d) système auxiliaire couplé par raideur et viscosité, accordé de façon optimale ( $\alpha = \frac{1}{1+\mu}$ ) et amorti de façon optimale.

### 3.11 Amortisseurs dynamiques accordés sur un ordre de vibration

Lorsqu'on étudie les vibrations de torsion des machines alternatives ou tournantes, on observe généralement que les forces et couples perturbateurs ont une fréquence égale à la vitesse de rotation ou égale à un multiple de celle-ci. Le rapport de la fréquence de vibration à la vitesse de rotation est appelé *ordre de la vibration* ou *harmonique*, noté  $q$ . Par exemple, une unité de puissance entraînant une hélice à quatre pales peut être le siège d'une vibration en torsion égale à 4 fois sa vitesse de rotation et les ordres de vibration 8, 16, ... sont eux aussi susceptibles d'apparaître. De même, dans un moteur à pistons, les différents harmoniques de la vitesse de rotation sont à l'origine de vibrations importantes.

On utilise dans ce cas comme absorbeur dynamique un pendule agissant dans le champ de gravité généré par la force centrifuge car sa fréquence naturelle devient une fonction linéaire de la vitesse. Il en résulte qu'on peut concevoir un amortisseur dynamique qui *neutralise un ordre de vibration déterminé*.

Considérons un pendule de longueur  $\ell$  attaché à une distance  $r$  du centre de rotation d'un volant d'inertie  $I$  (figure 3.11.1).

Les composantes de vitesse de la masse  $m$  selon les axes  $Ox$  et  $Oy$  liés au volant d'inertie sont

$$v = \begin{bmatrix} \ell \sin \phi (\dot{\phi} + \dot{\theta}) \\ r\dot{\theta} + \ell \cos \phi (\dot{\phi} + \dot{\theta}) \end{bmatrix}$$

d'où l'énergie cinétique de l'ensemble

$$T = \frac{1}{2} [I\dot{\theta}^2 + m\ell^2(\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 + mr^2\dot{\theta}^2 + 2mr\ell \cos \phi \dot{\theta}(\dot{\theta} + \dot{\phi})] \tag{3.11.1}$$

soit, en définissant le moment d'inertie total

$$J = I + m(\ell + r)^2 \tag{3.11.2}$$

$$T = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\phi}^2 + mr\ell(\cos \phi - 1)\dot{\theta}^2 + m\ell(\ell + r \cos \phi)\dot{\theta}\dot{\phi}$$

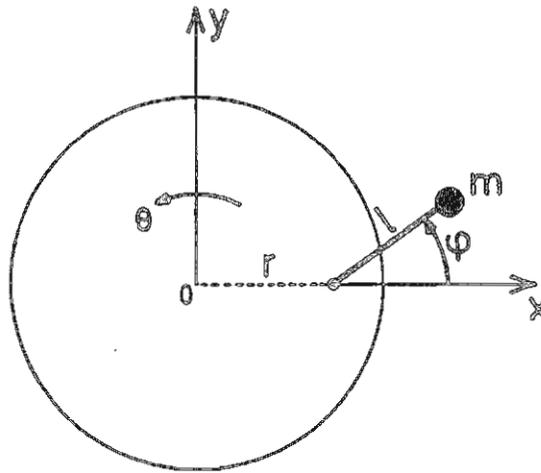


figure 3.11.1

Schéma de principe de l'amortisseur pendulaire

On linéarise cette expression en notant que la vitesse de rotation effective  $\dot{\theta}$ , du fait de l'existence d'un couple perturbateur d'ordre  $q$

$$C = C_0 \cos q\Omega t \quad (3.11.3)$$

oscille autour de la vitesse nominale  $\Omega$

$$\dot{\theta} = \Omega + \dot{\varepsilon}$$

d'où l'expression linéarisée

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}J(\Omega + \dot{\varepsilon})^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\phi}^2 + m\ell(\ell + r)(\Omega + \dot{\varepsilon})\dot{\phi} - \frac{1}{2}mr\ell\Omega^2\phi^2 \quad (3.11.4)$$

et les équations du mouvement

$$\begin{aligned} m\ell^2\ddot{\phi} + m\ell(\ell + r)\ddot{\varepsilon} + mr\ell\Omega^2\phi &= 0 \\ m\ell(\ell + r)\ddot{\phi} + J\ddot{\varepsilon} &= C_0 \cos q\Omega t \end{aligned} \quad (3.11.5)$$

dont la réponse forcée sera nécessairement harmonique.

Définissons également le *nombre d'accord*

$$n^2 = \frac{r}{\ell} \quad (3.11.6)$$

Les amplitudes de mouvement  $\varepsilon_0$  et  $\Phi_0$  sont solutions de

$$\begin{aligned} (n^2 - q^2)\phi_0 - q^2(1 + n^2)\varepsilon_0 &= 0 \\ m\ell^2(1 + n^2)\phi_0 + J\varepsilon_0 &= -\frac{C_0}{q^2\Omega^2} \end{aligned} \quad (3.11.7)$$

soit

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{-(n^2 - q^2)C_0}{q^2\Omega^2[J(n^2 - q^2) + m\ell^2q^2(1 + n^2)^2]} \\ \phi_0 &= \frac{-(1 + n^2)C_0q^2}{q^2\Omega^2[J(n^2 - q^2) + m\ell^2q^2(1 + n^2)^2]} \end{aligned} \quad (3.11.8)$$

On en déduit que, lorsque le nombre d'accord du pendule égale l'ordre de la vibration ( $n = q$ ), la fluctuation de la vitesse de rotation est effectivement amortie.

Calculons l'inertie équivalente du système pendulaire : par élimination de  $\phi_0$  entre les deux équations (3.11.7), on obtient

$$\left[ J + \frac{m\ell^2q^2(1 + n^2)^2}{n^2 - q^2} \right] \varepsilon_0 = -\frac{C_0}{q^2\Omega^2}$$

Notant encore que  $J = I + m\ell^2(1 + n^2)^2$ , on obtient que par la présence de l'amortisseur pendulaire, le moment d'inertie du disque est remplacé par le moment d'inertie équivalent

$$I + \frac{m\ell^2(1 + n^2)^2}{1 - \frac{q^2}{n^2}}$$

qui devient infini lorsque le pendule est accordé.

On notera que le pendule tend à se désaccorder lorsque l'amplitude du mouvement pendulaire croît et introduit de ce fait des harmoniques du couple qu'il est censé neutraliser. L'ordre de la vibration sur lequel le pendule doit être accordé dépend du type de moteur considéré. Par exemple, pour un moteur 4 temps 6 cylindres, l'ordre de vibration à éliminer est  $q = 3$ .

*Modes de réalisation*

Une des difficultés de réalisation des amortisseurs pendulaires réside dans le rapport  $\frac{r}{\ell}$  important à réaliser. Par exemple, pour un nombre d'accord  $n = 3$ , nous obtenons  $r = 9\ell$

La réalisation la plus classique est l'amortisseur bifilaire inventé par Sarazin et Chilton (figure 3.11.2). Il présente l'intérêt d'assurer en même temps la fonction de contreponds des manivelles pour réaliser l'équilibrage du vilebrequin. Il consiste en une masse en forme de U suspendue par l'intermédiaire de deux rouleaux de diamètre  $d_3$ . Les alésages dans le contreponds et dans les flasques ont des diamètres  $d_1$  et  $d_2$  supérieurs à celui des rouleaux, de manière à ce que le contreponds roule sur les deux rouleaux qui eux-mêmes roulent dans les alésages des flasques. Il en résulte que tous les points du contreponds peuvent se mouvoir sur des cercles parallèles de rayon

$$\frac{d_1 + d_2}{2} - d_3 \tag{3.11.9}$$

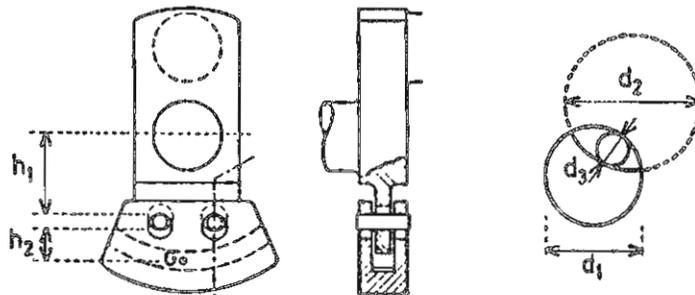


figure 3.11.2  
Réalisation de l'amortisseur bifilaire

Du fait que tous ses points se meuvent parallèlement, l'amortisseur bifilaire peut être assimilé à un pendule équivalent dont la masse est centrée au centre de gravité  $G$  (figure 3.11.2).

D'où l'équivalence avec l'amortisseur pendulaire de la figure 3.10.1

$$\begin{aligned} r &= h_1 + h_2 \\ \ell &= \frac{d_1 + d_2}{2} - d_3 \end{aligned} \tag{3.11.10}$$

où  $h_1$  et  $h_2$  représentent respectivement

- $h_1$  = distance entre l'axe du vilebrequin et les axes des alésages dans les flasques
- $h_2$  = distance entre alésages et centre de gravité du contreponds.

L'amortissement bifilaire permet de réaliser un rapport  $\frac{r}{\ell}$  grand avec une masse  $m$  importante. Son inconvénient majeur réside dans l'usure importante des alésages et des rouleaux.

La figure 3.11.3 montre une réalisation de pendule bifilaire sur un volant d'inertie. Différents ordres de vibration peuvent être éliminés par le même dispositif.

Une autre réalisation courante de l'amortisseur pendulaire est le pendule de Salomon. Il consiste en un cylindre de rayon  $r_2$  pouvant rouler ou glisser dans une cavité de rayon  $r_1$ . Le rayon de pendule correspond dans ce cas à la différence entre les rayons du cylindre et de la cavité.

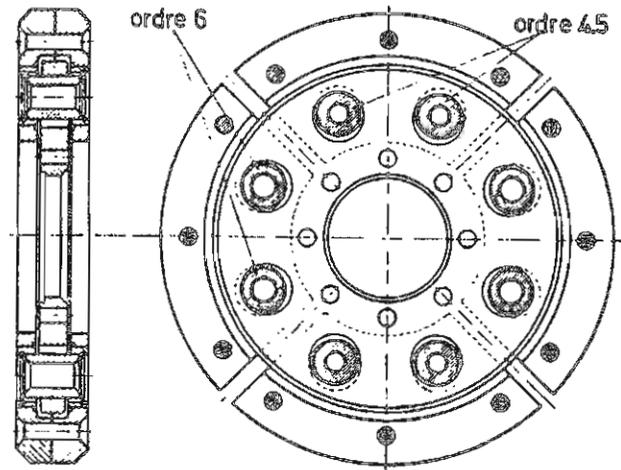


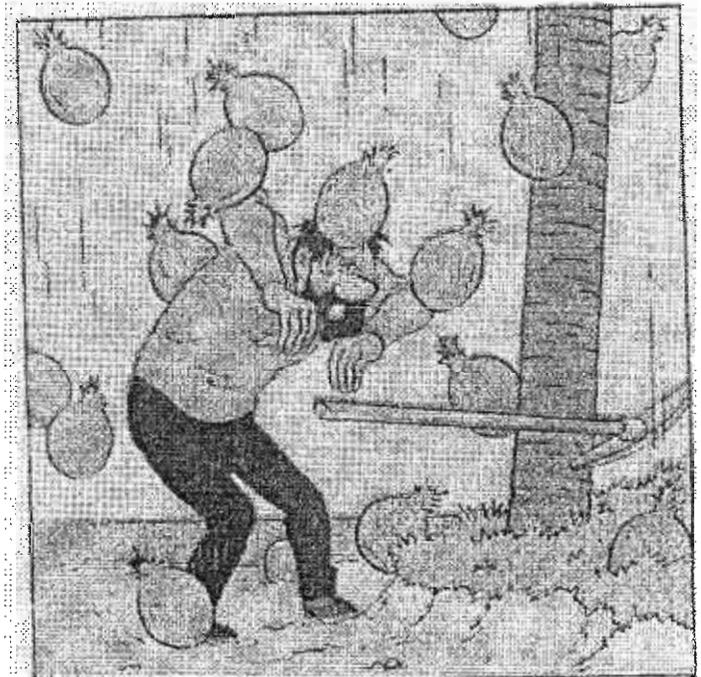
figure 9.11.3  
Réalisation d'un amortisseur bifilaire

### 3.12 R ef erences

1. Lord RAYLEIGH, *Theory of sound*, Dover, 1945
2. MEIROVITCH, L., *Analytical methods in vibrations*, The MacMillan Co, NY, 1967
3. MEIROVITCH, L., *Elements of vibration analysis*, McGraw Hill, 1975
4. DEN HARTOG, J.P., *Mechanical vibrations*, McGraw Hill, 1975
5. HARRIS, C.M., CREDE, C.E., *Shock and vibration handbook*, McGraw Hill, 2d Ed. 1976
6. LEBECQUE, R., *Application de la théorie des vibrations de torsion. Vibrations forcées*, Univ. de Li ege, Fac. des Sc. appliquées, 1978
7. LANG, O.R., *Triebwerke Schnellaufender Verbrennungsmotoren*, Springer-Verlag, 1966

## 4. Les Systèmes à $N$ Degrés de Liberté

---



### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on procède à la généralisation des concepts introduits pour les systèmes à deux degrés de liberté, à savoir: l'existence d'un nombre de *fréquences propres* égal au nombre de degrés de liberté du système, fréquences auxquelles le système est susceptible de vibrer librement, et ce chaque fois avec une *forme propre* bien distincte.

L'augmentation du nombre de degrés de liberté soulève toutefois un certain nombre de difficultés additionnelles :

- *d'ordre conceptuel* : la notion d'orthogonalité entre solutions propres distinctes joue un rôle fondamental dans la compréhension des phénomènes, surtout lorsque celles-ci deviennent confondues ;
- *d'ordre numérique* : dès que le nombre de degrés de liberté devient supérieur à 2, la résolution du problème aux valeurs propres fait appel à des méthodes de calcul matriciel appropriées ; de plus, il est important de disposer de méthodes approximatives permettant au moins de situer la fréquence propres fondamentale du système.

Lorsque les systèmes étudiés présentent la particularité d'une structure en chaîne, on verra également que des méthodes simplifiées de calcul existent qui permettent d'éviter les inconvénients numériques liés à l'accroissement du nombre de degrés de liberté.

Mais l'intérêt du calcul des modes et fréquences propres d'un système à  $n$  degrés de liberté ne se limite pas à l'étude de ses vibrations libres. En effet, nous verrons que la séquence des modes propres fournit une base appropriée pour la décomposition en série de la réponse à une excitation quelconque : nous résoudrons le problème de la réponse du système non amorti en le décomposant en une série d'oscillateurs normaux à un degré de liberté, chacun soumis à une loi d'excitation différente et régissant l'évolution de chacun des modes dans la solution.

Enfin, nous étudierons le cas particulier de la réponse à une excitation harmonique et mettrons en évidence l'effet sur celles-ci d'un certain amortissement.

Les concepts fondamentaux contenus dans ce chapitre seront assez largement présentés à partir d'exemples.

### 4.2 Exemple de système à N degrés de liberté : la chaîne en torsion

Considérons l'exemple d'un arbre en torsion comportant un certain nombre de disques.

Lorsqu'on réalise le schéma rendu libre d'un disque, on obtient l'équation d'équilibre dynamique de celui-ci

$$C_d - C_g + T_i - I_i \ddot{\theta}_i = 0 \quad (4.2.1)$$

$$C_d = k_i(\theta_{i+1} - \theta_i) \quad (4.2.2)$$

$$C_g = k_{i-1}(\theta_i - \theta_{i-1}) \quad (4.2.3)$$

avec  $\left\{ \begin{array}{l} -\theta_i \\ -I_i \\ -k_i \\ -C_d, C_g \\ -T_i \end{array} \right.$  la rotation du disque  $i$   
 le moment d'inertie du disque  $i$   
 la raideur en torsion du tronçon d'arbre  $i$   
 les couples élastiques à droite et à gauche  
 le couple extérieur sur le disque  $i$

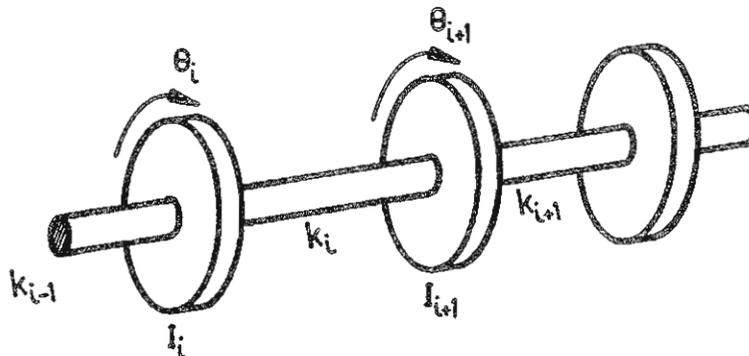


figure 4.2.1  
Chaîne en torsion

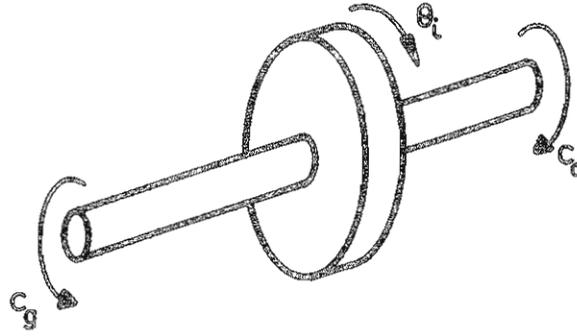


figure 4.2.2  
Schéma rendu libre d'un disque

L'élimination des couples élastiques (4.2.2) et (4.2.3) dans (4.2.1) fournit l'équation générale du mouvement d'un disque

$$k_i(\theta_{i+1} - \theta_i) - k_{i-1}(\theta_i - \theta_{i-1}) + T_i - I_i\ddot{\theta}_i = 0 \quad (4.2.4)$$

avec les conditions d'extrémité :

- extrémité bloquée :

$$\theta_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \theta_N = 0 \quad (4.2.5)$$

- extrémité libre : annulation du couple élastique, ce qui donne

$$\begin{aligned} \text{à gauche : } & k_1(\theta_2 - \theta_1) + T_1 - I_1\ddot{\theta}_1 = 0 \\ \text{à droite : } & k_{N-1}(\theta_{N-1} - \theta_N) + T_N - I_N\ddot{\theta}_N = 0 \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Nous pouvons également construire les équations du mouvement (4.2.4) par le formalisme de Lagrange en calculant

- l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\text{disques}} I_i \dot{\theta}_i^2 \quad (4.2.7)$$

- l'énergie potentielle

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\text{arbres}} k_i (\theta_{i+1} - \theta_i)^2 \quad (4.2.8)$$

Cette approche permet d'éviter le calcul des réactions entre éléments du système et conduit de ce fait plus directement aux équations (4.2.4), (4.2.5) et (4.2.6) tout en évitant les risques de fautes de signe inhérents au formalisme de Newton.

On peut regrouper les équations du mouvement (4.2.4) et les conditions d'extrémité appropriées en une équation matricielle

$$\mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{p}(t) \quad (4.2.9)$$

avec le vecteur des déplacements généralisés

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N \end{bmatrix}$$

et celui des forces extérieures

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_N \end{bmatrix}$$

Dans le cas de conditions d'extrémités libres,  $\mathbf{K}$  est la *matrice des raideurs* du système et  $\mathbf{M}$  sa *matrice des masses* (ou inerties) ; celles-ci s'écrivent

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & & & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & & \\ & -k_2 & \ddots & & \\ & & & k_{N-2} + k_{N-1} & -k_{N-1} \\ 0 & & & -k_{N-1} & k_{N-1} \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I_1 & & & 0 \\ & I_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & I_N \end{bmatrix}$$

La symétrie de la matrice de raideur, ainsi que nous l'avons déjà rappel e au chapitre 2, est une conséquence du principe de réciprocité de Maxwell. La matrice de raideur  $\mathbf{K}$  est de plus tridiagonale, ce qui est une conséquence de la structure en cha ene du système, en ce sens qu'un disque d etermin e n'est jamais coupl e qu'au disque précédent et au disque suivant. Nous reviendrons plus loin sur les simplifications qu'entra ene cette propri ete dans les méthodes de calcul.

Pour obtenir les matrices de raideur et de masse du système d'extrémités fixées, il suffit de faire

$$\theta_1 = \theta_N = 0$$

et de supprimer les lignes et colonnes correspondantes dans les matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$ .

On notera que les expressions (4.2.7) et (4.2.8) peuvent être écrites sous forme quadratique des matrices de masse et de raideur, telles que

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} > 0 \quad \mathbf{q} \neq 0 \quad (4.2.10)$$

ce qui traduit le fait que l'énergie cinétique du système devient positive dès que le système possède une vitesse non nulle, et

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \geq 0 \quad \mathbf{q} \neq 0 \quad (4.2.11)$$

car le système acquiert nécessairement de l'énergie lorsqu'il est d eplac e de sa position d'équilibre. L'égalité à zéro n'est possible que lorsque le système peut subir un déplacement d'ensemble sans déformation correspondante, comme c'est le cas si  $\theta_1$  et  $\theta_N$  sont laiss es libres.

#### Exemple 4.1

Considérons le système suivant à 3 degrés de liberté

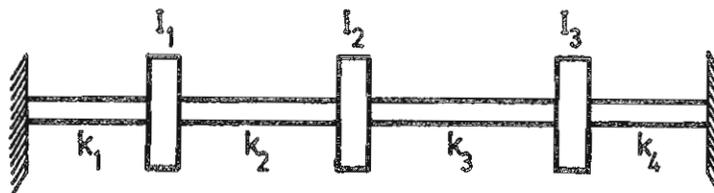


figure 4.2.3  
Système en torsion à 3 degrés de liberté

avec les constantes de raideur et d'inertie

$$k_1 = k_2 = k_3 = \frac{GJ}{\ell} \quad , \quad k_4 = \frac{2GJ}{\ell}$$

$$I_1 = I_2 = I_D \quad , \quad I_3 = 2I_D$$

On en calcule successivement

- la matrice de raideur

$$\mathbf{K} = \frac{GJ}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

- la matrice de masse

$$\mathbf{M} = I_D \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice de flexibilité est obtenue par inversion de la matrice de raideur

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{-1} = \frac{\ell}{7GJ} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

### 4.3 Le cas général des oscillations libres d'un système discret

Considérons un système de degrés de liberté  $(q_1, \dots, q_n)$  possédant une position d'équilibre stable, c'est-à-dire tel que tout écart par rapport à la position d'équilibre entraîne un accroissement d'énergie potentielle.

L'énergie potentielle n'étant définie qu'à une constante près, choisissons-la de telle sorte que  $\mathcal{V} = 0$  à l'équilibre et convenons d'y translater l'origine des coordonnées généralisées de telle sorte que l'on ait

$$q_r = 0 \quad r = 1, \dots, n \quad \text{à l'équilibre.}$$

Dès que l'on écarte faiblement le système de sa position d'équilibre, on a

$$\mathcal{V}(q) \geq 0 \tag{4.3.1}$$

l'égalité à zéro n'ayant lieu qu'à l'équilibre qui correspond donc à un minimum de  $\mathcal{V}$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q} = 0 \quad \text{en } q = 0 \tag{4.3.2}$$

#### Exemple 4.2

Le système à deux degrés de liberté faiblement couplés du paragraphe 3.5 (figure 3.5.1) est caractérisé par une énergie potentielle due à la fois à la gravité et à la déformation du ressort

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}ka^2(\theta_2 - \theta_1)^2 + mg\ell(2 - \cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

On a bien

$$\mathcal{V}(\theta_1, \theta_2) \geq 0 \quad \text{tant que } -\pi < \theta_1, \theta_2 < +\pi$$

et la position  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  constitue une position d'équilibre stable.

Revenant à l'inégalité (4.3.1), les  $q_r$  étant des écarts à la configuration d'équilibre, l'énergie potentielle au voisinage de celle-ci admet le développement en série de Taylor

$$\mathcal{V}(q) = \mathcal{V}(0) + \sum_r \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_r} \right)_{0} q_r + \frac{1}{2} \sum_r \sum_s \left( \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial q_r \partial q_s} \right)_{0} q_r q_s + o(q^3)$$

si l'on suppose  $\mathcal{V}$  continue ainsi que sa dérivée première.

Par convention,  $\mathcal{V}(0) = 0$ , et tenant compte de (4.3.2), on obtient l'approximation au second ordre

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \sum_s \sum_r k_{rs} q_r q_s$$

avec les coefficients de raideur

$$k_{rs} = \left( \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial q_r \partial q_s} \right)_0$$

soit, sous forme matricielle

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \geq 0 \quad (4.3.3)$$

On a ainsi généralisé l'expression (4.2.11) à un système quelconque tant que les mouvements envisagés restent limités au voisinage d'une position d'équilibre stable. Par construction, la matrice des raideurs  $\mathbf{K}$  est symétrique et définie positive.

Si l'on reprend l'exemple mentionné ci-dessus, on trouve bien

$$\left( \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \theta_1^2} \right)_0 = (ka^2 + mg\ell \cos \theta_1)_{\theta_1=0} = ka^2 + mg\ell$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = -ka^2$$

ce qui restitue l'expression utilisée dans (3.5.1) pour la matrice des raideurs.

De la même manière, on peut linéariser l'énergie cinétique. Du fait que le système possède une configuration d'équilibre stable et ne comporte aucune vitesse d'entraînement, l'énergie cinétique se réduit à une forme quadratique homogène des vitesses

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s m_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s$$

soit, sous forme matricielle

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.3.4)$$

La matrice des masse  $\mathbf{M}$  est elle aussi symétrique et définie positive.

Ainsi que nous l'avons déjà montré au paragraphe 3.3, l'existence de termes non diagonaux

$$m_{ij} \quad \text{et} \quad k_{ij} \quad i \neq j$$

indique l'existence d'un couplage entre les degrés de liberté  $q_i$  et  $q_j$  soit par inertie ( $m_{ij} \neq 0$ ), soit par les raideurs ( $k_{ij} \neq 0$ ).

Si l'on note par

$$\mathbf{p}^T(t) = [Q_1(t), \dots, Q_n(t)]$$

le vecteur des forces généralisées conjuguées aux degrés de liberté  $(q_1, \dots, q_n)$ , l'application des équations de Lagrange

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_r} \right) + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_r} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_r} + Q_r = 0$$

fournit les équations du mouvement d'un système sollicité autour de sa position d'équilibre sous la forme déjà connue

$$\mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{p}(t) \quad (4.3.5)$$

où les matrices de raideur  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont toutes deux symétriques et au moins semi-définies positives.

Le reste de ce chapitre est consacré à la solution de ce système d'équations.

### 4.4 Vibrations libres

En l'absence de force extérieure, le système est régi par l'équation homogène

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0 \quad (4.4.1)$$

que l'on résout en essayant une solution de la forme

$$\mathbf{q} = \mathbf{x}\phi(t)$$

qui traduit physiquement le fait que tous les points subissent un mouvement *synchrone*.

Par substitution

$$\mathbf{M}\mathbf{x}\frac{\ddot{\phi}}{\phi} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (4.4.2)$$

ce qui montre que le rapport  $\frac{\ddot{\phi}}{\phi}$  est nécessairement indépendant du temps. Il est de plus négatif car en multipliant par le vecteur  $\mathbf{x}^T$  les deux membres de (4.4.2), il vient

$$\frac{\ddot{\phi}}{\phi} = -\frac{\mathbf{x}^T\mathbf{K}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x}} = -\omega^2$$

étant donné le caractère défini positif des matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$ .

On doit donc réaliser

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{x} \quad (4.4.3)$$

$$\ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0 \quad (4.4.4)$$

L'équation (4.4.3) possède  $N$  racines, ou *valeurs propres*, supposées rangées dans l'ordre croissant

$$0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \omega_N^2$$

obtenues en résolvant l'équation algébrique de degré  $N$  en  $\omega^2$

$$\text{dtm}(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0$$

et à chacune des racines, on associe un vecteur  $\mathbf{x}_{(i)}$  différent, ou *vecteur propre*, obtenu en résolvant le système homogène

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2\mathbf{M})\mathbf{x}_{(i)} = 0 \quad (4.4.5)$$

Chacune des solutions propres donne lieu à une composante harmonique  $\phi_i(t)$  de la solution, régie par l'équation

$$\ddot{\phi}_i + \omega_i^2\phi_i = 0$$

que l'on explicite sous la forme

$$\phi_i = A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t$$

#### Exemple 4.3

Pour le système de l'exemple 4.1, l'équation aux valeurs propres, à condition de poser

$$\lambda = \omega^2 \frac{I_d \ell}{GJ}$$

devient

$$\text{dtm} \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3 - 2\lambda \end{bmatrix} = 0$$

et donne lieu à l'équation du troisième degré en  $\lambda$

$$-2\lambda^3 + 11\lambda^2 - 17\lambda + 7 = 0$$

Lorsqu'on en calcule les racines, on trouve

$$\omega_1 = 0.8139, \quad \omega_2 = 1.2953, \quad \omega_3 = 1.7788 \sqrt{\frac{GJ}{I_d l}} \text{ rad/sec}$$

Les modes correspondants sont

$$\mathbf{x}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.34 \\ 0.797 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.32 \\ -0.90 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.16 \\ 0.35 \end{bmatrix}$$

Du fait qu'ils correspondent à la solution du problème homogène (4.4.5), ils ne sont connus qu'à une composante près. On les a donc tous norm es en fixant à l'unité la première composante de rotation  $\theta_1$ .

Si on représente la rotation dans chacun des 3 modes propres en fonction de l'abscisse sur l'arbre:

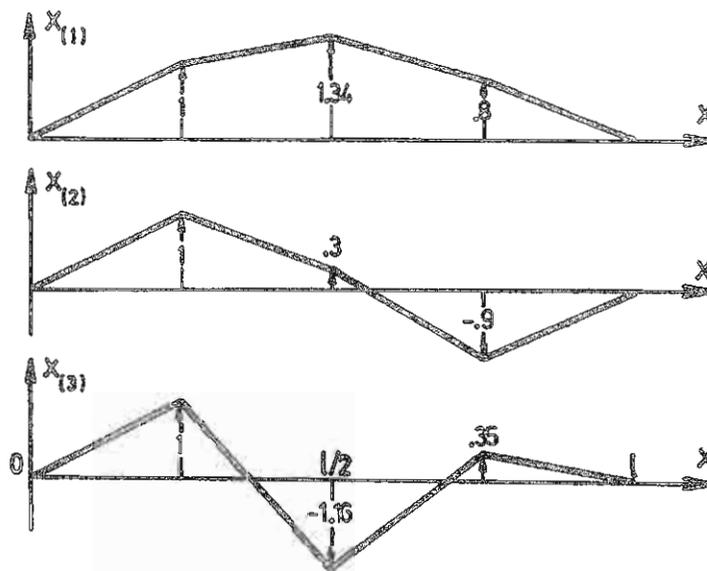


figure 4.4.1

Modes propres du système en torsion à 3 degrés de liberté

Dans le premier mode, tous les disques tournent dans le même sens ; dans le deuxième, la rotation subit un changement de signe ; de même, le troisième mode comporte deux noeuds de vibration et ainsi de suite.

#### Exemple 4.4

Considérons le système libre-libre suivant constitu e d'éléments de raideur et masse identiques.

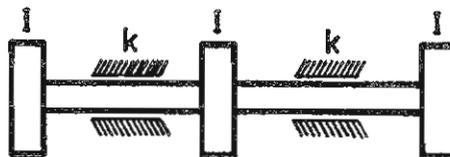


figure 4.4.2

Arbre en torsion pourvu de modes rigides

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

L'équation aux valeurs propres s'écrit

$$\text{dtm} \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad \text{avec } \lambda = \frac{\omega^2 I}{k}$$

On trouve

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0 & \mathbf{x}_{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{k}{I}} \text{ rad/sec} & \mathbf{x}_{(2)} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{3k}{I}} \text{ rad/sec} & \mathbf{x}_{(3)} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On notera que dans chacun des modes élastiques, les forces d'inertie se distribuent de manière à produire un couple d'inertie résultant nul.

#### 4.5 Orthogonalité entre modes propres

Nous avons noté les solutions du système à  $n$  degrés de liberté sous la forme

$$\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \omega_n^2$$

$$\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}, \dots, \mathbf{x}_{(n)}$$

Partons de l'équation vérifiée par le mode  $i$  et multiplions-la par un autre mode  $\mathbf{x}_{(j)}^T$  de fréquence  $\omega_i \neq \omega_j$

$$\mathbf{x}_{(j)}^T \mathbf{K} \mathbf{x}_{(i)} = \omega_i^2 \mathbf{x}_{(j)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(i)} \quad (4.5.1)$$

De même, exprimons l'équation vérifiée par le mode  $j$  et multiplions-la par le mode  $\mathbf{x}_{(i)}^T$

$$\mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{K} \mathbf{x}_{(j)} = \omega_j^2 \mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(j)} \quad (4.5.2)$$

Par différence, et en utilisant la symétrie des matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$ , on obtient

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(j)} = 0$$

Du fait que l'on a supposé a priori  $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$ , il résulte que

$$\mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(j)} = 0 \quad (4.5.3)$$

ce qui exprime l'orthogonalité de modes d'indices différents dans la métrique de la matrice des masses.

De même, par report de (4.5.3) dans l'une ou l'autre des équations (4.5.1) et (4.5.2), on démontre l'orthogonalité de deux modes distincts dans la métrique de la matrice de raideur

$$\mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{K} \mathbf{x}_{(j)} = 0 \quad (4.5.4)$$

On peut encore réécrire les résultats (4.5.3) et (4.5.4) sous la forme

$$\mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(j)} = \mu_i \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{K} \mathbf{x}_{(j)} = \gamma_i \delta_{ij} \quad (4.5.5)$$

à condition de définir la *masse généralisée* et la *raideur généralisée* du mode

$$\mu_i = \mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(i)} \quad \gamma_i = \mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{K} \mathbf{x}_{(i)} \quad (4.5.6)$$

Ces deux quantités ne sont en fait définies qu'à un facteur près puisque la norme sur le mode n'est pas définie. Elles doivent toutefois, en vertu de (4.5.2) et (4.5.3), vérifier la relation

$$\frac{\gamma_i}{\mu_i} = \omega_i^2 \quad (4.5.7)$$

Le rapport correspondant

$$R(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}} = \omega^2 \quad (4.5.8)$$

que l'on peut former à l'aide d'un vecteur quelconque est le *quotient de Rayleigh*. Nous verrons plus loin qu'il joue un rôle fondamental pour l'approximation numérique des valeurs propres.

#### *Solution propres de fréquences confondues*

On peut se poser la question de savoir ce que devient la propriété d'orthogonalité entre deux modes qui seraient de même fréquence.

Il est possible de montrer que dans ce cas, il existe un nombre de modes propres linéairement indépendants égal à la multiplicité de la racine et que n'importe quelle combinaison linéaire de ceux-ci reste un mode propre.

On peut donc toujours en extraire un ensemble de modes propres orthogonaux entre eux et admettre que les relations d'orthogonalité (4.5.5) restent valables même en présence de valeurs propres confondues.

### 4.6 Signification physique des relations d'orthogonalité

La relation d'orthogonalité v erifi e par deux modes  $\mathbf{x}_{(i)}$  et  $\mathbf{x}_{(j)}$  dans la métrique de la matrice des masses

$$\mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(j)} = \mu_i \delta_{ij}$$

peut être interpr et e comme le fait que la distribution d'inertie du mode  $j$ ,  $\mathbf{M} \mathbf{x}_{(j)}$ , n'exerce aucun travail dans un déplacement virtuel selon le mode  $i$ . Il en est de même pour la distribution de forces élastiques  $\mathbf{K} \mathbf{x}_{(j)}$ .

Cette interprétation appar it de façon beaucoup plus concrète lorsqu'on examine un exemple simple tel que celui des deux premiers modes d'une poutre bi-encastée (figure 4.6.1) qui possède la caractéristique d'avoir un plan de symétrie : manifestement, les forces d'inertie associées au premier mode ne peuvent produire aucun travail sur le mode 2, et inversement.

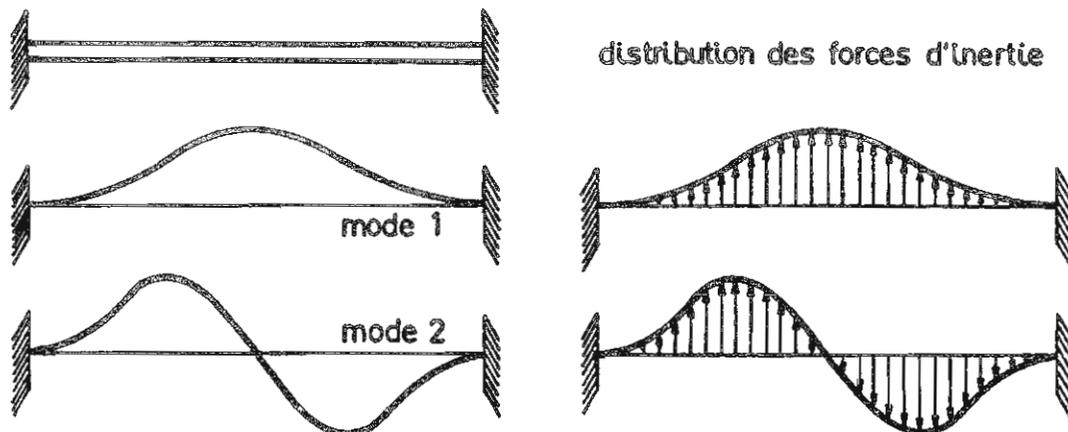


figure 4.6.1  
Signification des relations d'orthogonalité

## 4.7 Méthodes numériques de calcul des fréquences et modes propres de vibration du système

Dans le paragraphe 4.4, nous avons montré que lorsque le système vibre librement, il le fait nécessairement à l'une des fréquences bien distinctes

$$0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \dots \leq \omega_n^2$$

solutions de l'équation algébrique

$$\text{dtm}(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$$

et que le mouvement correspondant se fait selon les modes propres associés

$$\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}, \dots, \mathbf{x}_{(n)}$$

solution du système homogène correspondant

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{x} \quad (4.7.1)$$

La résolution numérique du problème matriciel aux valeurs propres (4.7.1) peut en soi constituer une difficulté importante dès que la taille du système augmente. Or il n'est pas rare, lorsqu'on étudie par voie numérique (méthode des éléments finis par exemple) des systèmes mécaniques quelque peu complexes, que l'on aboutisse à un système tel que (4.7.1) comportant plusieurs milliers de degrés de liberté.

D'un point de vue pratique, on n'est la plupart du temps intéressé que par les quelques premières fréquences propres de vibration du système. Ce sont celles-ci qui sont les plus dangereuses car elles sont d'une part moins amorties en général que les fréquences plus élevées, et d'autre part les sources d'excitation extérieure possibles sont beaucoup plus nombreuses en basse fréquence. Les phénomènes acoustiques constituent un des seuls cas où les vibrations mécaniques de plus haute fréquence prennent de l'importance.

Les méthodes numériques que l'on peut mettre en oeuvre pour résoudre (4.7.1) sont de divers types.

- Pour de très petits nombres de degrés de liberté, on peut simplement en développer l'équation caractéristique : dans les exemples que nous avons traités jusqu'ici, c'est la procédure que nous avons suivie.
- D'autres méthodes, applicables même à de très grands systèmes, consistent à calculer le déterminant  $|\mathbf{K} - \mu \mathbf{M}|$  pour différentes valeurs de  $\mu$ , et ainsi localiser les racines de (4.7.1) par approximations successives. Il est aisé de se rendre compte que dans le cas particulier où le système (4.7.1) présente la particularité d'être tridiagonal, ce déterminant peut être calculé par une relation de récurrence.
- Une autre catégorie de méthodes consiste à faire subir au système (4.7.1) une série de transformations matricielles de manière à le transformer d'abord sous la forme standard  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  avec  $\mathbf{A}$  symétrique et ensuite le réduire par itérations successives à une forme tridiagonale ou même diagonale.
- Enfin la catégorie de méthodes la plus usitée, en raison de leurs performances et de leur aptitude à extraire seulement les quelques premières solutions propres, consiste à itérer sur les vecteurs propres par une loi de type puissance

$$\mathbf{K}\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{x}_n$$

Chacune de ces itérations consiste simplement en un produit matrice  $\times$  vecteur suivi d'une résolution de système linéaire associée à la matrice de raideur.

Aucune de ces méthodes ne sera abordée dans le cadre de ce cours ; nous verrons simplement dans ce chapitre les quelques méthodes particulières que l'on peut mettre en oeuvre pour les systèmes en chaîne.

## 4.8 Résolution du problème aux valeurs propres pour un système tridimensionnel

*Relation de récurrence*

L'équation aux valeurs propres d'une cha ene en torsion que l'on a établie au paragraphe 4.2 présente une particularité intéressante que l'on peut mettre à profit pour sa résolution: sa structure *tridiagonale*.

Ecrivons son équation caractéristique calculée en  $\omega^2 = \mu$  sous la forme générale

$$P_n(\mu) = \text{dtm} \begin{bmatrix} k_{11} - \mu I_1 & -k_{12} & & 0 \\ -k_{12} & k_{22} - \mu I_2 & & \\ & & \ddots & -k_{n-1,n} \\ 0 & & -k_{n-1,n} & k_{nn} - \mu I_n \end{bmatrix} \quad (4.8.1)$$

Supposons connus  $P_{n-1}(\mu)$  et  $P_{n-2}(\mu)$ , les polynômes caractéristiques des sous-matrices diagonales de dimensions  $n-1$  et  $n-2$  que l'on obtient en supprimant successivement la dernière puis les deux dernières lignes et colonnes du système. On peut calculer  $P_n(\mu)$  en appliquant à (4.8.1) la règle des mineurs

$$P_n(\mu) = (k_{nn} - \mu I_n)P_{n-1}(\mu) - k_{n-1,n}^2 P_{n-2}(\mu) \quad (4.8.2)$$

et ainsi de suite.

Pour un système tridiagonal de dimension  $n \geq 3$ , la relation (4.8.2) constitue une relation de récurrence qui permet le calcul de son équation caractéristique. On initialise dans ce cas la série avec les polynômes de degrés 0 et 1

$$P_0(\mu) = 1 \quad \text{et} \quad P_1(\mu) = k_{11} - \mu I_1$$

La procédure de calcul d'une valeur propre  $\omega_i^2$  est alors très simple dans son principe: on détermine un intervalle de départ  $[\alpha, \beta]$  dans lequel  $P_n(\mu)$  change de signe et l'on resserre ensuite cet intervalle par approximations successives. On peut ainsi isoler chacune des valeurs propres avec une précision aussi grande que possible.

*Séquences de Sturm*

La propriété des polynômes successifs  $P_0(\mu), P_1(\mu), \dots, P_n(\mu)$  de former une séquences de Sturm constitue en outre un apport théorique important pour l'organisation du processus itératif de resserrement de l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  autour d'une valeur propre donnée.

Soit une valeur  $\mu_0$  telle que

$$P_r(\mu_0) = 0$$

Dans ce cas,

$$P_{r+1}(\mu_0)P_{r-1}(\mu_0) < 0$$

La preuve en est immédiate. Partons de la relation de récurrence (4.8.2) pour un terme quelconque de la séquences

$$P_{r+1}(\mu) = (k_{r+1,r+1} - \mu I_{r+1})P_r(\mu) - k_{r,r+1}^2 P_{r-1}(\mu)$$

et multiplions son expression en  $\mu = \mu_0$  par  $P_{r-1}(\mu_0)$

On obtient la relation

$$P_{r+1}(\mu_0)P_{r-1}(\mu_0) = -k_{r+1,r}^2 P_{r-1}^2(\mu_0) < 0 \quad (4.8.3)$$

dont on peut déduire la propriété fondamentale d'une séquences de Sturm:

*les racines de  $P_{r+1}(\mu)$  encadrent celles de  $P_r(\mu)$*

Pour le voir, illustrons cette propriété de la séquences des polynômes caractéristiques dans le cas  $n = 3$ . Désignons leurs racines par

$$\begin{array}{ll} P_1(\mu) & \nu_1 \\ P_2(\mu) & \lambda_1, \lambda_2 \\ P_3(\mu) & \omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2 \end{array}$$

Tout d'abord, (4.8.2) entra ene que les polynômes successifs sont tels que

$$\begin{array}{lll} P_r(\mu) > 0 & \text{pour } \mu \rightarrow -\infty & \text{quel que soit } r \\ P_r(\mu) > 0 & \text{pour } \mu \rightarrow \infty & \text{si } r \text{ est pair} \\ P_r(\mu) < 0 & \text{pour } \mu \rightarrow \infty & \text{si } r \text{ est impair} \end{array}$$

Examinons ensuite  $P_2(\mu)$  : on a

$$P_2(\pm\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad P_2(\nu_1)P_0(\nu_1) = P_2(\nu_1) < 0$$

D'où les racines de  $P_2(\mu)$  encadrent bien la seule valeur caractéristique  $\nu_1$  de  $P_1(\mu)$ , comme le montre la figure 4.8.1.

De même, pour  $P_3(\mu)$ , on a successivement

$$\begin{aligned} P_3(-\infty) &= +\infty \\ P_3(\lambda_1)P_1(\lambda_1) &= -k_{32}^2, \quad \text{d'où } P_3(\lambda_1) < 0 \\ P_3(\lambda_2)P_1(\lambda_2) &= -k_{32}^2, \quad \text{d'où } P_3(\lambda_2) > 0 \\ P_3(+\infty) &= -\infty \end{aligned}$$

ce qui montre que les racines de  $P_3(\mu)$  encadrent bien celles de  $P_2(\mu)$  et ainsi de suite.

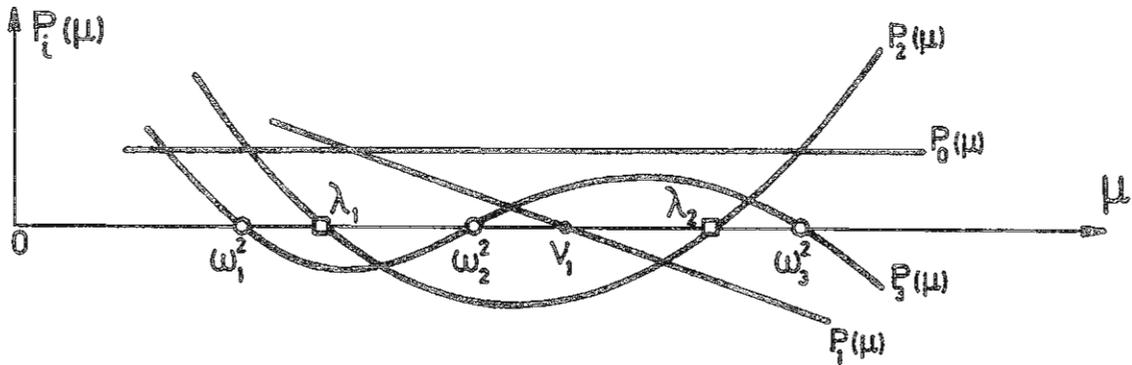


figure 4.8.1  
Séquence de Sturm : propriété d'encadrement des valeurs propres

Pour mettre à profit cette propriété, soit  $a(\mu)$  le nombre de concordances de signes dans la séquence des polynômes caractéristiques. Alors,  $a(\mu)$  est égal au nombre de racines de  $P_n(\mu)$  strictement supérieures à  $\mu$ .

On peut aisément s'en rendre compte dans le cas  $n = 3$  en construisant le tableau suivant.

	$[-\infty, \omega_1^2[$	$[\omega_1^2, \lambda_1[$	$[\lambda_1, \omega_2^2[$	$[\omega_2^2, \nu_1[$	$[\nu_1, \lambda_2[$	$[\lambda_2, \omega_3^2[$	$[\omega_3^2, \infty[$
$P_0(\mu)$	+	+	+	+	+	+	+
$P_1(\mu)$	+	+	+	+	-	-	-
$P_2(\mu)$	+	+	-	-	-	+	+
$P_3(\mu)$	+	-	-	+	+	+	-
$a(\mu)$	3	2	2	1	1	1	0

On met à profit cette propriété des séquences de Sturm pour calculer une racine  $\omega_k^2$  par l'algorithme suivant: soient  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  deux nombres tels que

$$\beta_0 > \alpha_0 \quad a(\alpha_0) \geq k \quad a(\beta_0) < k$$

On sait que dans ce cas

$$\omega_k^2 \in [\alpha_0, \beta_0]$$

et on localise  $\omega_k^2$  par itérations successives dans un intervalle  $[\alpha_p, \beta_p]$  de largeur  $\frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^p}$  en  $p$  itérations par la séquence

- (i) calculer le milieu de l'intervalle  $[\alpha_{s-1}, \beta_{s-1}]$  :  
 $\gamma_s = \frac{1}{2}(\alpha_{s-1} + \beta_{s-1})$
- (ii) construire la séquence  
 $P_0(\gamma_s), \dots, P_n(\gamma_s)$   
 et en déduire  $a(\gamma_s)$
- (iii) si  $a(\gamma_s) \geq k$ , prendre  $\alpha_s = \gamma_s$  et  $\beta_s = \beta_{s-1}$   
 si  $a(\gamma_s) < k$ , prendre  $\alpha_s = \alpha_{s-1}$  et  $\beta_s = \gamma_s$   
 de telle sorte que l'on ait  
 $a(\alpha_s) \geq k$  et  $a(\beta_s) < k$   
 et que  $\omega_k^2 \in [\alpha_s, \beta_s]$

De cette manière, on peut déterminer avec une précision aussi grande que possible la racine  $\omega_k^2$ .

*Remarque*

Chaque fois que dans l'équation (4.8.1) on supprime une ligne et une colonne pour construire le polynôme caractéristique de degré inférieur, on formule en fait l'équation aux fréquences propres du système auquel on ajoute une fixation.

Se référant à la propriété fondamentale des séquences de Sturm, on retrouve le cas particulier d'un théorème important dû à Rayleigh :

*Lorsqu'on ajoute une fixation à un système vibrant, les fréquences propres du système modifié sont encadrées par celles du système initial.*

*Exemple 4.5*

Discretisons une barre uniforme en extension par un ensemble de 5 masses et de ressorts concentrés aux centres des éléments de subdivision.

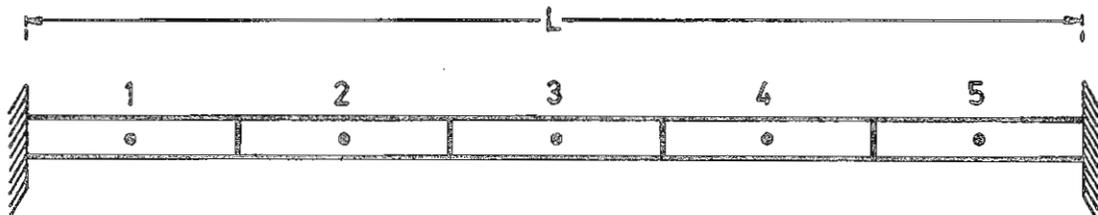


figure 4.8.2  
Barre uniforme en extension

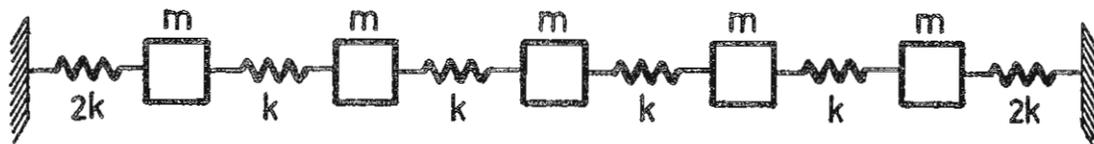


figure 4.8.3  
Système discret équivalent

Le système masses-ressorts équivalent est celui de la figure 4.8.3 avec les ressorts  $k = \frac{5EA}{\ell}$  et  $m = \frac{\rho\ell}{5}$ .

La matrice de raideur s'écrit

$$K = k \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

tandis que la matrice de masse  $M$ , au facteur près, est unitaire.

Posons  $\lambda^2 = \frac{\omega^2 m}{k} = \frac{\omega^2 \rho l^2}{25EA}$ : la séquence de calcul des polynômes caractéristiques successifs de l'équation

$$\begin{bmatrix} 3-\mu & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\mu & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\mu & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\mu & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3-\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = 0$$

s'écrit

$$\begin{aligned} P_0(\mu) &= 1 \\ P_1(\mu) &= 3 - \mu \\ P_2(\mu) &= (2 - \mu)P_1(\mu) - 1 \\ P_3(\mu) &= (2 - \mu)P_2(\mu) - P_1(\mu) \\ P_4(\mu) &= (2 - \mu)P_3(\mu) - P_2(\mu) \\ P_5(\mu) &= (3 - \mu)P_4(\mu) - P_3(\mu) \end{aligned} \tag{4.8.4}$$

Calculons successivement la séquence (4.8.4) pour  $\mu = 0., 1.$  et  $2.$  : le tableau 1 fournit les valeurs  $a(0) = 5, a(1) = 4$  et  $a(2) = 3$ , ce qui montre que la première racine se trouve dans l'intervalle  $[0, 1]$  et la seconde dans l'intervalle  $[1, 2]$ .

Dans le tableau 2, on a ramené par divisions successives l'intervalle d'incertitude sur  $\mu_1$  à

$$0.375 < \mu_1 < 0.5$$

Du fait que la valeur prise par  $P_5(\mu)$  devient relativement petite pour  $\mu = 0.375$ , on a avantage à continuer par interpolation linéaire en utilisant la relation

$$\mu = \alpha + \frac{P_5(\alpha)}{P_5(\alpha) - P_5(\beta)}(\beta - \alpha)$$

Pour  $\alpha = 0.375$  et  $\beta = 0.5$ , on trouve  $\mu = 0.384$  et une nouvelle interpolation linéaire avec  $\alpha = 0.375$  et  $\beta = 0.384$  fournit la valeur  $\mu = 0.3820$  (tableau 3).

$\mu$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$a(\mu)$
0.	1.	3.	5.	7.	9.	20.	5.
1.	1.	2.	1.	-1.	-2.	-3.	4
2.	1.	1.	-1.	-1.	+1.	2.	3

Tableau 1  
Détermination d'un intervalle contenant  $\mu_1$  et  $\mu_2$

$\mu$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$a(\mu)$
0.5	1.	2.5	2.75	1.625	-0.313	-2.406	4.
0.25	1.	2.75	3.813	3.922	3.051	4.468	5
0.375	1.	2.625	3.266	2.682	1.092	0.185	5

Tableau 2  
Resserrement de l'intervalle autour de  $\mu_1$

$\mu$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$a(\mu)$
0.375	1.	2.625	3.266	2.682	1.092	0.185	5
0.384	1.	2.616	3.227	2.599	0.973	-0.053	4
0.3820	1.	2.618	3.236	2.618	1.000	0.0001	4

Tableau 3  
Localisation de  $\mu_1$  par interpolation linéaire

On trouve pour la première fréquence propre

$$\omega_1 = 3.0903 \sqrt{\frac{EA}{\rho l^2}}$$

Pour calculer le premier mode, on procède également par récurrence en posant  $x_1 = 1$ . On calcule successivement

$$\begin{aligned} x_2 &= (3 - \mu)x_1 = 2.618 \\ x_3 &= (2 - \mu)x_2 - x_1 = 3.236 \\ x_4 &= (2 - \mu)x_3 - x_2 = 2.618 \\ x_5 &= (2 - \mu)x_4 - x_3 = 1 \end{aligned}$$

d'où le mode propre correspondant, normé sur sa plus grande composante:

$$\mathbf{x}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0.3090 \\ 0.8090 \\ 1. \\ 0.8090 \\ 0.3090 \end{bmatrix}$$

#### 4.9 Développement d'un vecteur quelconque dans la base des modes propres

Dès que l'on se pose, d'un point de vue mathématique, le problème de calculer la réponse du système (4.3.5)   des conditions initiales donn es ou à une excitation impos e  $\mathbf{p}(t)$ , nous savons par l'algèbre des systèmes linéaires qu'une façon de le résoudre consiste à formuler la réponse dans une base de vecteurs linéairement indépendants.

Puisque l'ensemble des modes propres du système homogène associé (4.4.3) constitue une telle base, jouissant entre autres des propriétés d'orthogonalité (4.5.5), décomposons un vecteur  $\mathbf{x}$  quelconque à  $n$  composantes, ayant la signification physique d'un déplacement, en série de ces modes propres:

$$\mathbf{x} = \sum_{r=1}^n \alpha_r \mathbf{x}_{(r)} \quad (4.9.1)$$

Les coefficients du développement  $\alpha_r$  s'obtiennent aisément en exploitant les relations d'orthogonalité. Pr multipliant (4.9.1) par la matrice des masses et par un mode  $\mathbf{x}_{(k)}$  quelconque, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(k)}^T \mathbf{M} \mathbf{x} &= \sum_{r=1}^n \alpha_r \mathbf{x}_{(k)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(r)} \\ &= \alpha_k \mathbf{x}_{(k)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(k)} \end{aligned}$$

d'où les coefficients

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{x}_{(k)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}}{\mathbf{x}_{(k)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(k)}} \quad (4.9.2)$$

que l'on réintroduit ensuite dans l'expression du développement

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{x}_{(k)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}}{\mathbf{x}_{(k)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(k)}} \cdot \mathbf{x}_{(k)}$$

soit, en associant différemment les produits

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}(k)^T \mathbf{M}}{\mathbf{x}(k)^T \mathbf{M} \mathbf{x}(k)} \right] \mathbf{x}$$

Par comparaison des deux membres, on déduit le développement spectral de la matrice identité

$$\mathbf{I} = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}(k)^T \mathbf{M}}{\mathbf{x}(k)^T \mathbf{M} \mathbf{x}(k)} \quad (4.9.3)$$

Lorsque le vecteur que l'on désire développer a la signification d'une force, on le développera plutôt en termes des distributions de forces d'inertie associées aux modes propres

$$\mathbf{p} = \sum_{r=1}^n \beta_r \mathbf{M} \mathbf{x}(r) \quad (4.9.4)$$

auquel cas on obtient de la même manière les coefficients

$$\beta_k = \frac{\mathbf{x}(k)^T \mathbf{p}}{\mathbf{x}(k)^T \mathbf{M} \mathbf{x}(k)} \quad (4.9.5)$$

#### 4.10 Le quotient de Rayleigh

Le quotient de Rayleigh joue un rôle fondamental dans les méthodes numériques de calcul des modes et fréquences propres, en raison de sa propriété de stationnarité.

Prémultiplions l'équation aux valeurs propres

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{x}$$

par  $\mathbf{x}^T$ . On en déduit l'expression du quotient de Rayleigh

$$\omega^2 = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}} = R(\mathbf{x}) \quad (4.10.1)$$

En particulier, si l'on forme le quotient de Rayleigh associé à un mode propre  $\mathbf{x}(i)$ , on obtient la valeur propre  $\omega_i^2$  correspondante.

Supposons que l'on soit intéressé par la première fréquence propre du système et que l'on dispose d'une approximation  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(1) + \varepsilon \mathbf{y}$  du premier mode. Formons le quotient de Rayleigh associé

$$R(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}(1) + \varepsilon \mathbf{y})^T \mathbf{K} (\mathbf{x}(1) + \varepsilon \mathbf{y})}{(\mathbf{x}(1) + \varepsilon \mathbf{y})^T \mathbf{M} (\mathbf{x}(1) + \varepsilon \mathbf{y})}$$

et exprimons l'erreur sur le mode propre par un développement en série des autres modes propres

$$\mathbf{y} = \sum_{r=2}^n \alpha_r \mathbf{x}(r)$$

avec  $\alpha_r = \frac{\mathbf{x}(r)^T \mathbf{M} \mathbf{y}}{\mu_r}$ . Choisissons la norme  $\mu_r = 1$ , on obtient

$$\omega^2 = \frac{\omega_1^2 + \varepsilon^2 \sum_{r=2}^n \alpha_r^2 \omega_r^2}{1 + \varepsilon^2 \sum_{r=2}^n \alpha_r^2}$$

et, au premier ordre en  $\varepsilon^2$

$$\begin{aligned} \omega^2 &\simeq (\omega_1^2 + \varepsilon^2 \sum_{r=2}^n \alpha_r^2 \omega_r^2) (1 - \varepsilon^2 \sum_{r=2}^n \alpha_r^2) \\ &= \omega_1^2 + \varepsilon^2 \sum_{r=2}^n \alpha_r^2 (\omega_r^2 - \omega_1^2) \end{aligned} \quad (4.10.2)$$

De l'expression approchée (4.10.2), on déduit les résultats suivants qui constituent le *principe de meilleur approximation à la valeur propre* :

1) le quotient de Rayleigh admet un minimum absolu pour  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{(1)}$  et ce minimum absolu est égal à la valeur propre correspondante  $\omega_1^2$ .

2) à une erreur du premier ordre sur le mode  $\mathbf{x}_{(1)}$  correspond une erreur du second ordre sur la valeur propre correspondante.

*Exemple 4.6*

Calculons de façon approchée la fr equance fondamentale du système de la figure 4.8.3 en admettant que la déformée correspondante du système est une parabole:

$$u(x) = 4\frac{x}{\ell}(1 - \frac{x}{\ell})$$

calculée en  $x = \frac{\ell}{10}, \frac{3\ell}{10}, \frac{5\ell}{10}, \frac{7\ell}{10}$  et  $\frac{9\ell}{10}$ . Il en résulte l'approximation du premier mode

$$\mathbf{x}^T = [0.36 \quad 0.84 \quad 1. \quad 0.84 \quad 0.36]$$

Calculons successivement

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = k \begin{bmatrix} 3 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.36 \\ 0.84 \\ 1. \\ 0.84 \\ 0.36 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0.24 \\ 0.32 \\ 0.32 \\ 0.32 \\ 0.24 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = m \begin{bmatrix} 0.36 \\ 0.84 \\ 1. \\ 0.84 \\ 0.36 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{K}\mathbf{x} = 1.0304 k \quad \text{et} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{M}\mathbf{x} = 2.6704 m$$

D'où la valeur propre approchée fournie par le quotient de Rayleigh

$$\omega^2 = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{K}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{M}\mathbf{x}} = 0.38586 \frac{k}{m} = 9.6465 \frac{EA}{\rho \ell^2}$$

et la fr equance propre

$$\omega_1 = 3.1058 \sqrt{\frac{EA}{\rho \ell^2}}$$

Ce résultat n'est entach e que d'une erreur de 0.5% sur la valeur exacte  $3.0902 \sqrt{\frac{EA}{\rho \ell^2}}$  malgré que l'on soit parti d'une approximation relativement grossière du mode propre.

#### 4.11 Calcul par superposition modale de la réponse à des conditions initiales non nulles

La décomposition en série de modes propres réalisée au paragraphe 4.9 permet en particulier de calculer la réponse d'un système ne subissant aucune excitation extérieure mais soumis à des conditions initiales

$$\begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = 0 \\ \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0 \text{ donn es} \end{cases} \quad (4.11.1)$$

Exprimons la réponse sous la forme

$$\mathbf{q} = \sum_{r=1}^n \alpha_r(t) \mathbf{x}_{(r)}$$

avec les coefficients  $\alpha_r(t)$

$$\alpha_r(t) = A_r \cos \omega_r t + B_r \sin \omega_r t$$

Pour obtenir les constantes  $A_r$  et  $B_r$ , on exprime successivement les déplacements et les vitesses initiales

$$\mathbf{q}_0 = \sum_{r=1}^n A_r \mathbf{x}_{(r)}$$

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = \sum_{r=1}^n \omega_r B_r \mathbf{x}_{(r)}$$

En vertu du paragraphe 4.9, on obtient

$$A_r = \frac{\mathbf{x}_{(r)}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0}{\mathbf{x}_{(r)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(r)}} \quad \text{et} \quad \omega_r B_r = \frac{\mathbf{x}_{(r)}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0}{\mathbf{x}_{(r)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(r)}}$$

d'où l'expression de la réponse libre

$$\mathbf{q} = \sum_{r=1}^n \frac{\mathbf{x}_{(r)} \mathbf{x}_{(r)}^T \mathbf{M}}{\mu_r} \left[ \mathbf{q}_0 \cos \omega_r t + \dot{\mathbf{q}}_0 \frac{\sin \omega_r t}{\omega_r} \right] \quad (4.11.2)$$

*Exemple 4.7*

A titre d'application, reprenons le double pendule du paragraphe 3.5 et recalculons sa réponse à un déplacement initial par la formule (4.11.2). Les matrices de raideur et de masse du système s'écrivent

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} ka^2 + mg\ell & -ka^2 \\ -ka^2 & ka^2 + mg\ell \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m\ell^2 & 0 \\ 0 & m\ell^2 \end{bmatrix}$$

et la résolution du problème aux valeurs propres fournit les solutions propres

$$\omega_1^2 = \frac{g}{\ell}, \quad \mathbf{x}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2^2 = \frac{g}{\ell} + 2\frac{k}{m} \frac{a^2}{\ell^2}, \quad \mathbf{x}_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

avec les masses généralisées

$$\mathbf{x}_{(1)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(1)} = \mathbf{x}_{(2)}^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{(2)} = 2m\ell^2$$

Lorsqu'un des deux pendules est écarté de sa position d'équilibre, les conditions initiales du système sont

$$\mathbf{q}_0^T = [\theta_0 \quad 0], \quad \dot{\mathbf{q}}_0^T = [0 \quad 0]$$

et leur projection dans la base modale fournit les doubles produits

$$\mathbf{x}_{(1)}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0 = \mathbf{x}_{(2)}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0 = m\ell^2 \theta_0$$

$$\mathbf{x}_{(i)}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0 = 0$$

On possède ainsi tous les éléments pour calculer par la relation (4.11.2) l'expression de la réponse aux conditions initiales

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\theta_0}{2} \cos \omega_1 t + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{\theta_0}{2} \cos \omega_2 t = \frac{\theta_0}{2} \begin{bmatrix} \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t \\ \cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t \end{bmatrix}$$

expression que nous avons déjà obtenue au paragraphe 3.5 pour mettre en évidence le phénomène de battement.

### 4.12 Calcul par superposition modale de la réponse à une excitation extérieure

Soit à résoudre le problème

$$\begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0 \text{ donn es} \end{cases} \quad (4.12.1)$$

Ainsi que nous avons procédé dans le paragraphe précédent pour calculer la réponse libre du système, nous pouvons décomposer la solution de (4.12.1) en série de modes propres

$$\mathbf{q} = \sum_{r=1}^n \eta_r(t) \mathbf{x}_{(r)} \quad (4.12.2)$$

Substituant (4.12.2) dans l'équation du mouvement (4.12.1) et ses conditions initiales, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n [\eta_r \mathbf{K} \mathbf{x}_{(r)} + \ddot{\eta}_r \mathbf{M} \mathbf{x}_{(r)}] &= \mathbf{p}(t) \\ \sum_{r=1}^n \eta_r(0) \mathbf{x}_{(r)} &= \mathbf{q}_0, \quad \sum_{r=1}^n \dot{\eta}_r(0) \mathbf{x}_{(r)} = \dot{\mathbf{q}}_0 \end{aligned} \quad (4.12.3)$$

Pr emultiplions ensuite (3.12.3) par un mode  $\mathbf{x}_{(k)}^T$  et exploitons les relations d'orthogonalité (4.5.5) : on obtient un système d'équations découplées entre elles

$$\begin{cases} \eta_k \gamma_k + \ddot{\eta}_k \mu_k = \mathbf{x}_{(k)}^T \mathbf{p}(t) & (k = 1, \dots, n) \\ \eta_k(0) = \frac{\mathbf{x}_{(k)}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_0}{\mu_k}, \quad \dot{\eta}_k(0) = \frac{\mathbf{x}_{(k)}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_0}{\mu_k} \end{cases}$$

Ce sont les *équations normales du système*. Tenant compte de (4.5.7), on les écrit sous les forme

$$\begin{cases} \omega^2 \eta_k + \ddot{\eta}_k = \Phi_k(t) & (k = 1, \dots, n) \\ \eta_k(0), \dot{\eta}_k(0) \text{ donn es} \end{cases} \quad (4.12.4)$$

où  $\Phi_k(t)$  est le *facteur de participation du mode  $k$*    la charge  $\mathbf{p}(t)$

$$\Phi_k(t) = \frac{\mathbf{x}_{(k)}^T \mathbf{p}}{\mu_k}$$

On a ainsi transformé le système (4.12.1) comportant  $n$  degrés de liberté en  $n$  oscillateurs indépendants (4.12.4)   un seul degré de liberté. Après calcul de chacun des modes et résolution s epar e de chacun des oscillateurs (4.12.4) associés, on peut reconstruire la réponse complète par superposition (4.12.2).

Pour des systèmes à grand nombre de degrés de liberté, il est envisageable de réaliser le calcul préalable de tous les modes propres. On est alors amené à limiter la superposition (4.12.2) aux quelques premiers modes propres : on doit dans ce cas veiller à garder un nombre suffisant de modes pour que la troncature du développement ne dénature pas complètement la solution du système.

#### Résolution de l'équation normale

Pour exprimer la réponse de l'équation normale (4.12.4)

$$\begin{cases} \omega^2 \eta + \ddot{\eta} = \Phi(t) \\ \eta(0), \dot{\eta}(0) \text{ donn es} \end{cases} \quad (4.12.5)$$

on peut utiliser l'une des techniques de résolution décrites dans le chapitre 2. On peut également procéder par transformation de Laplace de (4.12.6)

$$\mathcal{L}[\eta] = \int_0^\infty e^{-st} \eta(t) dt = \eta(s) \quad (4.12.6)$$

$$\mathcal{L}[\ddot{\eta}] = -\dot{\eta}(0) - s\eta(0) + s^2 \mathcal{L}[\eta] \quad (4.12.7)$$

Substituons (4.12.6) et (4.12.7) dans l'équation (4.12.5) transformée : on obtient la transformée de la réponse

$$\eta(s) = \frac{\Phi(s) + s\eta_0 + \dot{\eta}_0}{\omega^2 + s^2} \quad (4.12.8)$$

On inverse ensuite (4.12.8) en utilisant les résultats élémentaires

$$\frac{1}{\omega^2 + s^2} = \mathcal{L}\left[\frac{\sin \omega t}{\omega}\right] \quad (4.12.9)$$

$$\frac{s}{\omega^2 + s^2} = \mathcal{L}[\cos \omega t] \quad (4.12.10)$$

et en notant que

$$f(s) = f_1(s) f_2(s)$$

a pour transformée inverse le produit de convolution

$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (4.12.11)$$

On obtient

$$\eta(t) = \dot{\eta}_0 \frac{\sin \omega t}{\omega} + \eta_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t \Phi(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (4.12.12)$$

Les deux premiers termes de (4.12.12) constituent la réponse libre aux conditions initiales. Le dernier terme constitue la réponse forcée : celle-ci s'exprime comme une somme des réponses à des impulsions élémentaires  $\Phi(\tau)d\tau$ .

Exemple 4.8

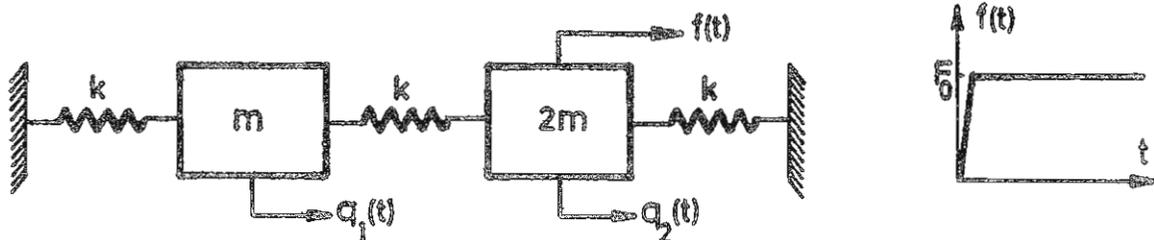


figure 4.12.1  
Système à 2 degrés de liberté soumis à un échelon

Etudions le système à 2 degrés de liberté suivant, sollicité par application brusque d'une charge  $F_0$  sur le degré de liberté  $q_2$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}k(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2}k(q_2 - q_1)^2$$

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}(m\dot{q}_1^2 + 2m\dot{q}_2^2)$$

ses équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \end{bmatrix} u(t)$$

On calcule en premier lieu ses solutions propres

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2(k - \omega^2 m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

ce qui donne les racines  $\omega^2 = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} \frac{k}{m}$

soit

$$\omega_1^2 = 0.63397 \frac{k}{m} \quad \omega_2^2 = 2.3660 \frac{k}{m}$$

les modes propres

$$\mathbf{x}_{(1)}^T = [1 \quad 1.3660] \quad \mathbf{x}_{(2)}^T = [1 \quad -0.3660]$$

et les masses généralisées

$$\mu_1 = 4.7321 m \quad \mu_2 = 1.2679 m$$

On peut également normer les modes de telle sorte que  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ :

$$\mathbf{x}_{(1)}^T = \frac{1}{\sqrt{m}} [0.45970 \quad 0.62796]$$

$$\mathbf{x}_{(2)}^T = \frac{1}{\sqrt{m}} [0.88807 \quad -0.32506]$$

On calcule ensuite les facteurs de participation modaux  $\Phi_1(t)$  et  $\Phi_2(t)$ :

$$\Phi_1(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m}} 0.62796 u(t)$$

$$\Phi_2(t) = -\frac{F_0}{\sqrt{m}} 0.32506 u(t)$$

où  $u(t)$  est la fonction échelon.

Par substitution dans (4.12.12), on exprime l'évolution des coordonnées normales

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= \frac{F_0}{\sqrt{m}} 0.62796 \frac{1}{\omega_1} \int_0^t \sin \omega_1(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{F_0}{\sqrt{m}} \frac{0.62796}{\omega_1^2} [1 - \cos \omega_1 t] \\ \eta_2(t) &= -\frac{F_0}{\sqrt{m}} \frac{0.32506}{\omega_2^2} [1 - \cos \omega_2 t] \end{aligned}$$

On construit enfin les réponses  $q_1(t)$  et  $q_2(t)$  par superposition modale

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \eta_1(t) \times \frac{0.45970}{\sqrt{m}} + \eta_2(t) \times \frac{0.88807}{\sqrt{m}} \\ &= \frac{F_0}{k} [0.45530(1 - \cos \omega_1 t) - 0.12201(1 - \cos \omega_2 t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2(t) &= \eta_1(t) \times \frac{0.62796}{\sqrt{m}} + \eta_2(t) \times \frac{0.32506}{\sqrt{m}} \\ &= \frac{F_0}{k} [0.62195(1 - \cos \omega_1 t) + 0.04466(1 - \cos \omega_2 t)] \end{aligned}$$

A noter que  $q_1(t)$  et  $q_2(t)$  oscillent respectivement autour des valeurs moyennes  $\bar{q}_1 = 0.3333 \frac{F_0}{k}$  et  $\bar{q}_2 = 0.6666 \frac{F_0}{k}$  qui sont précisément les déformations statiques sous la charge constante  $F_0$ .

La figure 4.12.2 représente l'évolution de la réponse en fonction du temps pour chacun des deux degrés de liberté du système.

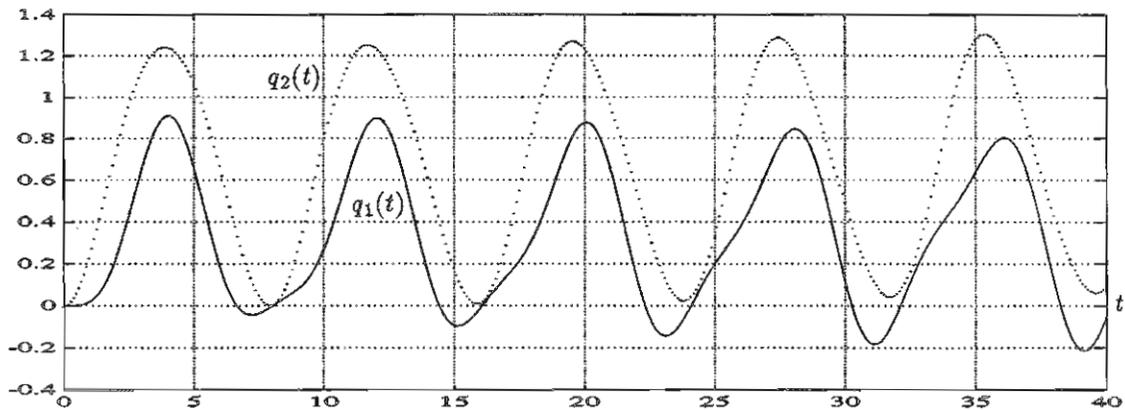


figure 4.12.2  
Réponse du système à 2 degrés de liberté : sollicitation impulsionnelle

### 4.13 Réponse non amortie à une excitation harmonique

Dans le cas où l'excitation appliquée à un système à  $n$  degrés de liberté est harmonique, le calcul de la réponse forcée est notablement simplifié par le fait que l'on sait que celle-ci est, elle aussi, harmonique : en effet l'équation

$$\mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = s \cos \omega t \quad (4.13.1)$$

admet la réponse forcée  $\mathbf{q} = \mathbf{x} \cos \omega t$  dont l'amplitude est solution de

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{x} = \mathbf{s} \quad (4.13.2)$$

En l'exprimant sous forme inverse

$$\mathbf{x} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \mathbf{s}$$

on s'aperçoit que la matrice  $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1}$ , de terme général  $a_{ij}(\omega^2)$ , peut être interprétée comme la *matrice des coefficients d'influence dynamiques* du système.

On peut, en se référant au paragraphe 4.9, exprimer la solution de (4.13.2) sous la forme d'une série de modes propres. Substituant le développement (4.9.1) dans (4.13.2), on obtient l'expression

$$\sum_r \alpha_r (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{x}_{(r)} = \mathbf{s} \quad (4.13.3)$$

dont on calcule les coefficients en faisant appel aux relations d'orthogonalité (4.5.5). Il en résulte le développement spectral de la réponse harmonique

$$\mathbf{x} = \sum_r \left[ \frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2} \frac{\mathbf{x}_{(r)} \mathbf{x}_{(r)}^T}{\mu_r} \right] \mathbf{s} \quad (4.13.4)$$

dans lequel la contribution spectrale de chaque mode est affectée du *coefficient d'amplification*  $(\omega_r^2 - \omega^2)^{-1}$ .

Le coefficient d'influence dynamique  $a_{ij}(\omega^2)$ , que l'on interprète comme la *réponse observée au noeud  $i$  pour une excitation d'amplitude unitaire au noeud  $j$* , a pour expression

$$a_{ij}(\omega^2) = \sum_r \left[ \frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2} \frac{x_{(r)i} x_{(r)j}}{\mu_r} \right] \quad (4.13.5)$$

où  $x_{(r)i}$  désigne la composante  $i$  du mode  $\mathbf{x}_{(r)}$ .

En particulier, pour un coefficient d'influence dynamique principal

$$a_{ii}(\omega^2) = \sum_r \left[ \frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2} \frac{x_{(r)i}^2}{\mu_r} \right] \quad (4.13.6)$$

et l'on note qu'il est une fonction toujours croissante de  $\omega^2$ , puisque

$$\frac{d a_{ii}}{d \omega^2} = \sum_r \left[ \frac{1}{\mu_r} \left( \frac{x_{(r)i}}{\omega_r^2 - \omega^2} \right)^2 \right] > 0 \quad (4.13.7)$$

Un coefficient d'influence dynamique principal a donc nécessairement l'allure de la figure 4.13.1.

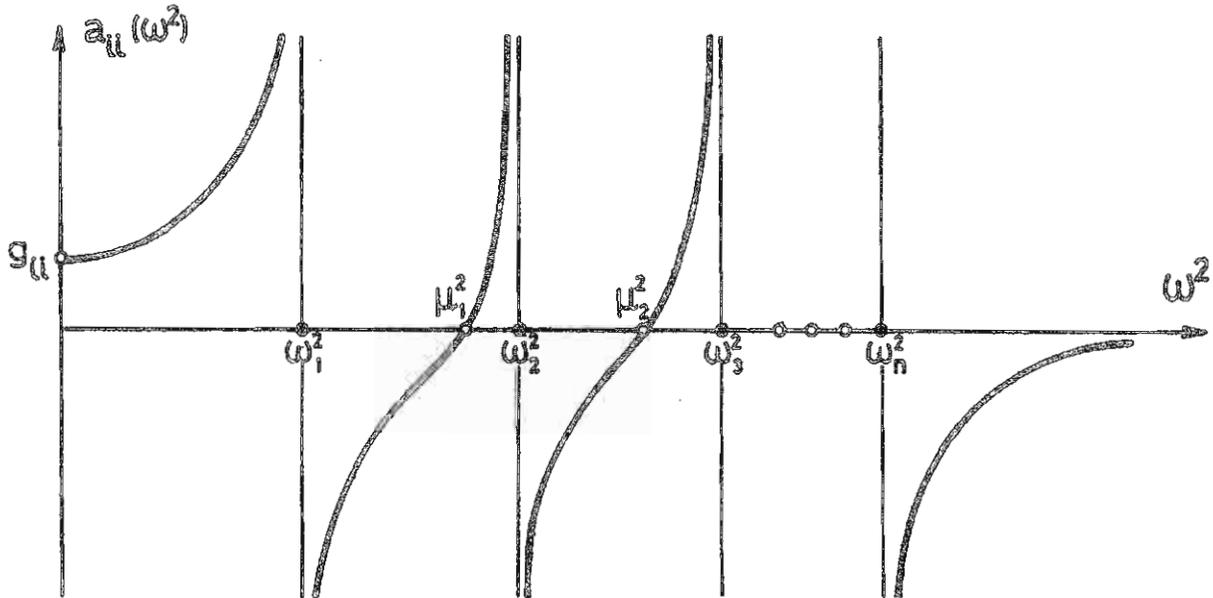


figure 4.13.1

Evolution d'un coefficient d'influence dynamique principal avec la fr equance (système non amorti)

On en déduit que :

1. le système passe par une résonance pour chacune des fréquences propres ( $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ );
2. le degré de liberté  $x_j$  reste insensible à une excitation qui lui est appliquée avec une fr equance égale à l'une des fréquences d'antirésonance ( $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ ).

Les fréquences d'antirésonance observées, contrairement aux fréquences de résonance, dépendent du choix du point d'excitation. On peut d'ailleurs les interpréter comme les fréquences de résonance qui caractériseraient le système si on en bloquait le degré de liberté  $x_j$ .

Rappelons que le concept d'antirésonance, dont l'application la plus caractéristique est l'amortisseur dynamique de vibration, a été longuement discut e dans le chapitre 3.

Le diagramme de la figure 4.13.1 est d'une importance considérable pour la détermination expérimentale des fréquences propres de vibration d'un système à nombre de degrés de liberté quelconque : chacune des résonances relevées permet en effet de localiser une fr equance propre. Toutefois, de la même manière que pour l'oscillateur à un degré de liberté, le diagramme de réponse est profondément modifi e par la présence de l'amortissement. D'où l'intérêt du paragraphe suivant.

#### 4.14 Réponse du système amorti à une excitation harmonique

Un système mécanique réel est toujours le si ege d'une certaine dissipation. Convenons, de la même manière que nous l'avons fait au chapitre 3, que l'on peut la représenter en adoptant l'hypothèse (due à Rayleigh) de proportionnalité à la vitesse de déformation. Si l'on désigne par

$$f_d = -B\dot{q}$$

le terme des forces d'amortissement, les équations d'équilibre dynamique du système amorti soumis à une excitation harmonique s'écrivent

$$\mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{s} \cos \omega t = \Re[\mathbf{s} e^{i\omega t}] \quad (4.14.1)$$

Le traitement mathématique rigoureux de l'équation (4.14.1) requiert la résolution du problème aux valeurs propres complexe

$$(\mathbf{K} + p\mathbf{B} + p^2\mathbf{M})\mathbf{x} = 0 \quad (4.14.2)$$

L'ensemble des vecteurs propres de (4.14.2) sert alors de base pour le développement en série de la solution de (4.14.1).

Pour un système faiblement amorti, la solution de l'équation (4.14.1) peut être considérablement simplifiée en tirant parti de la faible importance relative des termes d'amortissement vis-à-vis de ceux de raideur et d'inertie. Il est possible de démontrer que les deux hypothèses suivantes sont cohérentes avec celle de faible amortissement :

1. les modes propres du système ne sont pas modifiés par la présence de l'amortissement;
2. à chaque mode propre est associé un facteur d'amortissement que l'on peut mesurer par un essai de résonance à la fréquence correspondante.

Ces hypothèses reviennent à admettre que le système se réduit, comme dans le cas non amorti, à  $n$  oscillateurs découplés et que la matrice d'amortissement  $\mathbf{B}$  est rendue diagonale dans la base des modes propres en même temps que  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$ , soit

$$\mathbf{x}_{(r)}^T \mathbf{B} \mathbf{x}_{(s)} = 2\varepsilon_r \omega_r \mu_r \delta_{rs} \quad (4.14.3)$$

où  $\varepsilon_r$  désigne le pourcentage d'amortissement critique du mode .

Tenant compte des relations d'orthogonalité (4.5.5) et (4.14.3), on peut développer la solution de (4.14.1)

$$\mathbf{q} = \Re[(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{B} - \omega^2\mathbf{M})^{-1} \mathbf{s} e^{i\omega t}]$$

en série de modes propres de la même manière que dans le cas non amorti; on obtient

$$\mathbf{q} = \Re \left[ \sum_r \frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\varepsilon_r \omega_r \omega} \frac{\mathbf{x}_{(r)} \mathbf{x}_{(r)}^T \mathbf{s}}{\mu_r} e^{i\omega t} \right] \quad (4.14.4)$$

On note, par rapport au cas non amorti, trois modifications importantes dans le comportement du système :

- une limitation en amplitude de chacune des résonances du système ;
- un léger décalage de la résonance en amplitude pour chacun des oscillateurs ;
- un déphasage progressif au voisinage de la résonance.

Un choix particulier de  $\mathbf{B}$  qui vérifie la condition d'orthogonalité (4.14.3) consiste à exprimer que l'amortissement se répartit dans le système comme les raideurs, comme les masses ou comme une combinaison linéaire de ceux-ci:

$$\mathbf{B} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{M} \quad (4.14.5)$$

Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  et les pourcentages d'amortissement critique associés à chaque mode vérifient alors la relation

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2} \left( \alpha \omega_r + \frac{\beta}{\omega_r} \right) \quad (4.14.6)$$

*Exemple 4.9*

Considérons le système amorti à deux degrés de liberté de la figure 4.14.1 , que l'on soumet à une excitation harmonique  $f(t) = F \cos \omega t$  au niveau du degré de liberté 1.

Les caractéristiques du système sont les suivantes:

$$\begin{aligned} m &= 1 \text{ kg} & c &= 20 \text{ N} \times \text{s/m} \\ k &= 10^4 \text{ N/m} & F &= 1 \text{ N} \end{aligned}$$

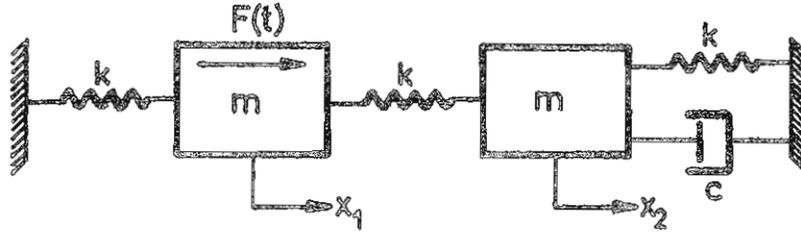


figure 4.14.1  
Système amorti à deux degrés de liberté

et ses équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^4 & -10^4 \\ -10^4 & 2 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ 0 \end{bmatrix}$$

*Solutions propres du système non amorti*

Calculons tout d'abord les fréquences propres et les modes propres du système conservatif associé

$$\begin{vmatrix} 2 \cdot 10^4 - \omega^2 m & -10^4 \\ -10^4 & 2 \cdot 10^4 - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

On obtient

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 100 \text{ rad/sec} & \mathbf{x}_{(1)}^T &= [1 \quad 1] \\ \omega_2 &= 173.2 \text{ rad/sec} & \mathbf{x}_{(2)}^T &= [1 \quad -1] \end{aligned}$$

et les masses généralisées  $\mu_1 = \mu_2 = 2$ .

*Calcul des pourcentages d'amortissement critique*

Afin d'évaluer l'importance relative de l'amortissement dans le système, calculons le pourcentage d'amortissement critique de chaque mode par la relation (4.14.3). On obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\mathbf{x}_{(1)}^T \mathbf{B} \mathbf{x}_{(1)}}{2 \mu_1 \omega_1} = \frac{20}{2 \times 2 \times 100} = 5\% \\ \varepsilon_2 &= \frac{\mathbf{x}_{(2)}^T \mathbf{B} \mathbf{x}_{(2)}}{2 \mu_2 \omega_2} = \frac{20}{2 \times 2 \times 100 \sqrt{3}} = 2.89\% \end{aligned}$$

La faible importance relative des coefficients  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  justifie l'hypothèse d'amortissement diagonal.

*Construction d'une matrice d'amortissement diagonal*

Calculons par la relation (4.14.6) deux coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \left( \alpha \omega_1 + \frac{\beta}{\omega_1} \right) \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \left( \alpha \omega_2 + \frac{\beta}{\omega_2} \right)$$

ce qui équivaut à

$$\mu_1 (\alpha \omega_1^2 + \beta) = \mathbf{x}_{(1)}^T \mathbf{B} \mathbf{x}_{(1)} \quad \text{et} \quad \mu_2 (\alpha \omega_2^2 + \beta) = \mathbf{x}_{(2)}^T \mathbf{B} \mathbf{x}_{(2)}$$

On trouve

$$\begin{aligned} \alpha \omega_1^2 + \beta &= 10 \\ \alpha \omega_2^2 + \beta &= 10 \end{aligned}$$

d'où les valeurs  $\alpha = 0$  et  $\beta = 10$ .

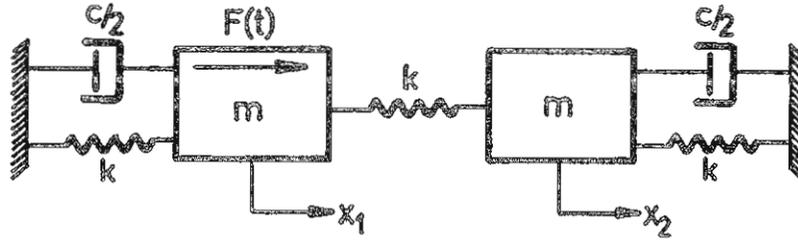


figure 4.14.2  
Système modifié avec amortissement diagonal

L'équation (4.14.5) fournit la matrice d'amortissement proportionnelle à celle des masses

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

L'hypothèse d'amortissement diagonal conduit donc à remplacer le système de la figure 4.14.1 par le système modifié de la figure 4.14.2.

*Valeurs propres de l'équation de départ*

Les valeurs propres du système de départ, c'est-à-dire avant diagonalisation de l'amortissement, vérifient l'équation du quatrième degré

$$\text{dtm} \begin{bmatrix} 2 \cdot 10^4 + p^2 & -10^4 \\ -10^4 & 2 \cdot 10^4 + 20p + p^2 \end{bmatrix} = 0$$

La résolution de cette équation donne les valeurs

$$p_{1,2} = 100.09(-0.050 \pm i)$$

$$p_{3,4} = 172.66(-0.029 \pm i)$$

dont la partie imaginaire est à interpréter comme la fréquence propre du mode et la partie réelle, son pourcentage d'amortissement critique. Ce calcul confirme, pour le système envisagé, la validité de l'hypothèse d'amortissement diagonal que nous avons adoptée.

Le calcul des modes correspondants donne les vecteurs complexes

$$x_{(1)} = \begin{bmatrix} 0.98996 \pm 0.09962 i \\ 1 \end{bmatrix}$$

et

$$x_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.98 \pm 0.1718 i \end{bmatrix}$$

Il montre que l'effet le plus important d'un faible amortissement est d'injecter une partie imaginaire dans le mode propre, ce qui supprime le caractère synchrone de la solution vibrations libres.

*Calcul de la réponse amortie*

Retournant à l'hypothèse d'amortissement diagonal, nous calculons la réponse amortie du système par la relation de superposition (4.14.4)

$$q_1(t) = \Re[(A_1(\omega) + A_2(\omega))e^{i\omega t}] = H_1 \cos(\omega t - \phi_1)$$

et

$$q_2(t) = \Re[(A_1(\omega) - A_2(\omega))e^{i\omega t}] = H_2 \cos(\omega t - \phi_2)$$

avec les coefficients d'amplification dynamique des modes

$$A_1(\omega) = \left\{ \mu_1 \omega_1^2 \left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) + 2i\varepsilon_1 \frac{\omega}{\omega_1} \right] \right\}^{-1}$$

$$A_2(\omega) = \left\{ \mu_2 \omega_2^2 \left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) + 2i\varepsilon_2 \frac{\omega}{\omega_2} \right] \right\}^{-1}$$

les réponses en amplitude

$$H_1(\omega) = |A_1(\omega) + A_2(\omega)|$$

$$H_2(\omega) = |A_1(\omega) - A_2(\omega)|$$

et les déphasages

$$\operatorname{tg}\phi_1 = -\frac{\Im(A_1 + A_2)}{\Re(A_1 + A_2)} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg}\phi_2 = -\frac{\Im(A_1 - A_2)}{\Re(A_1 - A_2)}$$

Le calcul numérique des réponses en amplitude et des déphasages en fonction de la fréquence d'excitation, fournit les diagrammes 4.14.3 et 4.14.4.

Une façon très instructive de représenter les fonctions de transfert consiste à construire le diagramme de Nyquist correspondant. On y observe que chaque résonance donne lieu à une portion de cercle de diamètre inversement proportionnel au taux d'amortissement du mode.

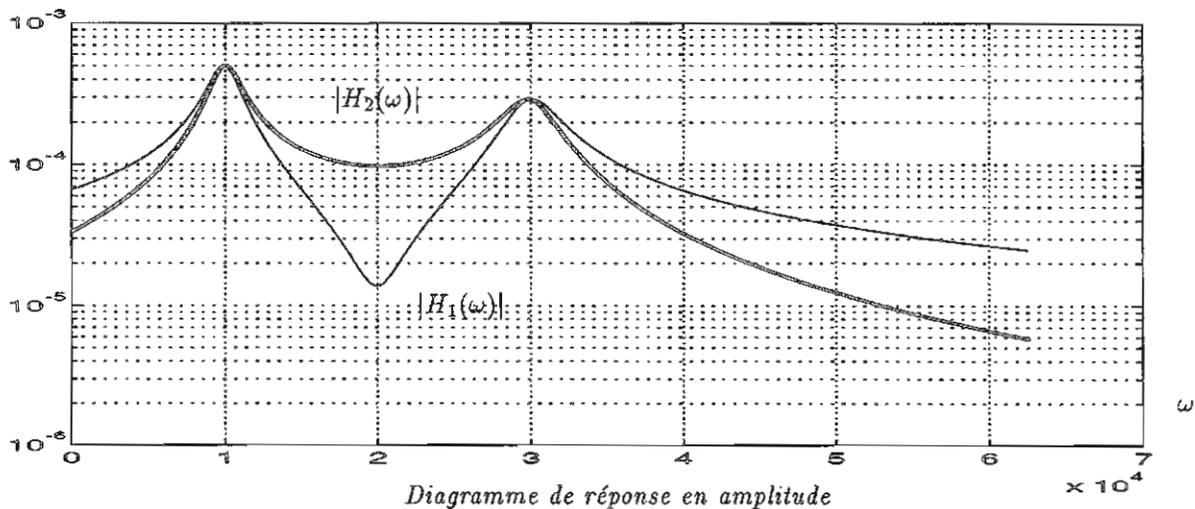


Diagramme de réponse en amplitude  
figure 4.14.3

#### 4.15 Réponse forcée harmonique des systèmes en chaîne

Nous avons déjà mis en évidence dans le paragraphe 4.2 qu'un système en chaîne est caractérisé par le fait qu'un degré de liberté n'y est couplé qu'avec les degrés de liberté immédiatement voisins. Lorsque ceux-ci sont classés dans l'ordre dans lequel ils sont rencontrés lorsqu'on progresse d'une extrémité à l'autre du système, les matrices de masse et de raideur revêtent une forme strictement bande. Cette propriété peut être mise à profit pour le calcul des fréquences propres de vibration par méthode de transfert.

Le concept de système en chaîne s'avère particulièrement utile pour le calcul des vibrations et la réponse harmonique forcée en torsion d'arbres et systèmes de transmission plus complexes tels que boîtes d'engrenages (méthode de Holzer-Tolle). On l'utilise quelquefois aussi pour l'analyse des poutres en flexion (méthode de Myklestad).

Tout système en chaîne peut être décomposé en  $n$  cellules élémentaires assurant le couplage mécanique entre deux points successifs. Son état est complètement défini par la description des déplacements  $q_r$  en chaque point et des efforts conjugués  $Q_r$ .

Pour chacune des cellules, on peut écrire une relation matricielle entre le vecteur d'état  $(q_r, Q_r)^T$  au point  $r$  et le vecteur d'état  $(q_{r-1}, Q_{r-1})^T$  au point  $r-1$ .

$$\begin{bmatrix} q_r \\ Q_r \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{r,r-1} \begin{bmatrix} q_{r-1} \\ Q_{r-1} \end{bmatrix} \quad (4.15.1)$$

La matrice  $\mathbf{T}_{r,r-1}$  est la *matrice de transfert* de la cellule  $r-1$ . Elle est l'analogue de la matrice de transfert d'un quadripôle que l'on définit en électricité.

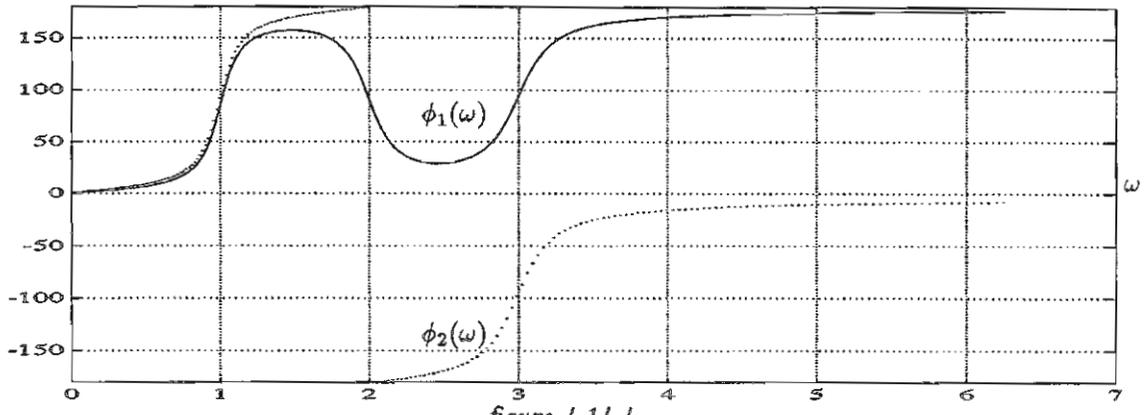


figure 4.14.4  
Diagramme de réponse en phase

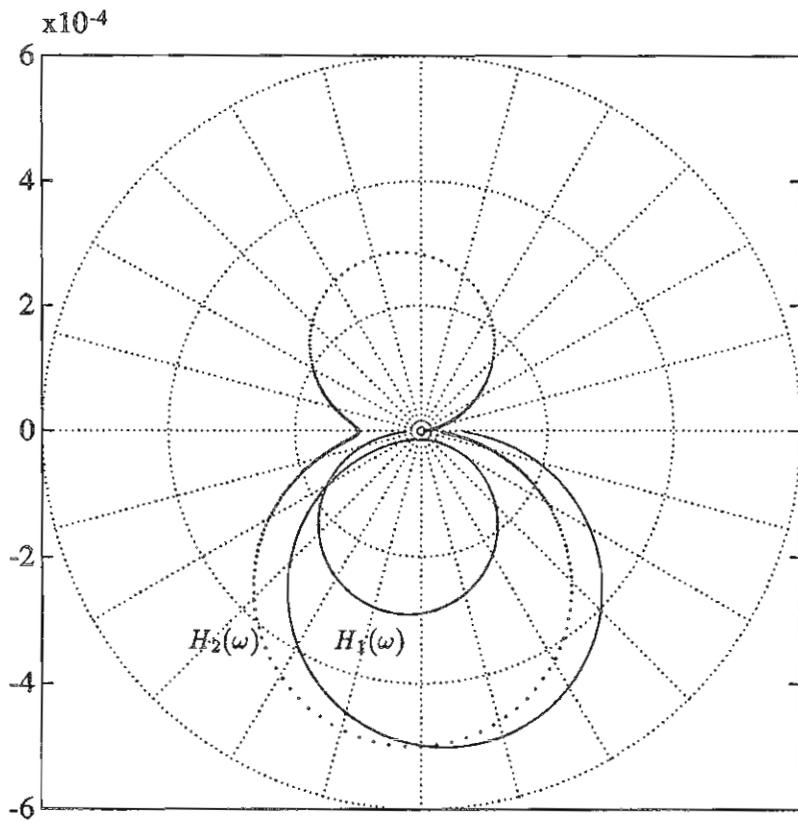


figure 4.14.5  
Diagramme de Nyquist



figure 4.15.1  
Structure d'un système en chaîne

*Les chaînes en torsion*

Pour les problèmes de vibrations de torsion, on distingue les deux constituants fondamentaux suivants :

a) le disque infiniment rigide

Si  $\theta_r$  et  $C_r$  désignent respectivement la rotation et le couple au point  $r$ , on a

$$\begin{aligned}\theta_r &= \theta_{r-1} \\ C_r &= C_{r-1} + I\ddot{\theta}_{r-1}\end{aligned}$$

et l'hypothèse de mouvement harmonique fournit les relations amplitudes de couple et de rotation

$$\begin{aligned}\theta_r &= \theta_{r-1} \\ C_r &= -\omega^2 I \theta_{r-1} + C_{r-1}\end{aligned}$$

D'où la matrice de transfert du disque en régime harmonique

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15.2)$$

et le coefficient d'influence dynamique

$$a_{rr}(\omega^2) = \frac{\theta_r}{C_r} = -\frac{1}{\omega^2 I} \quad (4.15.3)$$

Le disque infiniment rigide est un filtre mécanique passe-bas puisque son coefficient d'influence dynamique (4.15.3) tend vers 0 pour une vitesse de rotation infinie.

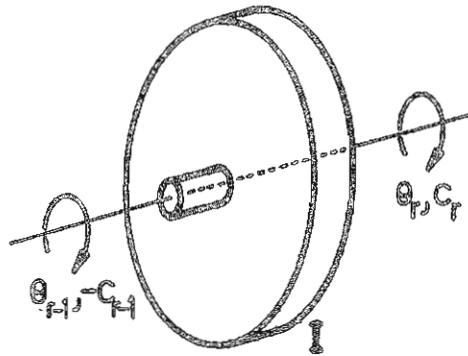


figure 4.15.2  
Schéma rendu libre d'un disque

b) l'arbre élastique

L'autre constituant fondamental des systèmes mécaniques en torsion est l'arbre élastique que l'on suppose de masse négligeable. Celle-ci peut en effet toujours être reportée sur un disque adjacent.

On a les relations

$$\begin{aligned}C_r &= C_{r-1} \\ C_r &= k(\theta_r - \theta_{r-1})\end{aligned}$$

d'où la matrice de transfert de l'arbre élastique

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

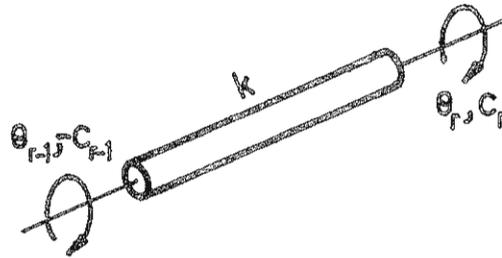


figure 4.15.3  
Schéma rendu libre d'un arbre élastique

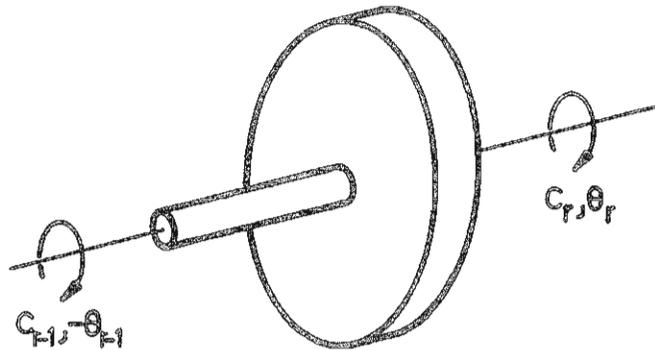


figure 4.15.4  
Connexion d'un arbre et d'un disque

On notera que, dans les deux cas, la matrice de transfert est unimodulaire.

On peut démontrer qu'il s'agit là d'une propriété générale des matrices de transfert de systèmes passifs.

On peut ensuite connecter l'arbre élastique au disque par élimination du vecteur d'état à la jonction du disque et de l'arbre.

Il vient

$$\begin{bmatrix} \theta_r \\ C_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{r-1} \\ C_{r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \\ -\omega^2 I & 1 - \frac{\omega^2 I}{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{r-1} \\ C_{r-1} \end{bmatrix}$$

En général, pour une chaîne en torsion comportant un nombre de cellules quelconque  $n$ , on peut calculer par récurrence l'état à une extrémité en fonction de l'autre extrémité

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta_n \\ C_n \end{bmatrix} &= \mathbf{T}_{n,n-1} \begin{bmatrix} \theta_{n-1} \\ C_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{T}_{n,n-1} \cdot \mathbf{T}_{n-1,n-2} \dots \mathbf{T}_{21} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ C_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.15.4}$$

La matrice

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{n,n-1} \cdot \mathbf{T}_{n-1,n-2} \dots \mathbf{T}_{21} \tag{4.15.5}$$

est la matrice de transfert de la chaîne.

Explicitons-la sous la forme

$$\mathbf{T}(\omega^2) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\theta\theta}(\omega^2) & \mathbf{T}_{\theta c}(\omega^2) \\ \mathbf{T}_{c\theta}(\omega^2) & \mathbf{T}_{cc}(\omega^2) \end{bmatrix} \tag{4.15.6}$$

Pour déduire de la relation ci-dessus les fréquences propres de vibration du système, on notera qu'une extrémité libre vérifiera la condition  $C = 0$  tandis qu'en une extrémité fixée,  $\theta = 0$ .

D'où, selon les conditions aux limites, les fréquences propres du système sont solutions de

cas libre-libre  $\mathbf{T}_{c\theta}(\omega^2) = 0$

cas libre-encastr�e	$T_{cc}(\omega^2) = 0$
cas encastr�e-libre	$T_{\theta\theta}(\omega^2) = 0$
cas encastr�e-encastr�e	$T_{\theta c}(\omega^2) = 0$

C'est la *méthode de Holzer et Tolle* pour le calcul des fréquences de vibration de chaˆenes en torsion. Le plus souvent, les fréquences propres sont obtenues numériquement à partir d'un diagramme de la fonction  $T_{xx}(\omega^2)$  obtenu par calcul de  $T_{xx}(\omega^2)$  pour un certain nombre de valeurs d'essai.

*Exemple 4.10. Le réducteur de vitesse*

On considère le cas d'un volant d'inertie  $I$  que l'on attaque par l'intermédiaire d'un réducteur de vitesse caract eris e par le rapport  $\tau$ . On recherche le coefficient d'influence dynamique  $\frac{\theta_2}{C_2}$    l'extr emite de gauche. L'extr emite de droite est libre. Pour le réducteur de vitesse, on a, en progressant de droite à gauche, la relation cinématique

$$\theta_g = -\frac{1}{\tau}\theta_d$$

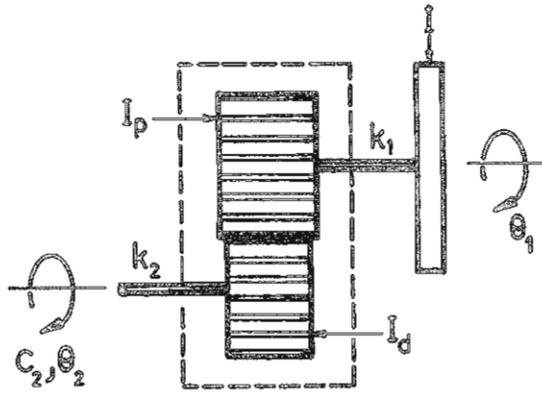


figure 4.15.5  
Réducteur de vitesse

En exprimant d'autre part la conservation du travail fourni

$$C_g\theta_g = C_d\theta_d$$

on obtient la relation de transfert

$$\begin{bmatrix} \theta_g \\ C_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_d \\ C_d \end{bmatrix}$$

Progressant de droite à gauche, il vient pour l'ensemble du système

$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I_d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 I_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega^2 I}{k_1} & \frac{1}{k_1} \\ -\omega^2 I & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Définissons le moment d'inertie équivalent du réducteur

$$I_{eq} = I_d + \tau^2 I_p$$

On a successivement, en effectuant les produits de droite à gauche

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ C_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau} & 0 \\ +\frac{\omega^2 I_{eq}}{\tau} & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega^2 I}{k_1} & \frac{1}{k_1} \\ -\omega^2 I & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau}(1 - \frac{\omega^2 I}{k_1}) & -\frac{1}{\tau k_1} \\ \frac{\omega^2 I_{eq}}{\tau}(1 - \frac{\omega^2 I}{k_1}) + \tau\omega^2 I & \frac{\omega^2 I_{eq}}{\tau k_1} - \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et l'expression du coefficient d'influence dynamique

$$a_{22}(\omega^2) = \frac{\theta_2}{C_2} = \frac{-1 + \omega^2 \left( \frac{I}{k_1} + \frac{I_{eq} + \tau^2 I}{k_2} \right) - \omega^4 \frac{II_{eq}}{k_1 k_2}}{\omega^2 (I_{eq} + \tau^2 I) - \omega^4 \frac{II_{eq}}{k_1}}$$

Le système libre-libre a pour fréquence de résonance la fréquence qui annule le dénominateur

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{k_1 (I_{eq} + \tau^2 I)}{II_{eq}}}$$

De même, les fréquences propres du système encasturé-libre sont les racines du numérateur

$$1 - \omega^2 \left( \frac{I}{k_1} + \frac{I_{eq} + \tau^2 I}{k_2} \right) + \omega^4 \frac{II_{eq}}{k_1 k_2} = 0$$

Au signe de la rotation près, le système initial vu de l'extrémité 2 est donc l'équivalent du système de la figure 4.15.6.

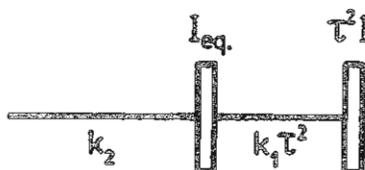


figure 4.15.6

Schéma équivalent du réducteur de vitesse de la figure 4.15.5

Le coefficient d'influence dynamique principal  $a_{22}(\omega^2)$  est représenté à la figure 4.15.7.

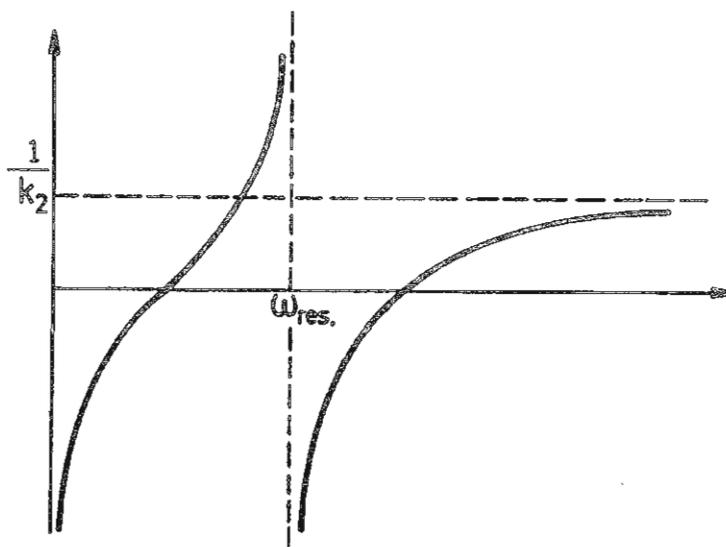


figure 4.15.7

Coefficient d'influence dynamique du réducteur de vitesse

Celle-ci montre qu'à une très haute fréquence, seule la torsion intervient, et qu'à très basse fréquence, le système se comporte comme une inertie pure.

## 4.16 Tabulation de la méthode de Holzer

Reprenons les équations du mouvement (4.2.4) d'une chaîne en torsion

$$k_i(\theta_i - \theta_{i+1}) + k_{i-1}(\theta_i - \theta_{i-1}) + I_i\ddot{\theta}_i = T_i \quad (4.16.1)$$

avec les conditions terminales

$$\begin{aligned} I_1\ddot{\theta}_1 + k_1(\theta_1 - \theta_2) &= T_1 & \text{ou} & \theta_1 = 0 \\ I_N\ddot{\theta}_N + k_{N-1}(\theta_N - \theta_{N-1}) &= T_N & \text{ou} & \theta_N = 0 \end{aligned}$$

selon qu'il s'agit d'une extr emitt e libre ou fixée.

Sommons ces équations pour l'ensemble de la chaîne ; on trouve que les couples d'origine extérieure (réactions comprises) équilibrent les couples d'inertie au niveau des disques

$$\sum_{i=1}^N I_i\ddot{\theta}_i = \sum_{i=1}^N T_i \quad (4.16.2)$$

Si l'on adopte l'hypothèse de régime harmonique, l'équation générale (4.2.3) peut être réécrite en termes d'amplitudes de couples et de déplacements

$$-I_i\omega_i^2\theta_i + k_i(\theta_i - \theta_{i+1}) + k_{i-1}(\theta_i - \theta_{i-1}) = T_i \quad (4.16.3)$$

Faisons la somme des équations (4.16.3) avec les conditions aux limites appropriées jusqu'à une station  $n$  ; on obtient

$$k(\theta_n - \theta_{n+1}) = \sum_{i=1}^n (\omega^2 I_i\theta_i + T_i)$$

et on en déduit l'expression de l'angle de torsion  $\theta_{n+1}$  à partir de l'état des stations précédentes

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n (T_i + \omega^2 I_i\theta_i) \quad (4.16.4)$$

Le calcul récurrent des angles successifs  $\theta_i$ , pour un  $\theta_1$  et une fréquence d'excitation  $\omega$  donn es, peut être organis e de façon tabulée à partir de cette relation. Le tableau 4 montre la séquence des opérations à réaliser dans le cas le plus général.

Lorsqu'on ne s'intéresse qu'aux vibrations libres du système, les couples  $T_i$  ne comportent que la réaction à la station de départ qui est d'ailleurs nulle si celle-ci est bloquée. On peut dans ce cas simplifier le tableau de Holzer en remplaçant les colonnes 5, 6, 7 et 8 par la seule colonne

$$T_1 - \sum_{i=1}^n \omega^2 I_i\theta_i$$

Pour initialiser le calcul, on s'impose une valeur de  $\theta_1$  ou de  $T_1$  selon que la première extr emitt e est libre ou bloquée. A l'autre extr emitt e, on vérifie que

$$T_1 - \sum_{i=1}^N \omega^2 I_i\theta_i = 0 \quad \text{ou} \quad \theta_N = 0$$

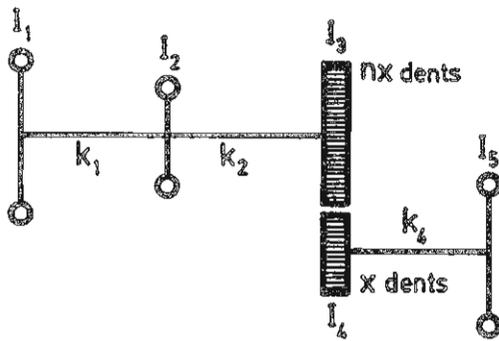
selon qu'elle est également libre ou bloquée.

ddl	$I_i$	$\omega^2 I_i$	$\theta_i$	$-\omega^2 I_i \theta_i$	$-\sum_i \omega^2 I_i \theta_i$	$T_i$	$\sum_i T_i$	$\sum_i (T_i - \omega^2 I_i \theta_i)$	$k$	$\frac{1}{k} \sum(\dots)$
1										
2										
3										
·	(1)	(2)	(3)	(4) = $-(2) \times (3)$	(5) = $\sum(4)$	(6)	(7) = $\sum(6)$	(8) = $(5) + (7)$	(9)	(10) = $(8)/(9)$
·										
·										
N										

Tableau 4  
Méthode de Holzer tabulée

Exemple 4.16.1

La figure 4.16.1 décrit un système avec transmission par engrenage dont les caractéristiques sont les suivantes



- $I_1 = 6.32 \text{ kg} \times \text{m}^2$
- $I_2 = 1.26 \text{ kg} \times \text{m}^2$
- $I_3 = 0.17 \text{ kg} \times \text{m}^2$
- $I_4 = 0.02 \text{ kg} \times \text{m}^2$
- $I_5 = 0.3 \text{ kg} \times \text{m}^2$
- $k_1 = 270 \text{ kN} \times \text{m/rad}$
- $k_2 = 340 \text{ kN} \times \text{m/rad}$
- $k_4 = 1100 \text{ kN} \times \text{m/rad}$
- rapport de transmission : 2

figure 4.16.1  
réducteur avec transmission par engrenage

- Montrer que la fréquence fondamentale du système est de l'ordre de 52.5 Hz.
- Si, lorsque le système vibre selon son premier mode, l'accélération maximum est de  $6000 \text{ rad/sec}^2$  pour  $I_5$ , calculer l'amplitude du couple transmis de  $I_4$  à  $I_3$ .

Calcul de la fréquence fondamentale

Du fait que le système est libre aux deux extrémités, les couples extérieurs n'interviennent pas dans le tableau de Holzer.

On peut donc simplifier le tableau comme ci-après. Du fait que l'extrémité 1 est libre, on initialise le calcul avec  $\theta_1 = 1$ . On vérifie à l'extrémité de droite que la somme des couples d'inertie est nulle :

$$\sum_{i=1}^N \omega^2 I_i \theta_i = 0$$

Le réducteur de vitesse présente une particularité : la relation cinématique  $\theta_4 = -2\theta_3$  entraîne une division par 2 du couple d'inertie transmis.

Construisons successivement les tableaux de Holzer pour  $\omega = 330 \text{ rad/sec}$  et  $\omega = 350 \text{ rad/sec}$ : on obtient les valeurs numériques reprises dans les tableaux 5 et 6. Par interpolation linéaire, on calcule la fréquence propre du système qui annule la résultante des couples d'inertie

$$\omega = 330 + \frac{0.116}{0.116 + 0.409} \times 20 = 334.4 \text{ rad/sec}$$

On peut d'ailleurs vérifier (tableau 7) que cette valeur annule bien la somme des couples d'inertie.

$N^\circ$	ddl	$I_i$	$\omega^2 I_i$	$\theta_i$	$\omega^2 I_i \theta_i$	$-\sum_i \omega^2 I_i \theta_i$	$k$	$\frac{-1}{k} \sum(\dots)$
1		6.32	6.882	1	6.882	6.882	2.7	-2.549
2		1.26	1.372	-1.549	2.125	-4.757	3.4	-1.399
3		0.17	0.1851	-2.948	-0.545	-4.212		
r�educ- teur				$\times -2$		$\times -\frac{1}{2}$		
4		0.02	0.022	5.896		2.106	11	0.191
5		0.3	0.327	6.087	1.990	0.116		
Unités		$kgm^2$	$10^5$	rad	$10^5$	$10^5$	$10^5$	

Tableau 5 :  $\omega=330$  rad/sec

$N^\circ$	ddl	$I_i$	$\omega^2 I_i$	$\theta_i$	$\omega^2 I_i \theta_i$	$-\sum_i \omega^2 I_i \theta_i$	$k$	$\frac{-1}{k} \sum(\dots)$
1		6.32	7.742	1	7.742	-7.742	2.7	-2.867
2		1.26	1.543	-1.867	-2.881	-4.861	3.4	-1.430
3		0.17	0.208	-3.297	-0.686	-4.175		
r�educ- teur				$\times -2$		$\times -\frac{1}{2}$		
4		0.02	0.025	6.594		2.088	11	0.190
5		0.3	0.368	6.784	2.497	-0.409		
Unit�es		$kgm^2$	$10^5$	rad	$10^5$	$10^5$	$10^5$	

Tableau 6 :  $\omega=350$  rad/sec

$N^\circ$	ddl	$I_i$	$\omega^2 I_i$	$\theta_i$	$\omega^2 I_i \theta_i$	$-\sum_i \omega^2 I_i \theta_i$	$k$	$\frac{-1}{k} \sum(\dots)$
1		6.32	7.067	1	7.067	7.067	2.7	-2.617
2		1.26	1.408	-1.617	-2.277	-4.790	3.4	-1.409
3		0.17	0.180	-3.026	-0.575	-4.215		
r�educ- teur				$\times -2$		$\times -\frac{1}{2}$		
4		0.02	0.022	+6.052		+2.108	11	0.192
5		0.3	0.336	6.244	2.098	0.01		
Unités		$kgm^2$	$10^5$	rad	$10^5$	$10^5$	$10^5$	

Tableau 7 :  $\omega=334.4$  rad/secCalcul du couple transmis de  $I_4$     $I_3$ 

Le tableau 7 montre que lorsque  $\theta_5 = 6.244$  rad, auquel correspond une accélération angulaire de  $6.982 \cdot 10^5$  rad/sec<sup>2</sup>, le couple transmis par  $I_4$     $I_3$  a une amplitude de  $2.108 \cdot 10^5$  N. Pour une accélération de  $6000$  rad/sec<sup>2</sup>, le couple transmis vaut donc

$$2.108 \cdot 10^5 \times \frac{6000}{6.982 \cdot 10^5} = 1811 \text{ N} \times \text{m}$$

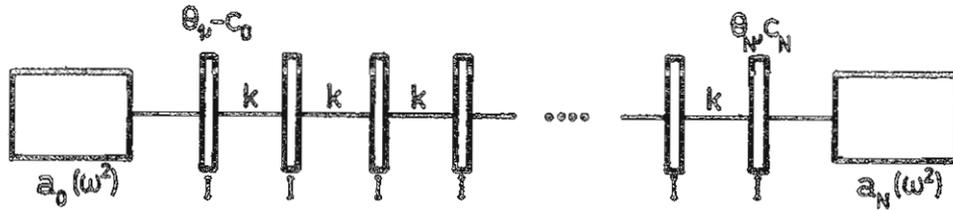


figure 4.17.1  
Système répétitif

#### 4.17 Le cas des systèmes répétitifs : la méthode de Biot et Lewis

Le cas où la chaîne résulte de la répétition de la même cellule élémentaire est assez fréquent. Notamment dans un moteur cylindrique, le moment d'inertie équivalent (moyenne sur un cycle) de chacun des pistons, de même que la raideur en torsion de la partie du vilebrequin séparant deux cylindres, restent constants.

On considère donc le cas d'une chaîne comportant  $n$  disques et bras élastiques identiques et se terminant sur des impédances terminales passives quelconques caractérisées par leur coefficient d'influence dynamique.

Le vecteur d'état à gauche d'un disque est  $(\theta_m, C_{m-1})$ . Le vecteur d'état à droite d'un disque est  $(\theta_m, C_m)$ . Les impédances d'extrémité sont passives et caractérisées par les coefficients d'influence dynamique

$$a_0(\omega^2) = \frac{\theta_1}{C_0} \quad a_N(\omega^2) = \frac{\theta_N}{-C_N}$$

Pour la cellule élémentaire constituée d'un disque et d'un bras élastique, on a les relations

$$\begin{aligned} C_m &= C_{m-1} - \omega^2 I \theta_m \\ C_{m-1} &= k(\theta_m - \theta_{m-1}) \end{aligned}$$

D'où, par élimination de  $C_m$  et  $C_{m-1}$ , il vient

$$\begin{aligned} k(\theta_{m+1} - 2\theta_m + \theta_{m-1}) + \omega^2 I \theta_m &= 0 \quad m = 2, \dots, n-1 \\ \text{et aux extrémités} \\ k(\theta_2 - \theta_1) - C_0 + \omega^2 I \theta_1 &= 0 \\ k(\theta_N - \theta_{N-1}) - C_N - \omega^2 I \theta_N &= 0 \end{aligned} \tag{4.17.1}$$

Le principe de la méthode consiste à essayer une solution générale de la forme

$$\theta_m = A \sin(m\mu + \phi) \tag{4.17.2}$$

Par substitution dans la première équation, on obtient

$$2kA[\sin(m\mu + \Phi) \cos \mu - \sin(m\mu + \Phi)] + \omega^2 IA \sin(m\mu + \Phi) = 0$$

et après simplification

$$\omega^2 - \frac{2k}{I}(1 - \cos \mu) = 0$$

d'où l'expression de  $\omega$  en fonction du paramètre  $\mu$

$$\omega = 2\sqrt{\frac{k}{I}} \sin \frac{\mu}{2} \tag{4.17.3}$$

Pour déterminer les constantes  $\mu$  et  $\Phi$ , on exprime les conditions d'extrémité en éliminant les couples au profit des variables angulaires en utilisant la définition des coefficients d'influence

à gauche

$$\left(\omega^2 I - k - \frac{1}{a_0}\right) \sin(\mu + \Phi) + k[\sin(\mu + \Phi) \cos \mu + \cos(\mu + \Phi) \sin \mu] = 0$$

soit, après substitution de (4.17.3) et développement de  $\sin(\mu + \Phi)$  et  $\cos(\mu + \Phi)$

$$\left[\cos \mu \left(1 - \frac{1}{a_0 k}\right) - 1\right] \sin \Phi + \left(1 - \frac{1}{a_0 k}\right) \sin \mu \cos \Phi = 0 \quad (4.17.4)$$

  droite

$$\left(\omega^2 I - k - \frac{1}{a_N k}\right) \sin(N\mu + \Phi) + k \sin[(N-1)\mu + \Phi] = 0$$

on substitue de même (4.17.3) et on développe  $\sin(N\mu + \Phi)$  et  $\sin[(N-1)\mu + \Phi]$  :

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 - 2 \cos \mu - \frac{1}{a_N k}\right) \cos N\mu + \cos(N-1)\mu\right] \sin \Phi + \\ & \left[\left(1 - 2 \cos \mu - \frac{1}{a_N k}\right) \sin N\mu + \sin(N-1)\mu\right] \cos \Phi = 0 \end{aligned}$$

Si l'on note enfin que

$$\begin{aligned} 2 \cos \mu \cos N\mu &= \cos(N+1)\mu + \cos(N-1)\mu \\ 2 \cos \mu \sin N\mu &= \sin(N+1)\mu + \sin(N-1)\mu \end{aligned}$$

on peut encore écrire

$$\left[\left(1 - \frac{1}{a_N k}\right) \cos N\mu - \cos(N+1)\mu\right] \sin \Phi + \left[\left(1 - \frac{1}{a_N k}\right) \sin N\mu - \sin(N+1)\mu\right] \cos \Phi = 0 \quad (4.17.5)$$

Les équations (4.17.4) et (4.17.5) forment un système linéaire homogène en  $\sin \Phi$  et  $\cos \Phi$  D'où l'équation aux valeurs propres  $\mu$

$$\begin{vmatrix} b_0 \cos \mu - 1 & b_0 \sin \mu \\ b_N \cos N\mu - \cos(N+1)\mu & b_N \sin N\mu - \sin(N+1)\mu \end{vmatrix} = 0$$

avec  $b_0 = \left(1 - \frac{1}{a_0 k}\right)$  et  $b_N = \left(1 - \frac{1}{a_N k}\right)$  que l'on résout en notant que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \Im(a - ib)(c + id)$$

On pose

$$\begin{aligned} a - ib &= b_0(\cos \mu - i \sin \mu) - 1 = b_0 e^{-i\mu} - 1 \\ c + id &= b_N(\cos N\mu + i \sin N\mu) - (\cos(N+1)\mu + i \sin(N+1)\mu) \\ &= b_N e^{iN\mu} - e^{i(N+1)\mu} \end{aligned}$$

et l'équation aux valeurs propres revêt la forme

$$\begin{aligned} & \Im[(b_0 e^{-i\mu} - 1)(b_N e^{iN\mu} - e^{i(N+1)\mu})] \\ &= \Im[e^{iN\mu}(b_0 e^{-i\mu} - 1)(b_N - e^{i\mu})] \\ &= \Im[e^{iN\mu}(b_0 e^{-\frac{i\mu}{2}} - e^{\frac{i\mu}{2}})(b_N e^{-\frac{i\mu}{2}} - e^{\frac{i\mu}{2}})] = 0 \end{aligned}$$

Posant enfin

$$A_0 e^{i\psi_0} = (b_0 e^{-\frac{i\mu}{2}} - e^{\frac{i\mu}{2}}) \quad \text{et} \quad A_N e^{i\psi_N} = (b_N e^{-\frac{i\mu}{2}} - e^{\frac{i\mu}{2}})$$

les angles  $\psi_0$  et  $\psi_N$  étant obtenus par

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \frac{1 + b_0}{1 - b_0} \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = (2ka_0 - 1) \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} \quad (4.17.6)$$

$$\operatorname{tg} \psi_N = \frac{1 + b_N}{1 - b_N} \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = (2ka_N - 1) \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} \quad (4.17.7)$$

on doit annuler

$$\Im[e^{iN\mu} A_0 e^{i\psi_0} A_N e^{i\psi_N}] = 0$$

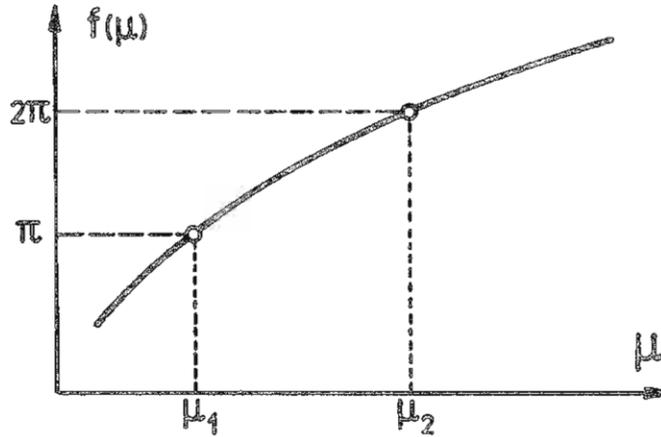


figure 4.17.2  
Résolution de l'équation aux valeurs propres

et l'équation aux valeurs propres prend la forme finale

$$N\mu + \psi_0 + \psi_N = k\pi \tag{4.17.8}$$

Résoudre l'équation ci-dessus revient à rechercher les points d'intersection de la courbe  $f(\mu) = N\mu + \psi_0 + \psi_N$  avec les horizontales d'ordonnée  $k\pi$ .

On notera que la solution ci-dessus n'est valable que dans le domaine de fréquence

$$\omega < 2\sqrt{\frac{k}{I}} \text{ puisque } \left| \sin \frac{\mu}{2} \right| < 1$$

La valeur  $\omega_c = 2\sqrt{\frac{k}{I}}$  est la fréquence de coupure du filtre et correspond à la fréquence propre de la cellule élémentaire en dessous de laquelle restent toutes les fréquences propres du système.



figure 4.17.3  
Cellule élémentaire

*Exemple 4.12*

Reprenons l'exemple de la figure 4.8.3 qui résulte de la discrétisation de la barre uniforme en extension de la figure 4.8.2 . Il s'agit d'une chaîne répétitive en extension à laquelle la méthode développée dans ce paragraphe est applicable à condition de remplacer les disques d'inertie par des masses, les ressorts en torsion par les ressorts en extension et les rotations par des déplacements.

Les coefficients d'influence dynamique des impédances terminales ont pour valeur

$$a_0(\omega^2) = a_5(\omega^2) = \frac{1}{2k}$$

et les équations (4.17.6), (4.17.7) et (4.17.8) donnent

$$\psi_0 = \psi_5 = 0 \rightarrow \mu = \frac{r\pi}{5} \quad (r = 1, \dots, 5)$$

On en déduit l'expression analytique des fréquences propres par (4.17.3)

$$\begin{aligned}\omega_r &= 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{r\pi}{10} \\ &= 10\sqrt{\frac{EA}{\rho\ell^2}} \sin \frac{r\pi}{10} \quad (k = 1, \dots, 5)\end{aligned}$$

On trouve les valeurs successives

$$\omega_r = 3.0902, 6.1566, 8.0902, 9.5106 \text{ et } 10\sqrt{\frac{EA}{\rho\ell^2}} \text{ rad/sec}$$

Pour calculer les modes propres, on retourne à l'expression de la solution générale

$$\theta_m = A \sin(m\mu + \Phi)$$

et on recherche tout d'abord le déphasage  $\Phi$  par l'une des équations (4.17.4) ou (4.17.5) exprimant les conditions aux limites. Partant par exemple de (4.17.4), avec les valeurs particulières des impédances  $a_0(\omega^2)$  et  $a_5(\omega^2)$ , on obtient

$$\sin \Phi(1 + \cos \mu) + \cos \Phi \sin \mu = 0$$

soit

$$\text{tg} \Phi = \frac{-\sin \mu}{1 + \cos \mu}$$

dont on déduit

$$\Phi = -\frac{\mu}{2}$$

Le mode a donc pour expression générale

$$\theta_m = A \sin\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)\mu\right]$$

Pour le premier mode par exemple, on obtient

$$\mathfrak{X}_{(1)} = \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{10} \\ \sin \frac{3\pi}{10} \\ \sin \frac{5\pi}{10} \\ \sin \frac{7\pi}{10} \\ \sin \frac{9\pi}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.30902 \\ 0.80902 \\ 1.0 \\ 0.80902 \\ 0.30902 \end{bmatrix}$$

On retrouve bien *analytiquement* la solution que nous avons calculée précédemment par voie numérique.

## 5. Les Systèmes Continus

---

Continu, continu !  
... On ne sait pas quand ça s'arrête !



### 5.1 Introduction

Le fait de réserver un chapitre particulier à l'étude des systèmes continus ne doit pas être interprété comme le fait que ceux-ci présentent un comportement différent des systèmes discrets. Au contraire, le système continu doit être regardé comme le cas limite du système discret lorsque le nombre de degrés de liberté de celui-ci devient infini.

Les systèmes continus possèdent les mêmes caractéristiques en vibration que les systèmes discrets : ils sont susceptibles de vibrer librement à certaines fréquences propres, selon un mouvement représenté par la forme propre associée ; fréquences propres et modes propres forment cette fois une séquence infinie du fait de l'infinité de degrés de liberté du système.

Des concepts tels que l'orthogonalité entre modes propres de fréquences différentes, et donc la possibilité de développer un déplacement quelconque en série de modes propres, restent d'application pour les systèmes continus. De même, le quotient de Rayleigh conserve sa propriété remarquable de stationnarité.

Tous ces concepts, nous allons les présenter tout d'abord dans le cas d'un système continu de comportement très simple : la barre en extension. Nous les étendrons ensuite à d'autres systèmes continus monodimensionnels de grande importance pratique tels que la corde vibrante et surtout la poutre en flexion.

Nous établirons tout d'abord l'équation différentielle du système en exprimant l'équilibre local et nous montrerons ensuite comment le calcul variationnel peut restituer celle-ci.

L'intérêt du calcul variationnel deviendra apparent à la fin du chapitre lorsque nous aborderons les méthodes d'approximation des systèmes continus en vibration : nous verrons que l'approche variationnelle constitue une méthode puissante de réduction d'un système continu à un système discret, que l'on résout alors par les techniques du chapitre précédent.

### 5.2 Choix d'un système physique simple : la barre en extension

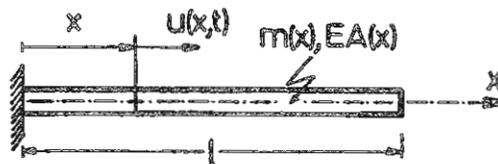


figure 5.2.1a  
Barre en extension

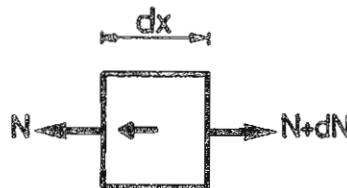


figure 5.2.1b  
Schéma rendu libre d'une tranche

Considérons le problème des vibrations axiales  $u(x, t)$  d'une barre de longueur  $\ell$ , caractérisée par une rigidité en extension  $EA(x)$  et une masse répartie  $m(x)$ . L'équilibre d'une tranche  $dx$  de celle-ci met en jeu les forces représentées sur la figure 5.2.1b. L'effort normal  $N$  s'exerçant sur chacune des faces de l'élément est proportionnel à la déformée axiale supposée infinitésimale :

$$N(x) = EA\epsilon = EA \frac{du}{dx} \quad (5.2.1)$$

L'équilibre en translation selon  $x$  fournit la relation

$$N + dN - N - m\ddot{u}dx = 0$$

soit

$$\frac{dN}{dx} = m\ddot{u} \quad (5.2.2)$$

Combinée avec la relation contrainte-déformation (5.2.1), l'équation d'équilibre (5.2.2) donne lieu à l'équation différentielle

$$\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) = m \frac{d^2 u}{dt^2} \quad (5.2.3)$$

En l'absence de sollicitation extérieure, on la complète par les conditions aux limites

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0 & \quad \text{ou} \quad N(0, t) = EA \frac{du}{dx} \Big|_0 = 0 \\ u(\ell, t) = 0 & \quad \text{ou} \quad N(\ell, t) = EA \frac{du}{dx} \Big|_\ell = 0 \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

à chacune des extrémités selon que celle-ci est fixée ou libre (auquel cas l'effort normal  $N$  s'y annule).

Bien que le problème des vibrations libres de la barre posé par les équations (5.2.3) et (5.2.4) diffère en apparence de celui d'un système discret, sa solution résulte de la même démarche. Examinons la possibilité d'un mouvement synchrone, c'est-à-dire tel que la forme générale du déplacement ne change pas mais que seule son amplitude varie avec le temps

$$u(x, t) = u(x) \Phi(t) \quad (5.2.5)$$

Substituons la forme (5.2.5) de la solution dans l'équation du mouvement (5.2.3)

$$\Phi \frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) = \ddot{\Phi} m u$$

soit, en regroupant respectivement de part et d'autre de l'égalité les termes dépendant du temps et de  $x$

$$\frac{1}{m u} \frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) = \frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} = -\omega^2$$

Le choix du signe de la constante  $\omega^2$  est vérifié a posteriori.

D'une part la partie temporelle de la solution est régie par l'équation

$$\ddot{\Phi} + \omega^2 \Phi = 0 \quad (5.2.6)$$

et admet comme solution générale

$$\Phi(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (5.2.7)$$

Elle représente donc bien, comme dans le cas discret, un mouvement vibratoire. Le choix contraire du signe de la constante aurait conduit à un mouvement exponentiel dans le temps, ce qui est physiquement inacceptable.

D'autre part, la partie spatiale de la solution est régie par l'équation différentielle

$$\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) + \omega^2 m u = 0 \quad (5.2.8)$$

à laquelle il faut adjoindre les conditions aux limites

$$\begin{aligned} u(0) = 0 & \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dx} \Big|_0 = 0 \\ u(\ell) = 0 & \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dx} \Big|_\ell = 0 \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

### 5.3 Détermination analytique des fréquences et modes propres dans le cas de la barre encastrée-libre de caractéristiques uniformes

Examinons le cas de la barre de caractéristiques uniformes  $EA$  et  $m$  obéissant aux conditions aux limites

$$u(0) = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_l = 0 \quad (5.3.1)$$

L'équation différentielle

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + \omega^2 m u = 0 \quad (5.3.2)$$

admet la solution générale

$$u(x) = A \sin \lambda \frac{x}{\ell} + B \cos \lambda \frac{x}{\ell} \quad (5.3.3)$$

avec le paramètre non dimensionnel

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2 m \ell^2}{EA} \quad (5.3.4)$$

Appliquons à (5.3.3) les conditions aux limites (5.3.1): d'une part,  $u(0) = 0$  entraîne  $B = 0$  et d'autre part

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_l = 0$$

entraîne  $A \frac{\lambda}{\ell} \cos \lambda = 0$  dont la seule solution non triviale implique  $\cos \lambda = 0$ , ce qui donne lieu aux racines caractéristiques

$$\lambda_k = (2k - 1) \frac{\pi}{2} \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.3.5)$$

Retournant à l'expression du paramètre (5.3.4), on en déduit les pulsations propres successives de la barre

$$\omega_k = (2k - 1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{m \ell^2}} \quad (5.3.6)$$

Les formes propres correspondantes, du fait du caractère homogène de l'équation (5.3.2), ne sont connues qu'à une constante près. Elles ont pour expression

$$u_{(k)} = A \sin (2k - 1) \frac{\pi x}{2\ell} \quad (5.3.7)$$

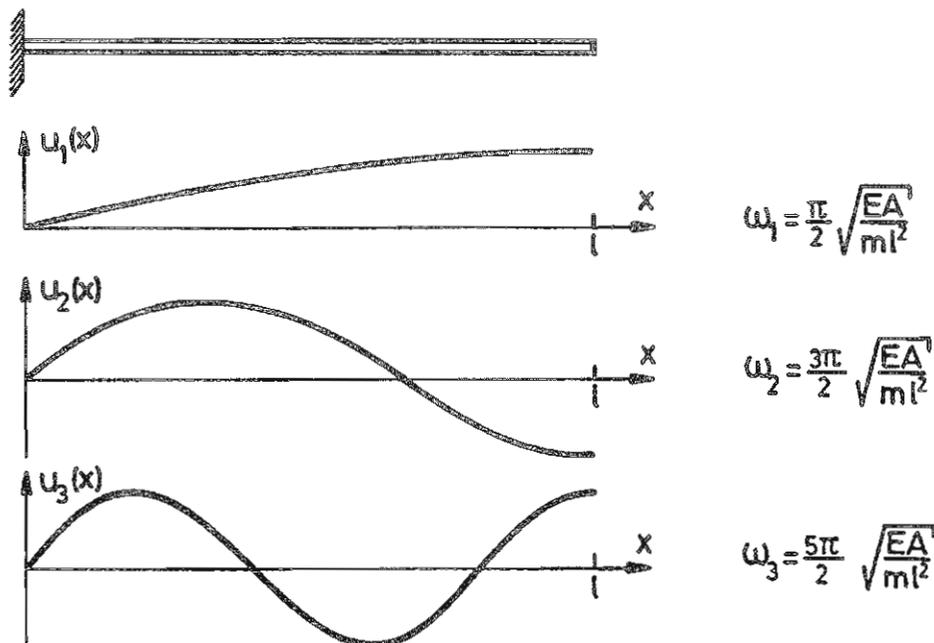


figure 5.3.1

Modes propres de la barre encastrée - libre

Le système continu est donc caractérisé, tout comme le système discret, par une série de fréquences propres auxquelles le système est susceptible de vibrer librement, c'est-à-dire sans apport d'aucune force extérieure. La seule différence avec le système discret réside dans le fait que la série de solutions

$$\begin{cases} \omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots < \omega_n^2 < \dots \\ u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(n)}, \dots \end{cases} \quad (5.3.8)$$

est cette fois infinie.

Les autres cas de conditions aux limites donnent lieu à une solution analogue.

#### 5.4 Caractère auto-adjoint du problème aux valeurs propres

Le problème aux valeurs propres

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(EA \frac{du}{dx}) + \omega^2 mu = 0 \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad \frac{du}{dx} \Big|_l = 0 \quad (5.4.1)$$

auquel nous avons abouti constitue un problème aux valeurs propres de Sturm- Liouville, que l'on peut écrire sous la forme standard

$$L(u) = \omega^2 mu \quad (5.4.2)$$

avec l'opérateur différentiel

$$L(\dots) = -\frac{d}{dx} [EA \frac{d}{dx}(\dots)] \quad (5.4.3)$$

Ce problème aux valeurs propres avec les conditions associées (5.2.9) est *auto- adjoint*. En effet, considérons deux fonctions différentes  $u_1$  et  $u_2$  vérifiant les conditions aux limites du problème.

On a d'une part, par intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_0^l u_2 L(u_1) dx &= - \int_0^l \frac{d}{dx} [EA \frac{du_1}{dx}] u_2 dx \\ &= \left[ -EA \frac{du_1}{dx} u_2 \right]_0^l + \int_0^l EA \frac{du_1}{dx} \frac{du_2}{dx} dx \end{aligned}$$

et de la même manière

$$\int_0^l u_1 L(u_2) dx = \left[ -EA \frac{du_2}{dx} u_1 \right]_0^l + \int_0^l EA \frac{du_2}{dx} \frac{du_1}{dx} dx$$

Si l'on tient compte des conditions aux limites du problème, on déduit de ces deux égalités la propriété

$$\int_0^l u_2 L(u_1) dx = \int_0^l u_1 L(u_2) dx = \int_0^l EA \frac{du_1}{dx} \frac{du_2}{dx} dx \quad (5.4.4)$$

qui caractérise un opérateur auto-adjoint. Cette propriété est mise à profit pour établir les relations d'orthogonalité entre solutions propres d'un système continu. Physiquement, elle étend au système continu la notion de réciprocité déjà discutée dans le cas des systèmes discrets.

#### 5.5 Relations d'orthogonalité entre modes propres

Considérons deux solutions propres quelconques  $u_{(i)}$  et  $u_{(j)}$  extraites de la série infinie de solutions du système.

Partons de l'équation vérifiée par le mode  $u_{(i)}$

$$L[u_{(i)}] = \omega_i^2 mu_{(i)} \quad (5.5.1)$$

et multiplions-la par le mode  $u_{(j)}$ . Par intégration et utilisation de la propriété (5.4.4), il vient

$$\int_0^l u_{(j)} L[u_{(i)}] dx = \int_0^l EA \frac{du_{(i)}}{dx} \frac{du_{(j)}}{dx} dx = \omega_i^2 \int_0^l mu_{(i)} u_{(j)} dx \quad (5.5.2)$$

De la même manière, partant de l'équation vérifiée par le mode  $u_{(j)}$ , on aurait obtenu

$$\int_0^\ell u_{(i)} L[u_{(j)}] dx = \int_0^\ell EA \frac{du_{(i)}}{dx} \frac{du_{(j)}}{dx} dx = \omega_j^2 \int_0^\ell mu_{(i)} u_{(j)} dx \quad (5.5.3)$$

D'où, pour deux modes propres de fréquences distinctes, on obtient par soustraction

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^\ell mu_{(i)} u_{(j)} dx = 0 \quad (5.5.4)$$

Il en résulte les relations d'orthogonalité par rapport à la distribution de masse

$$\int_0^\ell mu_{(i)} u_{(j)} dx = \mu_i \delta_{ij} \quad (5.5.5)$$

où  $\mu_i$ , la masse généralisée du mode, est une mesure de son énergie cinétique

$$\mu_i = \int_0^\ell mu_{(i)}^2 dx \quad (5.5.6)$$

et est fonction de l'amplitude arbitraire affectée au mode propre. Il est d'ailleurs fréquent de calculer celle-ci en sorte que  $\mu_i = 1$  pour chacun des modes.

Par substitution de (5.5.5) dans l'une des relations (5.5.2) ou (5.5.3), on obtient également les relations d'orthogonalité par rapport à la raideur

$$\int_0^\ell EA \frac{du_{(i)}}{dx} \frac{du_{(j)}}{dx} dx = \gamma_i \delta_{ij} \quad (5.5.7)$$

où  $\gamma_i$ , la raideur généralisée du mode, est une mesure de son énergie de déformation

$$\gamma_i = \int_0^\ell EA \left( \frac{du_{(i)}}{dx} \right)^2 dx \quad (5.5.8)$$

Les quantités  $\gamma_i$  et  $\mu_i$  ne sont pas indépendantes mais vérifient nécessairement la relation

$$\frac{\gamma_i}{\mu_i} = \omega_i^2$$

L'expression fonctionnelle correspondante

$$\omega^2 = \frac{\int_0^\ell EA \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^\ell mu^2 dx} = R(u) \quad (5.5.9)$$

généralise aux systèmes continus la notion de quotient de Rayleigh.

## 5.6 Propriété de stationnarité du quotient de Rayleigh

Convenons de calculer le quotient (5.5.9) à l'aide d'une fonction d'essai  $u(x)$  proche du mode propre  $u_{(i)}$

$$u(x) = u_{(i)} + \varepsilon w(x) \quad (5.6.1)$$

et supposons qu'elle vérifie *a priori* les conditions aux limites cinématiques du problème ( $u = 0$  en une extr emite fixée), auquel cas on dit qu'elle est *admissible*.

Si l'on forme le quotient (5.5.9) à l'aide de (5.6.1), on obtient l'expression

$$\omega^2 = \frac{\gamma_i + 2\varepsilon a + \varepsilon^2 b}{\mu_i + 2\varepsilon c + \varepsilon^2 d} \quad (5.6.2)$$

où  $\gamma_i$  et  $\mu_i$  représentent les raideur et masse généralisée (5.5.6) et (5.5.8) du mode et où les constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  résultent des intégrations

$$\begin{aligned} a &= \int_0^l EA \frac{du_{(i)}}{dx} \frac{dw}{dx} dx \\ b &= \int_0^l EA \frac{dw}{dx} \frac{dw}{dx} dx \\ c &= \int_0^l mu_{(i)} w dx \\ d &= \int_0^l mw^2 dx \end{aligned}$$

On note tout d'abord que (5.6.2) coïncide avec la valeur propre du mode  $i$  lorsque  $\varepsilon = 0$ .

Pour mettre ensuite en évidence sa propriété de stationnarité vis-à-vis de l'erreur sur le mode propre, on calcule la dérivée

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial \varepsilon} = \frac{2(a - \omega^2 c) + 2\varepsilon(b - \omega^2 d)}{\mu_i + 2\varepsilon c + \varepsilon^2 d}$$

soit en  $\varepsilon = 0$

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial \varepsilon} = \frac{2(a - \omega_i^2 c)}{\mu_i}$$

Le numérateur du membre de droite

$$\begin{aligned} a - \omega_i^2 c &= \int_0^l \left[ EA \frac{du_{(i)}}{dx} \frac{dw}{dx} - \omega_i^2 mu_{(i)} w \right] dx \\ &= \left[ EA \frac{du_{(i)}}{dx} w \right]_0^l - \int_0^l \left[ \frac{d}{dx} EA \frac{du_{(i)}}{dx} + \omega_i^2 mu_{(i)} \right] w dx \end{aligned}$$

s'annule en vertu de (5.5.1) et du respect des conditions aux limites de type cinématique. D'où le résultat

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

qui exprime la stationnarité du quotient de Rayleigh lorsqu'il est calculé pour un mode propre  $u_{(i)}$ .

Pour expliciter davantage la signification de ce résultat, réalisons ensuite un développement en série du quotient de Rayleigh autour de la solution  $u_{(i)}$

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_i^2 + \frac{\partial \omega^2}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon + \frac{\partial^2 \omega^2}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots \\ &= \omega_i^2 + \varepsilon^2 \frac{(b - \omega_i^2 d)}{\mu_i} + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

et convenons de développer l'erreur  $w(x)$  sur le mode  $u_{(i)}$  en termes des autres modes

$$w(x) = \sum_{j \neq i} r_j u_{(j)} \quad (5.6.4)$$

Le recours aux relations d'orthogonalité (5.5.5) et (5.5.7) donne, pour les coefficients  $b$  et  $d$ , les développements

$$\begin{aligned} b &= \sum_{j \neq i} r_j^2 \gamma_j \\ d &= \sum_{j \neq i} r_j^2 \mu_j \end{aligned}$$

Leur substitution dans (5.6.3) fournit l'approximation au second ordre du quotient de Rayleigh

$$\omega^2 = \omega_i^2 + \frac{\varepsilon^2}{\mu_i} \sum_{j \neq i} r_j^2 \mu_j (\omega_j^2 - \omega_i^2) + O(\varepsilon^3) \quad (5.6.5)$$

qui jouit des mêmes propriétés que dans le cas discret, à savoir:

1. à une erreur du premier ordre sur l'approximation du mode propre, correspond une erreur du second ordre sur la valeur propre lorsque celle-ci est calculée par le quotient de Rayleigh;
2. le quotient de Rayleigh fournit toujours une borne supérieure à la première valeur propre du système

$$R(u) \geq \omega_1^2 \quad (5.6.6)$$

### Exemple

Reprenons l'exemple de la barre encastrée-libre du paragraphe 5.3 et exprimons son premier mode propre de façon approchée par la fonction admissible

$$u(x) = \frac{\alpha x}{\ell}$$

Le calcul du quotient de Rayleigh fournit la valeur propre approchée

$$\omega^2 = \frac{\frac{\alpha^2}{\ell^2} \int_0^\ell EA dx}{\frac{\alpha^2}{\ell^2} \int_0^\ell mx^2 dx} = 3 \frac{EA}{m\ell^2}$$

au lieu de  $\frac{\pi^2}{4} \frac{EA}{m\ell^2} = 2.4674 \frac{EA}{m\ell^2}$ . On constate d'une part que l'estimation obtenue est relativement bonne compte tenu de la grossièreté de l'approximation adoptée et d'autre part que l'inégalité (5.6.6) annoncée est bien respectée.

L'approche numérique que nous venons d'illustrer dans un cas très simple pour obtenir une approximation à la première fréquence propre du système est connue sous le nom de méthode de Rayleigh.

## 5.7 L'approche variationnelle : le principe de Rayleigh

Repartons de l'expression (1.5.43) du principe de Hamilton qui exprime que le mouvement réel d'un système mécanique entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  pour lesquels sa configuration est connue, s'effectue de telle sorte que l'intégrale du lagrangien du mouvement est stationnaire

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0 \quad (5.7.1)$$

Dans le cas de la barre en vibrations libres, le lagrangien du système

$$\mathcal{L} = T - \mathcal{V}$$

comporte d'une part l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\ell m \dot{u}^2 dx \quad (5.7.2)$$

et d'autre part l'énergie de déformation due à l'extension

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_0^\ell EA \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (5.7.3)$$

Séparons comme précédemment la solution en une partie spatiale et une partie temporelle

$$u(x, t) = u(x) \cos \omega t$$

auquel cas nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} T &= T_{max} \sin^2 \omega t \\ \mathcal{V} &= \mathcal{V}_{max} \cos^2 \omega t \end{aligned} \quad (5.7.4)$$

avec les énergies cinétique et potentielle maximales du système

$$T_{max} = \frac{\omega^2}{2} \int_0^\ell m u^2 dx \quad \mathcal{V}_{max} = \frac{1}{2} \int_0^\ell EA \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (5.7.5)$$

Si l'on choisit ensuite l'intervalle d'intégration temporelle de telle sorte que les règles d'extrémité  $\delta u(x, t_1) = \delta u(x, t_2) = 0$  soient automatiquement satisfaites

$$[t_1, t_2] = \left[-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}\right]$$

on peut effectuer a priori l'intégration de la partie temporelle de l'intégrand

$$\int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} \mathcal{T} dt = \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} \mathcal{T}_{max} \sin^2 \omega t dt = \frac{\pi}{2\omega} \mathcal{T}_{max}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} \mathcal{V} dt = \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} \mathcal{V}_{max} \cos^2 \omega t dt = \frac{\pi}{2\omega} \mathcal{V}_{max}$$

auquel cas le principe de Hamilton appliqué à un système en vibrations libres admet la forme simplifiée

$$\delta(\mathcal{T}_{max} - \mathcal{V}_{max}) = 0 \tag{5.7.6}$$

Il exprime, que du fait que l'énergie totale du système est constante, une variation de l'énergie cinétique maximale doit être compensée par une variation correspondante de l'énergie potentielle maximale.

L'équation (5.7.6) constitue le principe de Rayleigh.

Appliquée aux vibrations de la barre en extension, l'équation (5.7.6) prend la forme explicite

$$\delta \int_0^\ell \left[ \frac{\omega^2}{2} m u^2 - \frac{1}{2} E A \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right] dx = 0 \tag{5.7.7}$$

On peut, en exprimant la variation de l'amplitude du déplacement, retrouver l'équation différentielle du système et les conditions d'appui appropriées. Faisons rentrer l'opérateur de variation sous le signe intégral

$$\delta \int_0^\ell \left[ \omega^2 m u \delta u - E A \frac{du}{dx} \delta \left( \frac{du}{dx} \right) \right] dx = 0 \tag{5.7.8}$$

A condition de permuter les opérations de variation et de dérivation spatiale

$$\delta \left( \frac{du}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\delta u) \tag{5.7.9}$$

on obtient après intégration par parties

$$\left[ - E A \frac{du}{dx} \delta u \right]_0^\ell + \int_0^\ell \left[ \omega^2 m u + \frac{d}{dx} \left( E A \frac{du}{dx} \right) \right] \delta u dx$$

En vertu du lemme fondamental du calcul des variations, l'annulation de cette expression implique que:

1. l'équilibre dynamique soit vérifié en tout point à l'intérieur du domaine

$$\frac{d}{dx} \left( E A \frac{du}{dx} \right) + \omega^2 m u = 0$$

2. en  $x = 0$  et  $x = \ell$ , l'une ou l'autre des conditions

$$E A \frac{du}{dx} = 0 \quad \text{ou} \quad \delta u = 0$$

soit vérifiée,

ce qui montre bien que l'équation variationnelle (5.7.7) est équivalente à la formulation du problème en termes d'équations différentielles.

### 5.8 La méthode de Rayleigh-Ritz

La méthode de Rayleigh-Ritz est en fait une généralisation de la méthode de Rayleigh dans laquelle une approximation à la solution du problème aux valeurs propres (5.7.7) est construite par *superposition de fonctions admissibles* et extraites d'une base complète jusqu'à un ordre donn e, de manière à garantir la convergence de la méthode.

$$u(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x)q_i \quad (5.8.1)$$

chacune des fonctions  $w_i(x)$  vérifie donc séparément les conditions aux limites cinématiques du problème. Leur forme est imposée, de telle sorte que la variation peut porter sur les seuls coefficients d'amplitude arbitraires  $q_i$

$$\delta u(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x)\delta q_i \quad (5.8.2)$$

Construisons les formes quadratiques

$$T_{max} = \frac{\omega^2}{2} \int_0^\ell m u^2 dx = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \sum_j m_{ij} q_i q_j$$

$$V_{max} = \frac{1}{2} \int_0^\ell EA \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j k_{ij} q_i q_j$$

avec les coefficients de raideur et de masse

$$m_{ij} = \int_0^\ell m w_i w_j dx \quad k_{ij} = \int_0^\ell EA \frac{dw_i}{dx} \frac{dw_j}{dx} dx$$

auquel cas l'équation (5.7.7) peut être approximée par l'expression discrétisée

$$\delta \left\{ \frac{\omega^2}{2} \sum_i \sum_j m_{ij} q_i q_j - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j k_{ij} q_i q_j \right\} = 0$$

On peut également, à condition de définir les matrices de raideur et de masse résultant de la discrétisation

$$\mathbf{K} = [k_{ij}] \quad \mathbf{M} = [m_{ij}] \quad (5.8.3)$$

et le vecteur des déplacements g en eralis es

$$\mathbf{q}^T = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$$

l'écrire sous forme matricielle

$$\delta \left[ \frac{\omega^2}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \right] = 0$$

auquel cas

$$T_{max} = \frac{\omega^2}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{q} \quad \text{et} \quad V_{max} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (5.8.4)$$

La variation de l'un des déplacements g en eralis es  $q_i$  fournit l'équation

$$\omega^2 \sum_j m_{ij} q_j - \sum_j k_{ij} q_j = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

---

\* On entend par fonction admissible, toute fonction possédant les conditions de continuité requises (ici, continuité de la fonction seule) et respectant les seules conditions aux limites cinématiques du problème (c.a.d, portant sur les déplacements). Dans le cas présent de la barre en extension, la condition éventuelle  $u = 0$  en  $x = 0$  ou  $x = \ell$  est une condition limite cinématique et doit donc être satisfaite, tandis que la condition conjuguée  $EA \frac{du}{dx} = 0$  portant sur l'effort normal est une condition de type équilibre et ne doit donc pas être vérifiée a priori.

soit sous forme matricielle

$$Kq = \omega^2 Mq \quad (5.8.5)$$

On retrouve ainsi l'équation aux valeurs propres établie précédemment dans le cas d'un système discret. Ses  $n$  solutions, que nous noterons  $\bar{\omega}_i^2$ , constituent une approximation aux  $n$  premières valeurs propres  $\omega_i^2$  du système continu correspondant. Il est possible de montrer qu'elles constituent en fait une approximation par excès des solutions propres du système continue, de telle sorte que l'on a toujours

$$\bar{\omega}_i^2 \geq \omega_i^2 \quad i = 1, \dots, n \quad (5.8.6)$$

Cette propriété est perdue dès que les fonctions utilisées pour construire l'approximation (5.8.1) ne sont plus admissibles.

*Exemple*

Reprenons l'exemple de la barre encastree des paragraphes 5.3 et 5.6 et exprimons son déplacement à l'aide d'une série de deux fonctions admissibles

$$u(x) = \frac{x}{\ell} q_1 + \frac{x^2}{\ell^2} q_2$$

extraite de la base complète formée par la série des monômes

$$[1, \frac{x}{\ell}, \frac{x^2}{\ell^2}, \frac{x^3}{\ell^3}, \dots, \frac{x^n}{\ell^n}, \dots]$$

Calculons successivement les coefficients de masse

$$m_{11} = \int_0^\ell m \frac{x^2}{\ell^2} dx = \frac{m\ell}{3}$$

$$m_{12} = \int_0^\ell m \frac{x^3}{\ell^3} dx = \frac{m\ell}{4}$$

$$m_{22} = \int_0^\ell m \frac{x^4}{\ell^4} dx = \frac{m\ell}{5}$$

et les coefficients de raideur

$$k_{11} = \int_0^\ell EA \frac{1}{\ell^2} dx = \frac{EA}{\ell}$$

$$k_{12} = \int_0^\ell EA \frac{2x}{\ell^3} dx = \frac{EA}{\ell}$$

$$k_{22} = \int_0^\ell EA \frac{4x^2}{\ell^4} dx = \frac{4}{3} \frac{EA}{\ell}$$

d'où il résulte l'équation aux valeurs et modes propres

$$\frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} - \omega^2 m\ell \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = 0$$

Si l'on définit le paramètre fréquentiel

$$\lambda = \frac{\omega^2 m\ell^2}{EA}$$

celui-ci vérifie l'équation du second degré

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{3} & 1 - \frac{\lambda}{4} \\ 1 - \frac{\lambda}{4} & \frac{4}{3} - \frac{\lambda}{5} \end{vmatrix} = 0$$

soit

$$3\lambda^2 - 104\lambda + 240 = 0$$

On obtient

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 2.49 \frac{EA}{m\ell^2} & \text{au lieu de} & \quad 2.46 \frac{EA}{m\ell^2} \\ \omega_2^2 &= 32.18 \frac{EA}{m\ell^2} & \text{au lieu de} & \quad 22.21 \frac{EA}{m\ell^2} \end{aligned}$$

On constate donc, par rapport au résultat fourni par le calcul du quotient de Rayleigh, une amélioration considérable de la première fréquence propre.

## 5.9 Vibrations d'une corde vibrante

Maintenant que nous avons pr esent e les propriétés et méthodes essentielles applicables à un système continu, reprenons l'étude de systèmes vibrants monodimensionnels tels que la corde vibrante d'abord et la poutre en flexion ensuite.

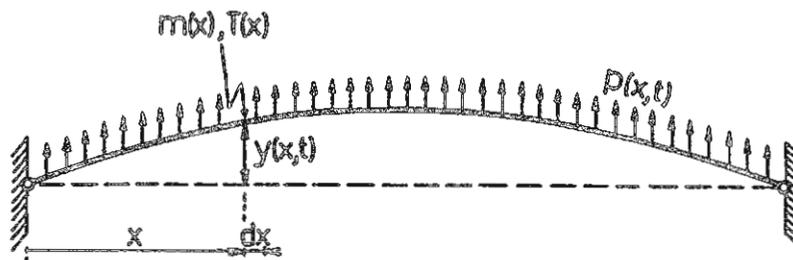


figure 5.9.1  
Corde vibrante

Dans la corde vibrante, on s'intéresse à la vibration transversale  $y(x, t)$  et la raideur du système est apportée par la traction initiale  $T(x)$ .

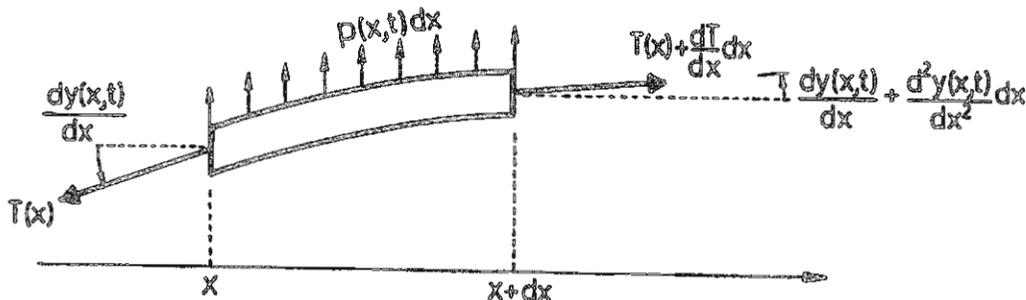


figure 5.9.2  
Schéma rendu libre d'un élément

Exprimons l'équilibre dynamique vertical d'un élément de corde de longueur  $dx$  en admettant que la corde a une masse répartie  $m(x)$  et est soumise à une distribution de force extérieure  $p(x, t)$ .

$$\begin{aligned} & [T(x) + \frac{dT}{dx} dx] \left[ \frac{dy(x, t)}{dx} + \frac{d^2y(x, t)}{dx^2} dx \right] \\ & - T(x) \frac{dy(x, t)}{dx} + p(x, t) dx = m dx \ddot{y} \end{aligned}$$

soit, au premier ordre

$$\frac{d}{dx} \left[ T \frac{dy}{dx} \right] + p(x, t) = m(x) \ddot{y} \quad 0 < x < \ell \quad (5.9.1)$$

D'autre part, en ce qui concerne les conditions aux limites, la corde est nécessairement attachée à ses extrémités, de telle sorte que

$$y(0, t) = y(\ell, t) = 0$$

En l'absence de forces extérieures, le mouvement vibratoire de la corde est régi par l'équation aux valeurs propres de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[ T \frac{dy}{dx} \right] + \omega^2 m y = 0 \\ y(0) = y(\ell) = 0 \end{cases} \quad (5.9.2)$$

On voit donc qu'à condition d'assimiler la tension  $T$  dans la corde à la rigidité extensionnelle de la barre et de considérer le déplacement transversal au lieu du déplacement longitudinal, il y a analogie complète entre le problème des vibrations transversales d'une corde et celui des vibrations axiales d'une barre. Lorsque la tension dans la corde  $T$  et la masse répartie  $m$  sont constantes, on calcule les fréquences naturelles

$$\omega_r = r\pi\sqrt{\frac{T}{m\ell^2}} \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (5.9.3)$$

associées aux modes propres

$$y_r(x) = \sqrt{\frac{2}{m\ell}} \sin \frac{\pi r x}{\ell} \quad (5.9.4)$$

et on peut vérifier que ceux-ci vérifient les relations d'orthogonalité

$$\int_0^\ell m y_r(x) y_s(x) dx = \delta_{rs}$$

$$\int_0^\ell T \frac{dy_r}{dx} \frac{dy_s}{dx} dx = \omega^2 \delta_{rs}$$

### 5.10 L'équation d'ondes

Reprenons l'équation (5.9.1) régissant l'équilibre dynamique transversal d'une corde vibrante de caractéristiques constantes

$$T \frac{d^2 y(x, t)}{dx^2} = m \ddot{y} \quad (5.10.1)$$

Pour le moment, nous ne nous intéressons pas à la longueur de la corde, de telle sorte qu'on peut ne pas se préoccuper des conditions aux limites.

Réécrivons l'équation (5.10.1) sous la forme

$$\frac{\partial^2 y(x, y)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (5.10.2)$$

qui porte alors le nom *d'équation d'ondes*, et la constante

$$c = \sqrt{\frac{T}{m}}$$

est alors la *vitesse de propagation d'onde*. On peut aisément vérifier que la solution générale de (5.10.2) prend la forme générale

$$y(x, t) = F_1(x - ct) + F_2(x + ct) \quad (5.10.3)$$

La fonction  $F_1(x - ct)$  représente une onde de déplacement cheminant dans la direction positive  $x$  à une vitesse constante  $c$  sans altération de sa forme. Son profil est déterminé par la forme explicite de la fonction  $F_1$ . De même,  $F_2(x + ct)$  représente une onde cheminant en sens inverse avec la même vitesse. Il s'ensuit que la forme la plus générale du mouvement d'une corde résulte de la superposition de deux ondes de déplacement cheminant dans des directions opposées.

Considérons le cas particulier intéressant de l'onde sinusoïdale d'amplitude  $A$  cheminant dans le sens direct

$$y(x, t) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \quad (5.10.4)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde qui mesure la distance entre deux crêtes successives. On peut réécrire (5.10.4) sous la forme

$$y(x, t) = A \sin(2\pi kx - \omega t)$$

où  $k = \frac{1}{\lambda}$  est le nombre d'ondes mesurant le nombre d'ondes par unité de longueur et  $\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda}$  est la *fréquence de l'onde*.

On définit également la période

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{c}$$

qui est le temps nécessaire pour qu'une onde complète passe par un point donné.

Examinons ensuite le cas d'un déplacement constitué de deux ondes identiques cheminant dans des directions opposées

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A \sin(2k\pi x - \omega t) + A \sin(2k\pi x + \omega t) \\ &= 2A \sin 2k\pi x \cos \omega t \end{aligned} \quad (5.10.5)$$

Ce résultat montre que dans ce cas l'onde résultante cesse d'être en mouvement. Les deux ondes se combinent en une onde stationnaire dont le profil  $2A \sin 2k\pi x$  oscille autour de sa position d'équilibre avec la fréquence  $\omega$ . Au droit des points où  $2kx$  prend une valeur entière, les deux ondes se compensent et il apparaît un noeud de vibration. Par contre, au droit des points où  $2kx$  est un multiple impair de  $1/2$ , les deux ondes se renforcent de manière à provoquer un ventre de vibration.

Il est intéressant de rapprocher ce résultat de celui des fréquences et modes propres de la corde vibrante. Si la corde est fixée à ses extrémités  $x = 0$  et  $x = \ell$ , ces points doivent correspondre à des noeuds de vibration, de telle sorte que

$$2k\ell = r \quad r = 1, 2, \dots$$

dont on déduit les fréquences des ondes successives

$$\omega_r = 2\pi kc = \frac{\pi r}{\ell} c = \pi r \sqrt{\frac{T}{m\ell^2}}$$

qui correspondent bien aux fréquences propres de vibration précédemment calculées. De même l'amplitude de l'onde stationnaire correspondante

$$\begin{aligned} y_r(x) &= 2A \sin 2k\pi x \\ &= 2A \sin \frac{r\pi x}{\ell} \end{aligned}$$

est bien le mode de vibration associé.

Nous avons ainsi démontré que le mouvement de vibration libre de la corde est une onde stationnaire résultant de la combinaison de deux ondes de même amplitude cheminant dans des sens opposés.

Le même raisonnement est également applicable à tous les systèmes continus monodimensionnels (barres en torsion et extension, poutres) de caractéristiques constantes.

### 5.11 Vibrations d'une poutre en flexion

Considérons la poutre en flexion de la figure 5.11.1 et exprimons l'équilibre dynamique d'un élément de celle-ci (figure 5.11.2).

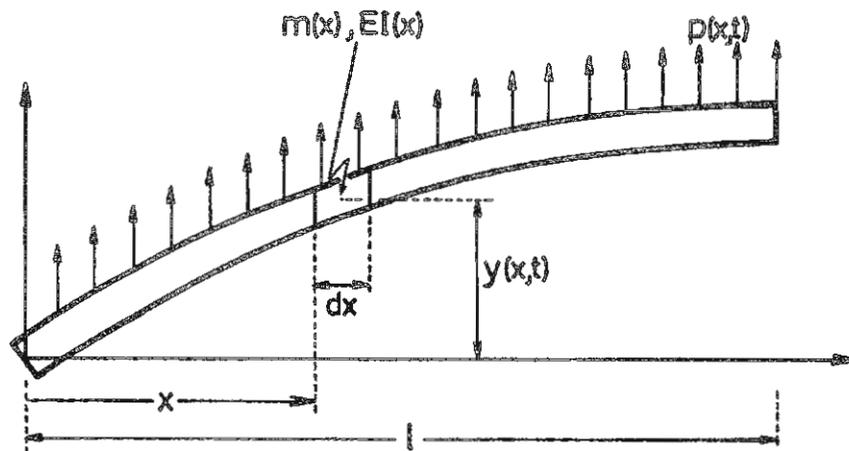


figure 5.11.1  
Poutre en flexion

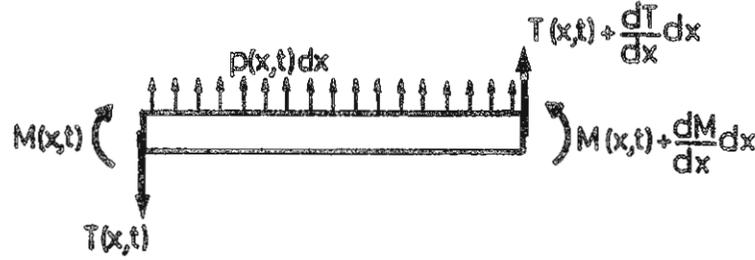


figure 5.11.2  
Schéma rendu libre d'un élément de la poutre

Pour cela, dénotons par

- $y(x, t)$  la flèche instantanée de la poutre
- $M(x, t)$  le moment fléchissant
- $T(x, t)$  l'effort tranchant
- $p(x, t)$  la charge répartie par unité de longueur

L'équilibre vertical fournit l'équation

$$\frac{dT}{dx} + p(x, t) = m(x)\ddot{y} \quad (5.11.1)$$

D'autre part, à condition de négliger l'inertie rotatoire des sections droites, l'équilibre en rotation donne

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dx}dx + T(x, t)dx + \frac{dT}{dx}dx^2 + p(x, t) \cdot \frac{dx^2}{2} &= 0 \\ \text{soit } \frac{dM}{dx} + T &= 0 \end{aligned} \quad (5.11.2)$$

On peut donc substituer (5.11.2) dans (5.11.1) pour exprimer l'équation d'équilibre vertical de la poutre en termes du moment fléchissant

$$\frac{d^2M}{dx^2} + m(x)\ddot{y} = p(x, t) \quad (5.11.3)$$

Pour exprimer ensuite la relation entre le moment fléchissant et la flèche, on recourt à la théorie des poutres sans déformation à l'effort tranchant, selon laquelle les sections droites de la poutre restent normales à la fibre neutre après déformation. Rappelons que cette théorie n'est valable que pour des poutres d'élanement suffisant ( $\frac{\ell}{h} \geq 10$ ) et est donc compatible avec l'hypothèse selon laquelle l'inertie rotatoire des sections droites est négligeable.

Si l'on désigne par  $\psi(x, t)$  l'angle de rotation des sections droites, l'hypothèse revient à écrire

$$\psi(x, t) = \frac{dy}{dx} \quad (5.11.4)$$

et l'on peut par conséquent calculer la courbure de la poutre en termes de sa déflexion

$$\gamma = \frac{d\psi}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Enfin, on exprime que le moment de flexion dans la poutre est proportionnel à la courbure locale

$$M(x, t) = EI\gamma(x, t) = EI(x) \frac{d^2y}{dx^2} \quad (5.11.5)$$

Le coefficient de proportionnalité  $EI(x)$  est la *rigidité flexionnelle de la poutre* et varie avec les propriétés de sa section droite. Par substitution de (5.11.5) dans l'équation (5.11.3), on obtient l'équation différentielle régissant les vibrations de flexion de la poutre

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2y}{dx^2} \right] + m(x)\ddot{y} = p(x, t) \quad 0 < x < \ell \quad (5.11.6)$$

C'est une équation du quatrième ordre dans les d riv es spatiales que l'on doit compléter par les conditions aux limites appropri es.

Dans le cas où les extrémités ne sont pas sollicit es, les différentes possibilités sont contenues dans le tableau suivant.

	Fixation	Déplacement libre
flèche	$y = 0$	$T = \frac{d}{dx}(EI \frac{d^2y}{dx^2}) = 0$
rotation	$\frac{dy}{dx} = 0$	$M = EI \frac{d^2y}{dx^2} = 0$

(5.11.7)

Enfin, en l'absence de sollicitation extérieure, on obtient l'équation aux valeurs propres en imposant un mouvement vibratoire de type harmonique

$$\frac{d^2}{dx^2}(EI \frac{d^2y}{dx^2}) - \omega^2 my = 0 \quad (5.11.8)$$

### 5.12 Approche variationnelle : déduction de l'équation des vibrations libres à partir du principe de Rayleigh

Le même résultat s'obtient à partir du principe de Rayleigh en exprimant explicitement la variation correspondante. L'équation

$$\delta(T_{max} - \mathcal{V}_{max}) = 0 \quad (5.12.1)$$

exprime, rappelons-le, la constance de l'énergie totale du système en l'absence de forces extérieures.

L'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la poutre ont respectivement pour expression

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\ell my^2 dx \quad (5.12.2)$$

et

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx \quad (5.12.3)$$

de telle sorte que (5.7.6) prend la forme explicite

$$\delta \left[ \frac{\omega^2}{2} \int_0^\ell my^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^\ell EI \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx \right] = 0 \quad (5.12.4)$$

Faisons passer l'opérateur de variation sous l'intégrale

$$\omega^2 \int_0^\ell my \delta y dx - \int_0^\ell EI \frac{d^2y}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) dx = 0$$

et intégrons ensuite par parties le second terme : on obtient l'expression

$$\left[ -EI \frac{d^2y}{dx^2} \delta \left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2y}{dx^2} \right) \delta y \right]_0^\ell + \int_0^\ell \left[ \omega^2 my - \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2y}{dx^2} \right) \right] \delta y dx = 0 \quad (5.12.5)$$

On note que, d'une part, les conditions aux limites (5.11.7) conduisent à l'annulation soit du déplacement ou de la rotation (condition cinématique), soit celle de l'effort qui y est conjugué (condition de type équilibre). D'autre part, la variation du déplacement sur le longueur de la poutre est arbitraire, de telle sorte que l'équation

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2y}{dx^2} \right) - \omega^2 my = 0 \quad (5.12.6)$$

est une condition nécessaire et suffisante de stationnarité de (5.12.4).

### 5.13 Caractère self-adjoint du problème aux valeurs propres et relations d'orthogonalité pour la poutre en flexion

Le problème aux valeurs propres auquel nous avons abouti constitue, de la même manière que pour la barre en extension, un problème aux valeurs propres de Sturm-Liouville que l'on peut écrire sous la forme standard

$$L(y) = \omega^2 m y$$

avec l'opérateur différentiel

$$L(\dots) = -\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI \frac{d^2(\dots)}{dx^2} \right] \quad (5.13.1)$$

Considérons deux fonctions différentes  $y_1$  et  $y_2$  vérifiant toutes les conditions aux limites du problème: on montre aisément, par intégration par parties, qu'elles vérifient les relations de réciprocité

$$\begin{aligned} \int_0^\ell y_1 L(y_2) dx &= \int_0^\ell y_2 L(y_1) dx \\ &= \int_0^\ell EI \frac{d^2 y_1}{dx^2} \frac{d^2 y_2}{dx^2} dx \end{aligned} \quad (5.13.2)$$

De plus, si les deux fonctions considérées sont des solutions du problème aux valeurs propres (5.11.8), notées  $y_{(i)}$  et  $y_{(j)}$ , elles vérifient les relations d'orthogonalité

$$\int_0^\ell m y_{(i)} y_{(j)} dx = \mu_i \delta_{ij} \quad (5.13.3)$$

$$\int_0^\ell y_{(i)} L[y_{(j)}] dx = \int_0^\ell y_{(j)} L[y_{(i)}] dx = \gamma_i \delta_{ij} \quad (5.13.4)$$

où  $\mu_i$  et  $\gamma_i$  sont les masse et raideur généralisées du mode  $i$

$$\begin{aligned} \mu_i &= \int_0^\ell m y_{(i)}^2 dx \\ \gamma_i &= \int_0^\ell y_{(i)} L[y_{(i)}] dx = \int_0^\ell EI \left[ \frac{d^2 y_{(i)}}{dx^2} \right]^2 dx \end{aligned} \quad (5.13.5)$$

### 5.14 Solution analytique pour la poutre de caractéristiques uniformes

Dans le cas où la rigidité flexionnelle ( $EI$ ) et la masse par unité de longueur ( $m$ ) restent constantes sur la longueur de la poutre, l'équation aux valeurs propres (5.11.8) devient

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \omega^2 \frac{m}{EI} y = 0 \quad (5.14.1)$$

On peut la mettre sous forme non dimensionnelle en posant

$$\xi = \frac{x}{\ell} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{y}{\ell}$$

On obtient

$$\eta'''' - \mu^4 \eta = 0 \quad (5.14.2)$$

avec la notation  $(\ )' = \frac{d}{d\xi}$  et en introduisant la valeur propre non dimensionnelle

$$\mu^4 = \frac{\omega^2 m L^4}{EI} \quad (5.14.3)$$

La solution générale de (5.14.2) est de la forme

$$\eta = e^{p\xi} \quad \text{avec les racines} \quad p_{1,2} = \pm\mu \quad \text{et} \quad p_{3,4} = \pm i\mu$$

D'où la solution générale

$$\eta = \alpha_1 e^{\mu\xi} + \alpha_2 e^{-\mu\xi} + \alpha_3 e^{i\mu\xi} + \alpha_4 e^{-i\mu\xi}$$

On préfère en général utiliser plutôt les fonctions de Duncan

$$\begin{aligned} s_1(\mu\xi) &= \sin(\mu\xi) + \sinh(\mu\xi) \\ c_1(\mu\xi) &= \cos(\mu\xi) + \cosh(\mu\xi) \\ s_2(\mu\xi) &= -\sin(\mu\xi) + \sinh(\mu\xi) \\ c_2(\mu\xi) &= -\cos(\mu\xi) + \cosh(\mu\xi) \end{aligned} \quad (5.14.4)$$

qui ont la propriété intéressante de se déduire l'une de l'autre par dérivation

$$c_2(\mu\xi) = \frac{1}{\mu} s_2'(\mu\xi) = \frac{1}{\mu^2} c_1''(\mu\xi) = \frac{1}{\mu^3} s_1'''(\mu\xi)$$

On écrit donc la solution générale sous la forme

$$\eta = A s_1(\mu\xi) + B c_1(\mu\xi) + C s_2(\mu\xi) + D c_2(\mu\xi) \quad (5.14.5)$$

Considérons l'exemple de la poutre cantilever : on doit appliquer les conditions aux limites à l'encastrement

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0$$

qui entraînent

$$B = \mu A = 0 \quad (5.14.6)$$

  l'extr emitt e libre

$$\eta''(1) = \eta'''(1) = 0$$

soit

$$\begin{aligned} \mu^2 [C s_1(\mu) + D c_1(\mu)] &= 0 \\ \mu^3 [C c_1(\mu) + D s_2(\mu)] &= 0 \end{aligned} \quad (5.14.7)$$

$\mu = 0$  correspondrait à un mode rigide, ce qui est physiquement impossible.

D'où l'équation transcendante aux valeurs propres

$$s_1(\mu) s_2(\mu) - c_1^2(\mu) = 0$$

qui, en termes des fonctions trigonométriques et hyperboliques, devient

$$\cosh \mu \cos \mu + 1 = 0 \quad (5.14.8)$$

*Solution numérique*

On peut la résoudre par un processus itératif en l'écrivant sous la forme

$$-\cos \mu = \frac{1}{\cosh \mu}$$

On voit alors (figure 5.14.1) que les racines  $\mu_1, \mu_2, \dots$  correspondent aux points d'intersection des deux courbes

$$f_1(\mu) = \frac{1}{\cosh \mu} \quad \text{et} \quad f_2(\mu) = -\cos \mu$$

Pour une valeur propre donnée  $\mu_k$  que l'on peut approcher par la valeur initiale

$$\mu_k^{(0)} \simeq (2k-1) \frac{\pi}{2} \quad (5.14.9)$$

Les estimations successives  $\mu_k^{(i)}$  fournies par le processus itératif

$$\mu_k^{(i+1)} = \cos^{-1} \left( \frac{-1}{\cosh(\mu_k^{(i)})} \right) \quad (5.14.10)$$

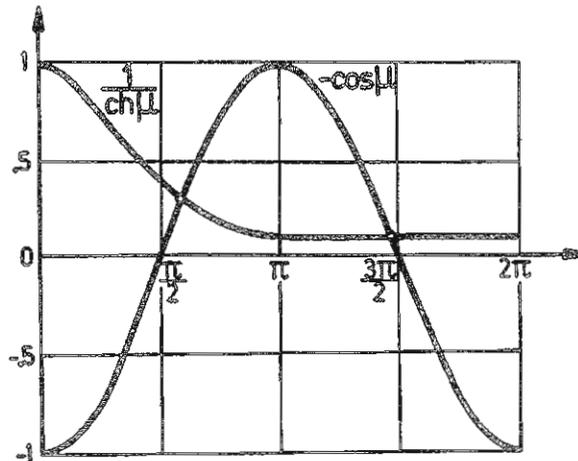


figure 5.14.1

Résolution de l'équation transcendante aux valeurs propres (5.14.8)

convergent vers la valeur propre exacte  $\mu_k$ .

Pour la valeur propre fondamentale, on obtient

$$\mu_1 = 1.8751 \quad \text{et} \quad \omega_1^2 = 12.36 \frac{EI}{m\ell^4}$$

*Solution asymptotique*

Si l'on n'est intéressé que par une estimation des valeurs propres successives  $\mu_i$ , il est possible d'améliorer l'approximation d'ordre zéro (5.14.8) en écrivant les solutions de (5.14.7) sous la forme

$$\mu_k = (2k - 1) \frac{\pi}{2} + \varepsilon_k \quad k = 1, \dots, \infty$$

On calcule alors la correction  $\varepsilon_k$  de manière asymptotique

$$\cos\left[(2k - 1) \frac{\pi}{2} + \varepsilon_k\right] \cosh\left[(2k - 1) \frac{\pi}{2} + \varepsilon_k\right] + 1 = 0$$

Développant cette expression, on obtient

$$-\sin \varepsilon_k \cdot \sin\left[(2k - 1) \frac{\pi}{2}\right] \cdot \left\{ \cosh\left[(2k - 1) \frac{\pi}{2}\right] \cdot \cosh \varepsilon_k + \sinh\left[(2k - 1) \frac{\pi}{2}\right] \cdot \sinh \varepsilon_k \right\} + 1 = 0$$

soit, avec les approximations  $\sinh \varepsilon_k \simeq \sin \varepsilon_k \simeq \varepsilon_k$  et  $\cosh \varepsilon_k \simeq 1$

$$\varepsilon_k = \frac{(-1)^{k-1}}{\cosh\left[(2k - 1) \frac{\pi}{2}\right]}$$

d'où l'approximation asymptotique

$$\mu_k = (2k - 1) \frac{\pi}{2} + \frac{(-1)^{k-1}}{\cosh\left[(2k - 1) \frac{\pi}{2}\right]}$$

On obtient pour les premières valeurs propres les approximations

$\mu_1 \simeq 1.9693$	$\mu_1 = 1.8751$
$\mu_2 \simeq 4.6944$	au lieu de $\mu_2 = 4.6941$
$\mu_3 \simeq 7.8548$	$\mu_3 = 7.8548$

Quelles que soient les conditions aux limites, tous les cas peuvent être traités de la même façon. On obtient les résultats consignés dans le tableau suivant.

Conditions aux limites	Valeur propre $\mu_n$			
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n > 3$
libre - libre	0	4.730	7.853	$(2n - 1)\frac{\pi}{2}$ (approx.)
libre - guidée	0	2.365	5.498	$(4n - 5)\frac{\pi}{2}$ (approx.)
libre - articulée	0	3.927	7.069	$(4n - 3)\frac{\pi}{4}$ (approx.)
guidée - guidée	0	3.142	6.283	$(n - 1)\pi$ (exact)
guidée - articulée	1.561	5.712	7.854	$(2n - 1)\frac{\pi}{2}$ (exact)
encastrée - libre	1.875	4.694	7.855	$(2n - 1)\frac{\pi}{2}$ (approx.)
bi - articulée	3.142	6.283	9.425	$n\pi$ (exact)
encastrée - articulée	3.927	7.069	10.210	$(4n + 1)\frac{\pi}{4}$ (approx.)
encastrée - guidée	2.365	5.498	8.639	$(4n - 1)\frac{\pi}{4}$
bi - encastrée	4.730	7.853	10.996	$(2n + 1)\frac{\pi}{2}$ (approx.)

$$\omega_n^2 = \mu_n^4 \frac{EI}{ml^4}$$

Fréquences propres de vibrations d'une poutre uniforme  
pour différents cas de conditions aux limites

### 5.15 Application de la méthode de Rayleigh-Ritz aux poutres en flexion

De la même manière que pour la barre en extension, nous pouvons construire une approximation à la solution du problème aux valeurs propres (5.11.8) par superposition de fonctions admissibles

$$y(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x)q_i$$

Chacune des fonctions  $w_i(x)$  vérifie donc séparément les conditions aux limites cinématiques du problème, tant sur les déplacements que sur les rotations.

On construit les formes quadratiques associées à l'énergie cinétique et l'énergie potentielle

$$T_{max} = \frac{\omega^2}{2} \int_0^l m y^2 dx = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \sum_j m_{ij} q_i q_j$$

$$V_{max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j k_{ij} q_i q_j$$

avec les coefficients de masse et de raideur

$$m_{ij} = \int_0^l m w_i w_j dx \quad k_{ij} = \int_0^l EI \left( \frac{d^2 w_i}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 w_j}{dx^2} \right) dx \quad (5.15.1)$$

Les équations discrétisées conservent la forme

$$Kq = \omega^2 Mq \quad (5.15.2)$$

et la propriété (5.8.6) de bornes supérieures aux valeurs propres exactes reste vérifiée.

*Exemple*

Calculons de façon approchée les fréquences propres de la poutre encastree-libre en construisant une approximation de sa déformée par fonctions admissibles, c'est-à-dire vérifiant les conditions aux limites cinématiques

$$y = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{en } x = 0$$

Il en résulte l'approximation de Rayleigh-Ritz extraite de la série complète des monômes

$$y(x) = q_1 \frac{x^2}{\ell^2} + q_2 \frac{x^3}{\ell^3}$$

On doit calculer les intégrales

$$m_{ij} = \int_0^\ell m \left(\frac{x}{\ell}\right)^{i+j} dx = \frac{m\ell}{i+j+1}$$

$$k_{ij} = \frac{1}{\ell^4} \int_0^\ell EI \left[ i(i-1)j(j-1) \left(\frac{x}{\ell}\right)^{i+j-4} \right] dx$$

d'où le problème aux valeurs propres

$$\frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} - \omega^2 m\ell \begin{bmatrix} 1/5 & 1/6 \\ 1/6 & 1/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = 0$$

Posant  $\mu = \frac{\omega^2 m\ell^4}{EI}$ , l'équation aux valeurs propres devient

$$\left(4 - \frac{\mu}{5}\right)\left(12 - \frac{\mu}{7}\right) - \left(6 - \frac{\mu}{6}\right)^2 = 0$$

soit  $\mu^2 - 1224\mu + 15120 = 0$

On obtient les valeurs propres

$$\omega_1^2 = 12.48 \frac{EI}{m\ell^4}$$

$$\omega_2^2 = 1212. \frac{EI}{m\ell^4}$$

au lieu des valeurs exactes 12.36 et  $48 \frac{EI}{m\ell^4}$ .

On notera que l'utilisation de deux fonctions d'essai permet de calculer avec précision une seule valeur propre.

### 5.16 Calcul de la réponse à une excitation extérieure

Dans le chapitre précédent, nous avons résolu le problème de la réponse du système à  $n$  degrés de liberté à une excitation extérieure par superposition de modes propres. La même technique est applicable au calcul de la réponse d'un système continu en mettant à profit les relations d'orthogonalité obtenues sous forme intégrale.

Considérons le cas général d'une poutre en flexion soumise à une charge transversale  $p(x, t)$ . Sa réponse est régie par l'équation du mouvement

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI \frac{d^2}{dx^2} \right] + m\ddot{y} = p(x, t) \tag{5.16.1}$$

Décomposons sa solution en série des modes propres

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_{(i)}(x) \alpha_i(t) \tag{5.16.2}$$

et substituons-la dans l'équation (5.16.1)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \alpha_i(t) \frac{d^2}{dx^2} \left[ EI \frac{d^2 y_{(i)}}{dx^2} \right] + \ddot{\alpha}_i m y_{(i)} \right\} = p(x, t) \tag{5.16.3}$$

Multiplions ensuite (5.16.3) par un autre mode propre  $y_{(j)}$  et int egrans sur la longueur de la poutre. Tenant compte des relations d'orthogonalité (5.13.3) et (5.13.4), on obtient le système d'équations découplées

$$\gamma_j \alpha_j(t) + \mu_j \ddot{\alpha}_j = \Phi_j(t) \quad j = 1, \dots, \infty \quad (5.16.4)$$

avec la définition de la fonction d'excitation du mode  $j$

$$\Phi_j(t) = \int_0^l y_{(j)}(x) p(x, t) dx \quad (5.16.5)$$

Un cas fréquent est celui où la charge répartie  $p(x, t)$  est séparable

$$p(x, t) = p(x)g(t)$$

auquel cas l'équation (5.16.4) se réduit à la forme

$$\omega_j^2 \alpha_j(t) + \ddot{\alpha}_j = \frac{1}{\mu_j} \Gamma_j g(t) \quad (5.16.6)$$

où  $\Gamma_j$  est le *facteur de participation* du mode  $j$   a la charge  $p(x)$

$$\Gamma_j = \int_0^l y_{(j)}(x) p(x) dx \quad (5.16.7)$$

La solution de (5.16.6) est obtenue par convolution

$$\alpha_j(t) = \alpha_j(0) \cos(\omega_j t) + \frac{1}{\omega_j} \dot{\alpha}_j(0) \sin(\omega_j t) + \frac{\Gamma_j}{\omega_j \mu_j} \int_0^t g(\tau) \sin(\omega_j(t - \tau)) d\tau$$

Après application des conditions initiales, la solution de (5.16.1) est ensuite reconstruite par superposition modale selon la relation (5.16.2).

#### Exemple 1

Considérons le cas d'une poutre simplement supportée de rigidité  $EI$  et de masse répartie  $m$  est soumise brusquement à la charge statique répartie représentée sur la figure 5.16.1, et dont on veut déterminer la réponse de la poutre en fonction du temps.

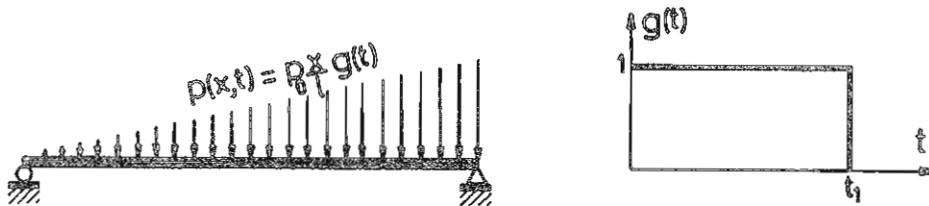


figure 5.16.1  
brusque soumission à une charge statique répartie

#### Solution

On doit tout d'abord calculer les modes propres de la poutre bi-appuyée, qui vérifient l'équation aux valeurs propres et les conditions aux limites

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} - \omega^2 m y = 0 \quad 0 < x < l$$

$$y = \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad \text{en } x = 0, l$$

On vérifiera que ceux-ci, après normalisation, ont pour expression

$$y_{(n)}(x) = \sqrt{\frac{2}{ml}} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

avec les valeurs propres associées

$$\omega_n^2 = (n\pi)^4 \frac{EI}{m\ell^4}$$

Les facteurs de participation (5.16.7) ont pour expression

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= - \int_0^\ell \sqrt{\frac{2}{m\ell}} \sin \frac{n\pi x}{\ell} p_0 \frac{x}{\ell} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{m\ell}} p_0 \left[ \frac{\ell}{n\pi} \frac{x}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \right]_0^\ell - \int_0^\ell \frac{1}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{m\ell}} p_0 \left[ \frac{x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{\ell} - \frac{\ell}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right]_0^\ell \\ &= \sqrt{\frac{2}{m\ell}} p_0 \frac{\ell}{n\pi} \cos n\pi \end{aligned}$$

soit

$$\Gamma_n = \sqrt{\frac{2}{m\ell}} \frac{p_0 \ell}{n\pi} (-1)^n$$

L'équation (5.16.6) régissant chacun des paramètres temporels devient donc

$$\omega_n^2 \alpha_n + \ddot{\alpha}_n = \sqrt{\frac{2}{m\ell}} \frac{p_0 \ell}{n\pi} (-1)^n g(t)$$

A condition de supposer la poutre au repos à l'instant où la charge est appliquée, elle a pour solution

$$\alpha_n(t) = \begin{cases} \frac{p_0 \ell}{n\pi} \sqrt{\frac{2}{m\ell}} \frac{(-1)^n}{\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t) & 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{p_0 \ell}{n\pi} \sqrt{\frac{2}{m\ell}} \frac{(-1)^n}{\omega_n^2} [\cos \omega_n (t - t_1) - \cos \omega_n t] & t_1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

On reconstruit ensuite la réponse de la poutre par la relation de superposition modale (5.16.2).

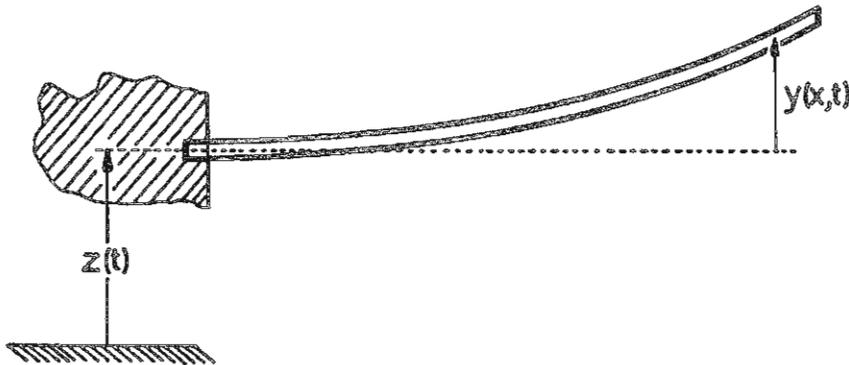


figure 5.16.2  
poutre cantilever soumise à un mouvement  $z(t)$

*Exemple 2*

La poutre cantilever de la figure 5.16.2 a sa base soumise à un mouvement  $z(t)$ . On peut calculer la réponse de la poutre au mouvement imposé en écrivant l'équation du mouvement sous la forme

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + m [\ddot{y}(x, t) + \ddot{z}(t)] = 0$$

que l'on peut remettre sous la forme

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + m \ddot{y} = -m \ddot{z}(t)$$

en considérant qu'elle est soumise à la charge répartie équivalente  $-m\ddot{z}(t)$ . Chacun des degrés de liberté est r eg i par l'équation (5.16.6) où les facteurs de participation ont pour expression

$$\Gamma_n = - \int_0^\ell m y_{(n)}(x) dx$$

Partant de conditions initiales homogènes, chaque coordonnée normale subit l'évolution temporelle

$$\alpha_n(t) = - \frac{1}{\omega_n \mu_n} \int_0^\ell m y_{(n)}(x) dx \int_0^t \ddot{z}(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau$$

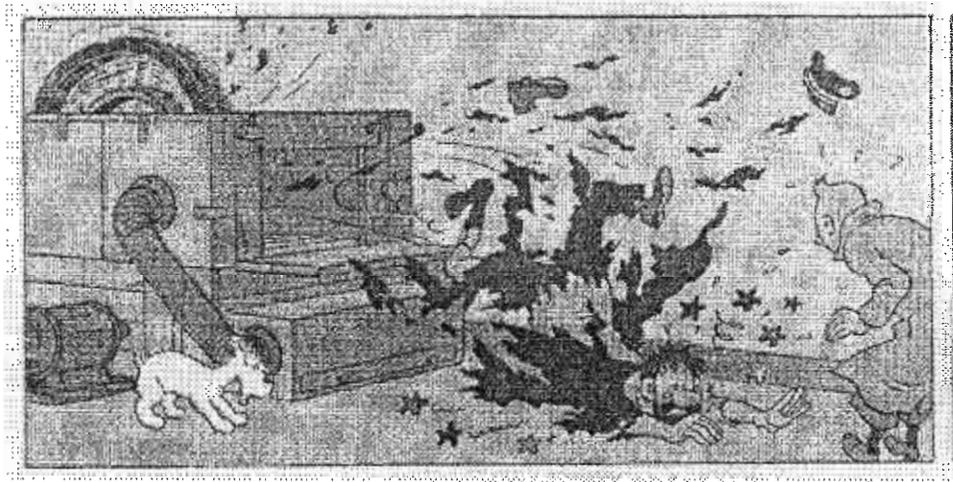
et on reconstruit la solution complète par la relation de superposition modale (5.16.2).

\*            \*

\*

## 6. Vibrations transversales des rotors

---





## Introduction

Le but de cette première partie est de familiariser le lecteur avec le comportement en flexion des rotors.

En effet, par comparaison avec les systèmes vibrant en flexion autour d'une position de repos, les rotors ont un comportement radicalement différent, et aussi plus difficile à cerner.

D'un point de vue analytique, deux approches sont possibles pour la description de la cinématique d'un rotor en rotation.

- On peut exprimer les équations du mouvement dans un repère inertiel. On verra que dans ce cas, si le rotor ne possède pas la symétrie de révolution, les termes de raideur dus à l'élasticité du rotor lui-même sont affectés de coefficients périodiques, et l'on sort du cadre de la mécanique des vibrations linéaires.
- On peut aussi exprimer les équations du mouvement dans un repère entraîné avec le rotor. La difficulté liée à l'absence de symétrie de révolution du rotor disparaît, mais à l'inverse, l'absence d'isotropie dans les raideurs de la suspension fixe peut elle aussi donner lieu à des termes de raideur périodique.

Les deux approches présentent donc des avantages et des inconvénients qui leur sont propres.

La démarche que nous suivrons dans l'étude des vibrations transversales des rotors est la suivante.

1. Nous procéderons à l'écriture générale de l'énergie cinétique d'un rotor rigide en rotation, et ce dans un repère lié à la rotation, et limiterons ensuite sa représentation à une forme linéarisée. Chaque fois que nous étudierons un rotor particulier, nous nous référerons à l'expression de l'énergie cinétique obtenue dans cette première partie (paragraphe 1 à 3).
2. Nous procéderons ensuite à l'étude du comportement stationnaire de quelques cas de rotors rigides (paragraphe 4 à 5) :
  - sur paliers rigides,
  - sur paliers souples de raideurs identiques selon les deux directions,
  - sur paliers de raideurs distinctes.

Nous mettrons en évidence l'existence de vitesses critiques pour les rotors rigides, et montrerons sur quels principes repose leur équilibrage.

3. La dernière partie (paragraphe 6 et suivants) comportera la discussion d'effets liés à la flexibilité du rotor :
  - comportement dynamique d'un rotor élastique comportant un disque assimilé à une masse ponctuelle ;
  - comportement d'un rotor élastique assimilable à une poutre continue uniforme ;
  - effets gyroscopiques liés à la présence de disques de grande inertie rotatoire.

## 1. Cinématique du mouvement d'un rotor

### 1.1 Définition des repères

Pour étudier la cinématique du mouvement d'un rotor rigide dans le cas général, on considère le système représenté à la figure 1, constitué d'un rotor rigide en rotation sur paliers élastiques. On admet que sa vitesse de rotation  $\Omega$  est constante : on ne s'intéresse donc pas aux transitoires résultant de modifications de vitesse ou de configuration.

On est amené à utiliser trois repères :

- un repère inertiel  $O x_0 y_0 z_0$  tel que  $O z_0$  soit l'axe de rotation du rotor, et que le centre de gravité  $G$  du rotor soit contenu dans le plan  $O x_0 y_0$  lorsque le système est à l'état non déformé ;
- un repère tournant  $O x_t y_t z_t$  qui possède le même axe  $O z$  que le repère inertiel, mais tourne à la vitesse  $\Omega$  par rapport à lui. Le repère tournant est le repère d'un observateur lié au dispositif d'entraînement.
- un repère dynamique  $O x_d y_d z_d$  lié au rotor, qui coïncide avec le repère inertiel lorsque le système est au repos.

La non-coïncidence du repère dynamique avec le rotor tournant provient du fait que, le système étant monté sur appuis souples, l'axe du rotor peut s'incliner par rapport à l'axe de rotation sous l'effet des forces d'inertie résultant d'un équilibrage imparfait.

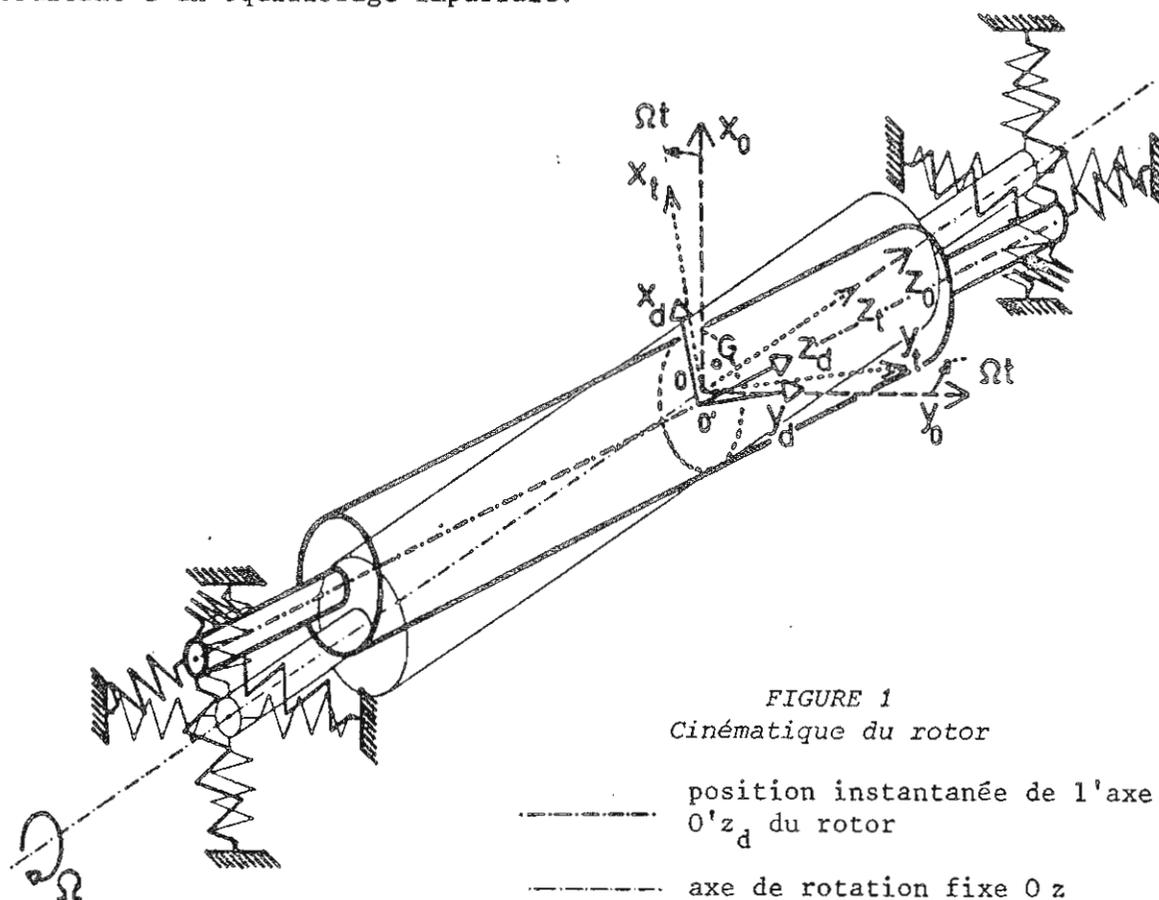


FIGURE 1  
Cinématique du rotor

- position instantanée de l'axe  $O'z_d$  du rotor
- axe de rotation fixe  $O z$
- $O x_0 y_0 z_0$  repère inertiel
- $O x_t y_t z_t$  repère tournant à la vitesse  $\Omega$
- $O'x_d y_d z_d$  repère dynamique lié au rotor

On peut dès à présent se rendre compte intuitivement que :

- un décalage du centre de gravité dans le plan de symétrie du rotor provoque une force centrifuge d'amplitude constante tournant à la vitesse  $\Omega$  ; il en résulte, pour tout point de l'axe du rotor, un mouvement sur une trajectoire cylindrique (figure 2a) ;
- un mauvais alignement de l'axe principal d'inertie selon Oz avec l'axe de rotation engendre un couple d'inertie d'amplitude constante tournant à la vitesse  $\Omega$  ; l'axe du rotor décrit dans ce cas un cône dont le sommet est au centre de gravité du rotor.

Dans le premier cas, on parle de *déséquilibre statique*, car il peut être mis en évidence simplement en laissant le rotor prendre sa position d'équilibre sous l'effet de la gravité. Le deuxième type de déséquilibre ne peut être mis en évidence que par un essai en rotation. On parle alors de *déséquilibre dynamique*.

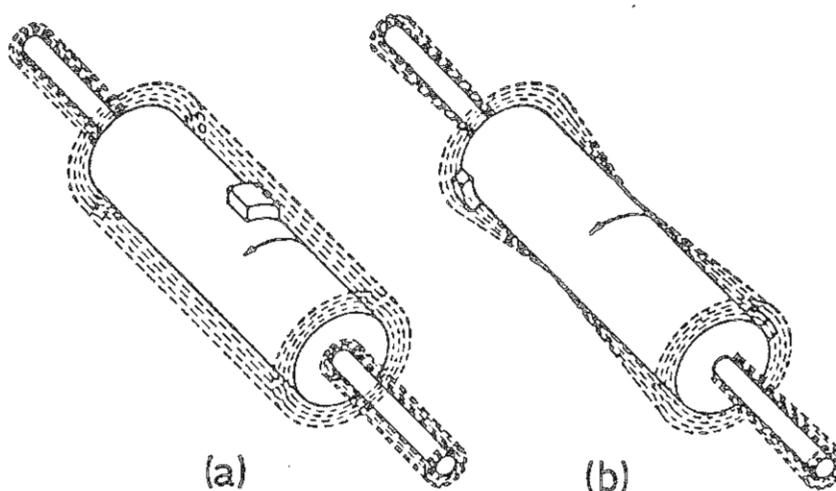


FIGURE 2

- (a) déséquilibre statique du rotor  
 (b) déséquilibre dynamique du rotor

Soit P un point quelconque sur le rotor. On peut exprimer sa position par rapport au point O fixe sur l'axe de rotation sous la forme

$$\vec{a} = \vec{r} + \vec{p} \quad (1)$$

où  $\vec{r}$  est le vecteur position du point de référence O déplacé en O' ;  
 $\vec{p}$  est le vecteur position du point P par rapport à O'. Le corps étant rigide, le vecteur  $\vec{p}$  est de module constant.

On peut exprimer le vecteur (1) dans l'un quelconque des repères définis ci-dessous :

- dans le repère inertiel

$$\underline{a}_0 = \underline{r}_0 + \underline{p}_0 \quad (1a)$$

- dans le repère tournant

$$\underline{a}_t = \underline{r}_t + \underline{p}_t \quad (1b)$$

- dans le repère dynamique

$$\underline{a}_d = \underline{r}_d + \underline{p}_d \quad (1c)$$

Le passage du repère inertiel au repère tournant et du repère tournant au repère dynamique peuvent être réalisés par une transformation orthogonale

$$\underline{a}_t = \underline{T} \underline{a}_0 \quad \text{et} \quad \underline{a}_d = \underline{D} \underline{a}_t \quad (2)$$

avec les matrices de transformation  $T$  et  $D$  telles que

$$\underline{T} \underline{T}^T = \underline{T}^T \underline{T} = \underline{I} \quad \text{et} \quad \underline{D} \underline{D}^T = \underline{D}^T \underline{D} = \underline{I} \quad (3)$$

### 1.2 Passage du repère inertiel au repère tournant

Du fait que l'axe de rotation est  $Oz_0$ , la matrice

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t & 0 \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

assure la transformation du repère inertiel au repère tournant.

### 1.3 Passage du repère tournant au repère dynamique

En l'absence de déformation élastique, le repère dynamique coïncide avec le repère tournant. Dès lors, si l'on admet que le système ne subit aucune déformation en torsion, on peut passer du repère tournant au repère inertiel par deux rotations finies successives, selon la technique des angles d'Euler :

- une rotation  $\theta$  autour de l'axe  $y_t$
- une rotation  $\phi$  autour du nouvel axe  $x$ .

Il vient

$$\underline{a}_d = \underline{C} \underline{B} \underline{a}_t = \underline{D} \underline{a}_t$$

avec les matrices de transformation orthogonales successives

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

D'où la matrice de transformation résultante

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5)$$

### 1.4 Vitesse d'un point exprimée dans le repère tournant

On obtient la vitesse d'un point dans le repère tournant par projection de sa vitesse  $\underline{a}_0$  dans le repère inertiel

$$\underline{v}_t = \underline{T} \dot{\underline{a}}_0 \quad (6)$$

Notons d'autre part que par dérivation de (2), il vient

$$\dot{\underline{a}}_t = \underline{T} \dot{\underline{a}}_0 + \dot{\underline{T}} \underline{a}_0 = \underline{T} \dot{\underline{a}}_0 + \dot{\underline{T}} \underline{T}^T \underline{a}_t$$

d'où, tenant compte de (6)

$$\underline{v}_t = \dot{\underline{a}}_t - \dot{\underline{T}} \underline{T}^T \underline{a}_t \quad (7)$$

La loi (7) de décomposition de la vitesse est en fait l'analogie matriciel de

la loi vectorielle  $\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$  exprimant la vitesse d'un point dans un repère en rotation. On le contrôle en dérivant (3) par rapport au temps

$$\dot{\underline{T}} \underline{T}^T + \underline{T} \dot{\underline{T}}^T = 0$$

$$\text{d'où} \quad -\dot{\underline{T}} \underline{T}^T = \underline{T} \dot{\underline{T}}^T = [\omega] \quad (8)$$

où la matrice antisymétrique

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

est la matrice des vitesses angulaires exprimées autour des axes du repère tournant. Elle est la représentation matricielle du vecteur polaire de rotation

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Dans le cas présent où la rotation se fait à vitesse constante autour de Oz, on obtient

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Appliquons maintenant la décomposition (7) en particulier à un point du rotor. Tenant compte de (1b), il vient

$$\underline{v}_t = \dot{\underline{r}}_t + [\omega] \underline{r}_t + \dot{\underline{p}}_t + [\omega] \underline{p}_t \quad (9)$$

Exprimons que le rotor est indéformable et que la distance  $\underline{p}_d$  est donc invariante : par dérivation temporelle de

$$\underline{p}_t = \underline{D}^T \underline{p}_d$$

on obtient

$$\dot{\underline{p}}_t = \dot{\underline{D}}^T \underline{p}_d + \underline{D}^T \dot{\underline{p}}_d = \dot{\underline{D}}^T \underline{p}_d$$

et l'on peut écrire

$$\dot{\underline{p}}_t = \dot{\underline{D}}^T \underline{D} \underline{p}_t = [\gamma] \underline{p}_t \quad (10)$$

avec la matrice des vitesses angulaires du repère dynamique exprimées dans le repère tournant

$$[\gamma] = \dot{\underline{D}}^T \underline{D} = -\underline{D}^T \dot{\underline{D}}$$

Par dérivation de (5), tous calculs faits, on obtient

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\phi} \sin \theta & \dot{\theta} \\ -\dot{\phi} \sin \theta & 0 & -\dot{\phi} \cos \theta \\ -\dot{\theta} & \dot{\phi} \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

On note qu'elle comporte une composante de vitesse de rotation autour de l'axe Oz qui est à l'origine de certains effets gyroscopiques.

Par combinaison des résultats (9) et (10), on exprime la vitesse d'un point quelconque du rotor dans le repère tournant sous la forme

$$\underline{v}_t = \dot{\underline{r}}_t + [\omega] \underline{r}_t + [\omega + \gamma] \underline{p}_t \quad (12)$$

## 2. Energie cinétique du disque dans le cas général

On calcule l'énergie cinétique du rotor par intégration sur son volume

$$T = \frac{1}{2} \int_V \underline{v}_t^T \underline{v}_t \, dm$$

soit

$$T = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \dot{\underline{r}}_t^T \dot{\underline{r}}_t + 2 \dot{\underline{r}}_t^T [\omega] \underline{r}_t + \underline{r}_t^T [\omega]^T [\omega] \underline{r}_t + \underline{p}_t^T [\omega + \gamma]^T [\omega + \gamma] \underline{p}_t + \right. \\ \left. + 2 \dot{\underline{r}}_t^T [\omega + \gamma] \underline{p}_t + 2 \underline{r}_t^T [\omega]^T [\omega + \gamma] \underline{p}_t \right\} dm \quad (13)$$

On y évalue  $\underline{p}_t$  en utilisant le fait que la position d'un point est fixe dans le repère dynamique

$$\underline{p}_t = \underline{D}^T \underline{p}_d \quad \text{avec} \quad \underline{p}_d = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Si l'on admet que les déplacements sont infinitésimaux et que l'on retient les termes jusqu'à l'ordre 2 inclus, on obtient

$$\underline{p}_t \approx \begin{bmatrix} a(1 - \frac{\theta^2}{2}) + b\phi\theta + c\theta \\ b(1 - \frac{\phi^2}{2}) - c\phi \\ -a\theta + b\phi + c(1 - \frac{\phi^2}{2} - \frac{\theta^2}{2}) \end{bmatrix} \quad (14)$$

et on calcule ensuite

$$[\omega + \gamma] \underline{p}_t \approx \begin{bmatrix} -\Omega b(1 - \frac{\phi^2}{2}) + \Omega c\phi - a\theta\dot{\theta} + b\phi\dot{\theta} + c\dot{\theta} + b\dot{\phi}\theta \\ \Omega a(1 - \frac{\theta^2}{2}) + \Omega b\phi\theta + \Omega c\theta - b\dot{\phi}\phi - c\dot{\phi} \\ -a\dot{\theta} - c\theta\dot{\theta} + b\dot{\phi} - c\phi\dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (15)$$

### 3. Energie cinétique dans le cas stationnaire

Examinons le cas stationnaire, c'est-à-dire correspondant à une *déformation constante dans le repère tournant*.

Dans ce cas, le calcul de l'énergie cinétique (13) se réduit à celui de l'expression

$$T = \frac{1}{2} \int_V \{ \underline{r}_t^T [\omega]^T [\omega] \underline{r}_t + 2 \underline{r}_t^T [\omega]^T [\omega] \underline{p}_t + \underline{p}_t^T [\omega]^T [\omega] \underline{p}_t \} dm \quad (16)$$

Le premier terme de (16) correspond à l'énergie de translation lorsque la masse  $M$  du rotor est supposée concentrée au point  $O'$

$$T_1 = \frac{1}{2} M \Omega^2 [x^2 + y^2] \quad (17)$$

à condition de noter  $\underline{r}_t^T = [x \ y \ 0]$  les déplacements du point de référence  $O'$  dans le repère tournant.

Le second terme résulte du décalage du centre de gravité. Si on note  $[x_g \ y_g \ 0]$  les coordonnées de  $G$  dans le repère dynamique, telles que

$$M x_g = \int_V a \, dm \quad M y_g = \int_V b \, dm \quad \int_V c \, dm = 0$$

il vient au second ordre dans les déplacements  $(x, y, \phi, \theta)$

$$T_2 = M \Omega^2 [x x_g + y y_g] \quad (18)$$

Dans le calcul du troisième terme qui représente l'énergie cinétique de rotation, on se limite aux termes du second ordre également

$$T_3 = \frac{1}{2} \Omega^2 \left[ (1 - \phi^2) \int_V b^2 \, dm + \phi^2 \int_V c^2 \, dm - 2\phi \int_V b c \, dm + \right. \\ \left. + (1 - \theta^2) \int_V a^2 \, dm + \theta^2 \int_V c^2 \, dm + 2\theta \int_V a c \, dm + 2\phi\theta \int_V a b \, dm \right] \quad (19)$$

Définissons les moments d'inertie du rotor

$$I_{xx} = \int_V (b^2 + c^2) \, dm \quad I_{yy} = \int_V (a^2 + c^2) \, dm \quad I_{zz} = \int_V (a^2 + b^2) \, dm \\ I_{xz} = \int_V a c \, dm \quad I_{yz} = \int_V b c \, dm \quad I_{xy} = \int_V a b \, dm$$

Regroupant les résultats (17), (18) et (19), on peut réécrire l'énergie cinétique totale sous la forme

$$T = \frac{1}{2} M \Omega^2 [x^2 + y^2] + M \Omega^2 [x x_g + y y_g] + \frac{1}{2} \Omega^2 [I_{zz} + 2\theta I_{xz} - 2\phi I_{yz} + \\ + \phi^2 (I_{yy} - I_{zz}) + \theta^2 (I_{xx} - I_{zz}) + 2\phi\theta I_{xy}] \quad (20)$$

Pour un rotor symétrique,  $I_{xy} = 0$ . Le dernier terme est donc d'un ordre supérieur aux autres, puisqu'il ne peut provenir que de l'imperfection du rotor, et peut être négligé dans la suite.

On calcule ensuite les forces d'inertie en exprimant les termes correspondants

$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial T}{\partial q}$  dans les équations de Lagrange

$$\begin{aligned}
 \text{selon } x & \quad \Omega^2 M (x + x_g) \\
 \text{selon } y & \quad \Omega^2 M (y + y_g) \\
 \text{selon } \phi & \quad -\Omega^2 I_{yz} + \Omega^2 \phi (I_{yy} - I_{zz}) \\
 \text{selon } \theta & \quad +\Omega^2 I_{xz} + \Omega^2 \theta (I_{xx} - I_{zz})
 \end{aligned} \tag{21}$$

#### 4. Comportement stationnaire du rotor sur paliers rigides

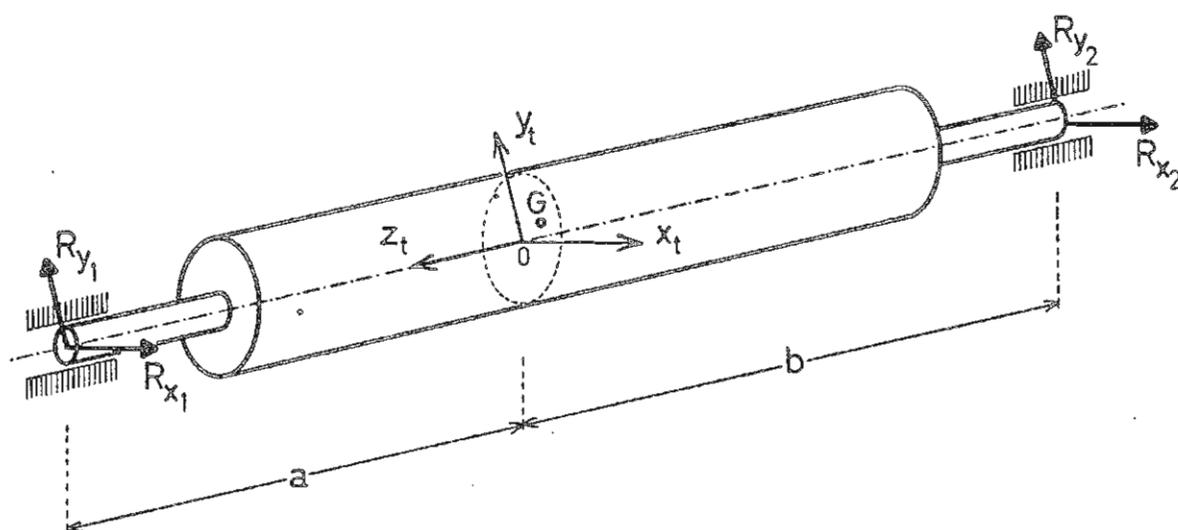


FIGURE 3  
Réactions sur les paliers

On note  $(R_{x_1}, R_{y_1})$  et  $(R_{x_2}, R_{y_2})$  les composantes des réactions aux appuis 1 et 2 exprimées dans le repère tournant. Si le point  $O$  est soumis aux déplacements virtuels

$$\delta q^T = [ \delta x \quad \delta y \quad \delta \phi \quad \delta \theta ]$$

Il en résulte les équations de déplacements virtuels

$$\begin{aligned}
 \delta x [ \Omega^2 M (x + x_g) + (R_{x_1} + R_{x_2}) ] &= 0 \\
 \delta y [ \Omega^2 M (y + y_g) + (R_{y_1} + R_{y_2}) ] &= 0 \\
 \delta \phi [ -\Omega^2 I_{yz} + \Omega^2 \phi (I_{yy} - I_{zz}) + R_{y_2} b - R_{y_1} a ] &= 0 \\
 \delta \theta [ \Omega^2 I_{xz} + \Omega^2 \theta (I_{xx} - I_{zz}) + R_{x_1} a - R_{x_2} b ] &= 0
 \end{aligned} \tag{22}$$

Pour obtenir les réactions dans le cas où le rotor tourne sur appuis rigides, il suffit d'annuler les déplacements  $(x, y, \phi, \theta)$  dans les équations (22)

$$\begin{aligned}
 R_{x_1} + R_{x_2} + \Omega^2 M x_g &= 0 \\
 R_{y_1} + R_{y_2} + \Omega^2 M y_g &= 0 \\
 R_{y_2} b - R_{y_1} a - \Omega^2 I_{yz} &= 0 \\
 R_{x_1} a - R_{x_2} b + \Omega^2 I_{xz} &= 0
 \end{aligned}$$

soit en posant  $\ell = a + b$

$$\begin{aligned}
 R_{x_1} &= \frac{\Omega^2}{\ell} [ I_{xz} + M b x_g ] \\
 R_{x_2} &= \frac{\Omega^2}{\ell} [ I_{xz} - M a x_g ] \\
 R_{y_1} &= \frac{\Omega^2}{\ell} [ I_{yz} - M b y_g ] \\
 R_{y_2} &= \frac{\Omega^2}{\ell} [ I_{yz} + M a y_g ]
 \end{aligned} \tag{23}$$

Les réactions sur les appuis 1 et 2 peuvent donc être assimilées à deux forces d'amplitude constante, notées  $\bar{R}_1$  et  $\bar{R}_2$ , qui tournent avec le rotor à la vitesse  $\Omega$ . Pour les supprimer :

1. on ramène le centre de gravité du rotor sur son axe de rotation ( $x_g = y_g = 0$ ) pour une première correction de la distribution de masse. Cette correction est dénotée *équilibrage statique* par le fait qu'elle peut être évaluée sans mettre le rotor en rotation : lorsque le rotor est parfaitement équilibré statiquement, sa position angulaire au repos devient indifférente. Dans le cas contraire, le rotor se comporte comme un pendule inertiel lorsqu'il est écarté de sa position d'équilibre.
2. La seconde correction consiste à faire coïncider l'axe principal d'inertie longitudinal du rotor avec l'axe du rotor. Contrairement au déséquilibre statique, l'existence de produits d'inertie  $I_{xz}$  et  $I_{yz}$  non nuls ne peut être détectée que lorsque le rotor est en rotation. La correction correspondante porte donc le nom d'*équilibrage dynamique*.

Supposons que l'on dispose de 2 plans, appelés *plans d'équilibrage*, dans lesquels il est techniquement possible d'effectuer des corrections de masse qui conduisent à l'annulation des réactions (23) par centrage du centre de gravité sur l'axe du rotor ( $x'_g = y'_g = 0$ ) et annulation des produits d'inertie ( $I'_{xz} = I'_{yz} = 0$ ).

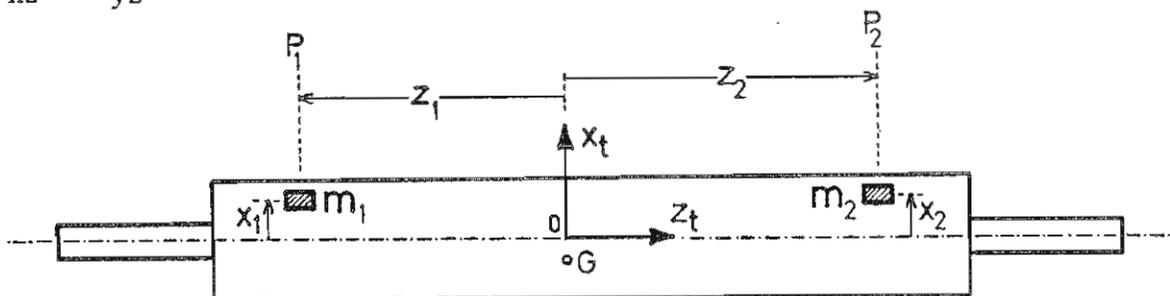


FIGURE 4  
Équilibrage dynamique  
par correction dans 2 plans

On peut y ajouter deux masses  $m_1$  et  $m_2$ , à des distances  $x_1$  et  $x_2$ , telles que

$$M x'_g = M x_g + m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$$

$$I'_{xz} = I_{xz} + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 = 0$$

De même, dans le plan  $O y_t z_t$ , les deux masses  $m_1$  et  $m_2$  doivent être localisées de telle sorte que

$$M y'_g = M y_g + m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0$$

$$I'_{yz} = I_{yz} + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 = 0$$

ou encore, en posant

$$x_1 = e_1 \cos \phi_1 \qquad x_2 = e_2 \cos \phi_2$$

$$y_1 = e_1 \sin \phi_1 \qquad y_2 = e_2 \sin \phi_2$$

où  $e_1$ ,  $e_2$  et  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  représentent respectivement les excentricités et positions angulaires des masses  $m_1$  et  $m_2$

$$M \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \end{bmatrix} + m_1 e_1 \begin{bmatrix} \cos \phi_1 \\ \sin \phi_1 \end{bmatrix} + m_2 e_2 \begin{bmatrix} \cos \phi_2 \\ \sin \phi_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} I_{xz} \\ I_{yz} \end{bmatrix} + m_1 e_1 z_1 \begin{bmatrix} \cos \phi_1 \\ \sin \phi_1 \end{bmatrix} + m_2 e_2 z_2 \begin{bmatrix} \cos \phi_2 \\ \sin \phi_2 \end{bmatrix} = 0$$

Le système de 4 équations (24) permet de déterminer les balourds d'équilibrage  $m_1 e_1$ ,  $m_2 e_2$  et leurs positions angulaires  $\phi_1$  et  $\phi_2$ .

Pour que le problème de l'équilibrage soit entièrement résolu, il reste donc à chercher comment on peut déterminer les balourds d'équilibrage  $m_1 e_1$  et  $m_2 e_2$  et leurs positions angulaires  $\phi_1$  et  $\phi_2$  dans deux plans du rotor choisis arbitrairement.

La liberté du choix des plans d'équilibrage est en pratique assez limitée, car peu d'endroits conviennent soit pour la fixation de masselottes, soit pour le forage de trous.

On notera qu'il est souhaitable que les plans d'équilibrage soient assez distants l'un de l'autre, de manière à faciliter la correction des produits d'inertie  $I_{xz}$  et  $I_{yz}$ . Chaque fois que l'on en aura la possibilité, on choisira les faces terminales du rotor, qui sont heureusement les plus accessibles en général. Le problème de l'équilibrage sera examiné en détail dans le chapitre 19.2.

##### 5. Comportement stationnaire du rotor rigide sur paliers élastiques

L'hypothèse de rotor rigide mis en rotation sur paliers présentant une certaine élasticité est représentative de nombreux systèmes tournants. En particulier, elle permet d'étudier le comportement de rotors rigides sur banc d'équilibrage à paliers élastiques.

On considère deux cas, selon que le rotor présente des raideurs identiques ou non selon les directes  $x$  et  $y$ .

## 5.1 Rotor rigide sur paliers isotropes

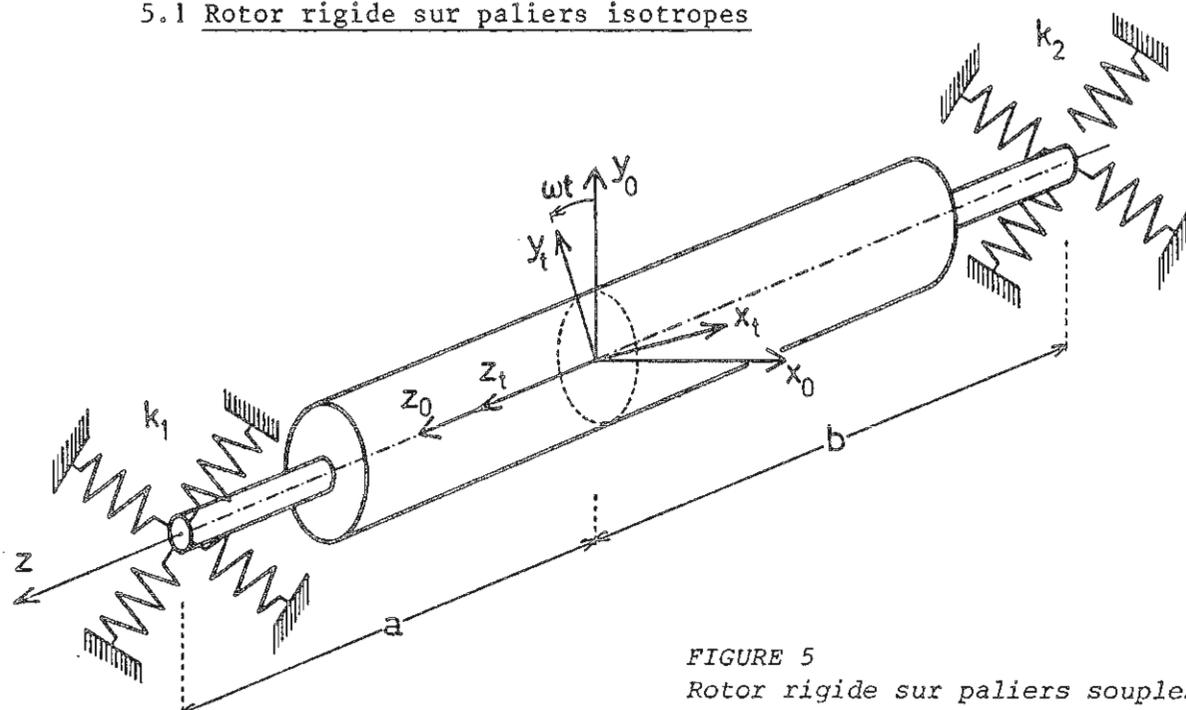


FIGURE 5  
Rotor rigide sur paliers souples

A ce moment, dans le repère tournant, l'énergie de déformation du système peut s'écrire, en fonction des déflexions  $(x_A, y_A)$  et  $(x_B, y_B)$  des paliers

$$V = \frac{1}{2} k_1 (x_A^2 + y_A^2) + \frac{1}{2} k_2 (x_B^2 + y_B^2) \quad (25)$$

Si l'on rapporte les déplacements aux déplacements et rotations du point de référence sur le rotor

$$\begin{aligned} x_A &= x + a\theta & x_B &= x - b\theta \\ y_A &= y - a\phi & y_B &= y + b\phi \end{aligned} \quad (26)$$

On peut également écrire

$$V = \frac{1}{2} k_1 [(x + a\theta)^2 + (y - a\phi)^2] + \frac{1}{2} k_2 [(x - b\theta)^2 + (y + b\phi)^2] \quad (27)$$

Si l'on utilise l'expression (20) de l'énergie cinétique, les équations de Lagrange conduisent au système d'équations

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \Omega^2 M & k_1 a - k_2 b & 0 & 0 \\ k_1 a - k_2 b & k_1 a^2 + k_2 b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1 + k_2 - \Omega^2 M & -k_1 a + k_2 b \\ 0 & 0 & -k_1 a + k_2 b & k_1 a^2 + k_2 b^2 \\ & & & -\Omega^2 (I_{xx} - I_{zz}) \\ & & & -\Omega^2 (I_{yy} - I_{zz}) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ y \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega^2 M x_g \\ \Omega^2 I_{xz} \\ \Omega^2 M y_g \\ -\Omega^2 I_{yz} \end{bmatrix} \quad (28)$$

L'équation (28) se découple en 2 systèmes d'équations d'ordre 2 qui donnent lieu à des valeurs critiques de  $\Omega^2$  qui coïncident lorsque le rotor est symétrique. Dans le cas contraire, la dissymétrie  $I_{xx} \neq I_{yy}$  entraîne un dédoublement des vitesses critiques.

Trois cas sont à distinguer.

a) Rotors longs

C'est le cas le plus fréquent, où la longueur du rotor est telle que ses moments d'inertie diamétraux sont plus grands que le moment d'inertie polaire

$$I_{xx} \text{ et } I_{yy} > I_{zz}$$

Dans ce cas, posons

$$\alpha^2 = \frac{k_1 + k_2}{M} \quad \beta^2 = \frac{k_1 a^2 + k_2 b^2}{I_{xx} - I_{zz}}$$

et définissons la constante de couplage

$$\gamma = \frac{k_1 a - k_2 b}{\sqrt{M (I_{xx} - I_{zz})}}$$

Selon la direction Ox, les vitesses critiques sont solutions de

$$(\alpha^2 - \Omega^2) (\beta^2 - \Omega^2) - \gamma^2 = 0$$

soit

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 \pm \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4(\alpha^2 \beta^2 - \gamma^2)}}{2} \quad (29)$$

Si l'on note que

$$\delta^2 = \alpha^2 \beta^2 - \gamma^2 = \frac{2 k_1 k_2 a b}{M (I_{xx} - I_{zz})} \geq 0$$

on en déduit que les deux valeurs propres  $\Omega_1^2$  et  $\Omega_2^2$  sont définies positives.

Il en résulte les amplitudes de déplacement en fonction de la vitesse de rotation

$$\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \frac{\Omega^2}{(\alpha^2 - \Omega^2)(\beta^2 - \Omega^2) - \gamma^2} \begin{bmatrix} (\beta^2 - \Omega^2) x_g - \frac{\gamma I_{xz}}{\sqrt{M(I_{xx} - I_{zz})}} \\ (\alpha^2 - \Omega^2) \frac{I_{xz}}{I_{xx} - I_{zz}} - \gamma \sqrt{\frac{M x_g^2}{I_{xx} - I_{zz}}} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Elles sont toutes deux nulles pour  $\Omega^2 = 0$  et deviennent infinies pour les vitesses critiques  $\Omega_1^2$  et  $\Omega_2^2$ . De plus, chacune des deux composantes s'annule pour une vitesse intermédiaire voisine de  $\beta^2$  et  $\alpha^2$  respectivement.

Il est intéressant d'observer le comportement du système à grande vitesse :

- pour le déplacement  $x$  :

$$\lim_{\Omega^2 \rightarrow \infty} x = -x_g$$

ce qui montre que le centre de masse évolue de manière à se centrer sur l'axe de rotation

- pour la rotation  $\theta$  :

$$\lim_{\Omega^2 \rightarrow \infty} \theta = - \frac{I_{xz}}{I_{xx} - I_{zz}}$$

de même, l'axe principal d'inertie proche de Oz tend à se coucher sur l'axe de rotation.

Tant que les effets de flexibilité du rotor lui-même ne se manifestent pas, la zone correspondant aux grandes vitesses de rotation est donc une zone de fonctionnement tranquille.

L'examen de la figure 6, qui montre l'évolution des composantes de déplacement  $x(\Omega^2)$  et  $\theta(\Omega^2)$ , indique que deux zones de fonctionnement peuvent être admises pour un rotor :

- la zone  $0 < \Omega^2 < \Omega_1^2$ , dans laquelle on observe de faibles variations de la réponse avec  $\Omega^2$  tant que l'on reste suffisamment en dessous de la 1<sup>ère</sup> vitesse critique ;
- la zone  $\Omega^2 > \Omega_2^2$ , dans laquelle le comportement du rotor devient remarquablement stable en fonction de la vitesse, pour autant que l'on n'atteigne pas le domaine de vitesse dans lequel la flexibilité du rotor introduit de nouvelles vitesses critiques.

En particulier, pour réaliser l'équilibrage d'un rotor, on travaillera dans l'une de ces deux zones, et l'on évitera la plage de vitesse intermédiaire dans laquelle de fortes variations de déplacement sont observées en amplitude et en phase en fonction de la vitesse.

b) Rotors en forme de disque :  $I_{zz} > I_{xx}$

On note dans ce cas que la fréquence caractéristique du mode de rotation

$$\beta = \sqrt{\frac{k_1 a^2 + k_2 b^2}{I_{xx} - I_{zz}}}$$

devient imaginaire : une des deux vitesses critiques (29) est supprimée par effet gyroscopique. Seule la vitesse critique

$$\Omega_1^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\delta^2}}{2} > \alpha^2$$

( $\beta^2, \delta^2 < 0$ ) associée au mouvement de translation subsiste.

On retrouve le résultat bien connu que le couple d'origine gyroscopique a un effet stabilisant sur le comportement d'un rotor lorsque le moment d'inertie diamétral excède son moment d'inertie polaire. Les amplitudes de mouvement

évoluent alors en fonction de la vitesse comme indiqué sur la figure 7.

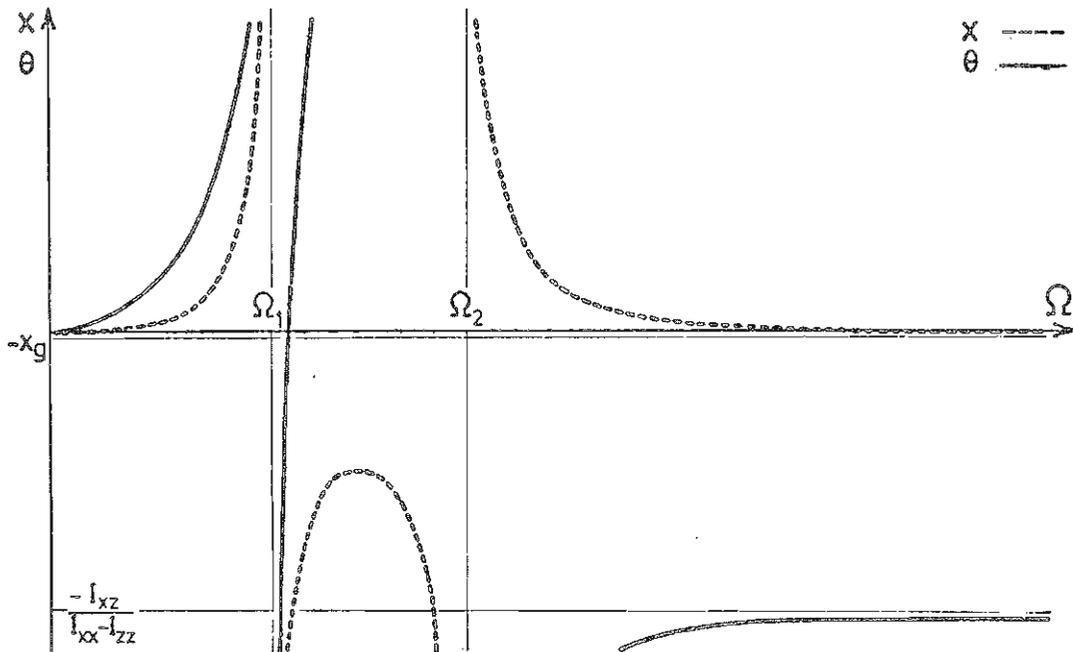


FIGURE 6

Evolution des amplitudes de vibration  
d'un rotor long ( $I_{xx} > I_{zz}$ ) en fonction de la vitesse  $\Omega$

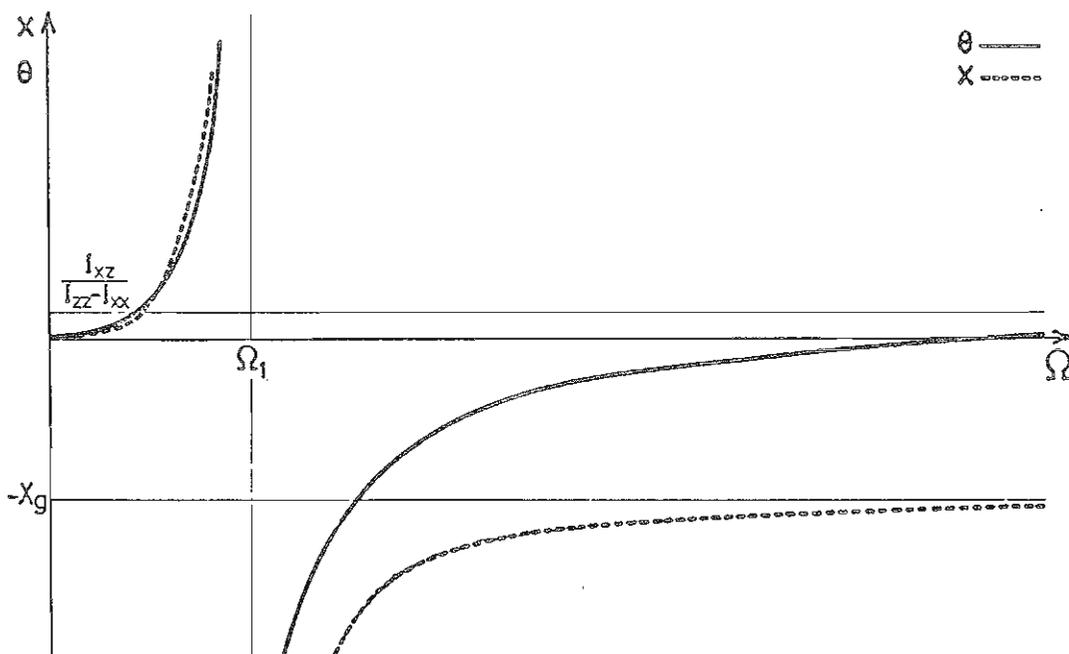


FIGURE 7

Evolution des amplitudes de vibration  
d'un rotor en forme de disque ( $I_{xx} < I_{zz}$ ) en fonction de la vitesse  $\Omega$

Dans le cas limite  $I_{xx} = I_{zz}$ , qui correspond à un rotor cylindrique plein de hauteur égale à  $0,87^{xx}$  fois  $^{zz}$  son diamètre, l'effet d'inertie rotatoire est annulé et seule subsiste la vitesse critique

$$\Omega_1^2 = \alpha^2$$

associée au mouvement de translation.

Remarque

En général, lorsqu'on étudie le comportement d'un rotor sur paliers élastiques dans le cadre particulier du problème de l'équilibrage dynamique, les rotors à analyser sont du type long, et l'on admet que les effets d'origine gyroscopique sont négligeables, ce qui revient à admettre

$$I_{xx}, I_{yy} \gg I_{zz}$$

L'allure de la réponse reste alors celle de la figure 6.

5.2 Rotor rigide tournant sur paliers de raideurs horizontales et verticales distinctes

Considérons le cas d'un rotor symétrique (mis à part le déséquilibre que l'on veut corriger) tournant sur paliers de raideurs différentes selon les directions  $x_0$  et  $y_0$ . Ce cas est représentatif des machines d'équilibrage à paliers souples, dans lesquelles on réalise volontairement des paliers très raides verticalement et très souples horizontalement.

La représentation du mouvement dans le repère tournant, comme nous l'avons fait dans le cas précédent, conduit à une expression périodique de l'énergie potentielle des paliers. On a donc avantage à représenter le mouvement du rotor dans un repère fixe dans l'espace, par les déplacements  $X$  et  $Y$ .

Pour l'énergie potentielle, nous pouvons écrire

$$V = \frac{1}{2} [k_1' X_1^2 + k_1'' Y_1^2] + \frac{1}{2} [k_2' X_2^2 + k_2'' Y_2^2] \quad (31)$$

et nous recalculons l'énergie cinétique dans un repère absolu en tenant compte des transformations suivantes

$$\begin{aligned} x &= X \cos \Omega t + Y \sin \Omega t \\ y &= -X \sin \Omega t + Y \cos \Omega t \end{aligned} \quad (32)$$

Pour les rotations :

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial z} \sin \Omega t - \frac{\partial Y}{\partial z} \cos \Omega t = \Theta \sin \Omega t + \Phi \cos \Omega t \\ \theta &= +\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial z} \cos \Omega t + \frac{\partial Y}{\partial z} \sin \Omega t = \Theta \cos \Omega t - \Phi \sin \Omega t \end{aligned}$$

D'où l'expression de l'énergie cinétique totale associée au régime permanent

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \Omega^2 [X^2 + Y^2] + M \Omega^2 X [x_g \cos \Omega t - y_g \sin \Omega t] \\ &\quad + M \Omega^2 Y [x_g \sin \Omega t + y_g \cos \Omega t] \\ &\quad + \frac{1}{2} \Omega^2 C + \frac{1}{2} \Omega^2 (A - C) [\Phi^2 + \Theta^2] \\ &\quad + 2 \Theta [I_{xz} \cos \Omega t - I_{yz} \sin \Omega t] \\ &\quad - 2 \Phi [I_{xz} \sin \Omega t + I_{yz} \cos \Omega t] \end{aligned} \quad (33)$$

A condition de noter :

- le moment d'inertie polaire  $C = I_{zz}$
- les moments d'inertie diamétraux  $I_{xx} = I_{yy} = A$ .

On transforme enfin l'énergie de déformation des paliers en notant que

$$\begin{aligned} X_1 &= X + a \Theta & X_2 &= X - b \Theta \\ Y_1 &= Y - a \Phi & Y_2 &= Y + b \Phi \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} k_1' (X + a \Theta)^2 + \frac{1}{2} k_1'' (Y - a \Phi)^2 \\ &+ \frac{1}{2} k_2' (X - b \Theta)^2 + \frac{1}{2} k_2'' (Y + b \Phi)^2 \end{aligned} \quad (34)$$

On peut alors écrire les équations de Lagrange du système pour les mouvements dans les plans horizontal et vertical :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} k_1' + k_2' - \Omega^2 M & k_1' a - k_2' b \\ k_1' a - k_2' b & k_1' a^2 + k_2' b^2 - \Omega^2 (A - C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix} &= \Omega^2 \begin{bmatrix} M(x_g \cos \Omega t - y_g \sin \Omega t) \\ I_{xz} \cos \Omega t - I_{yz} \sin \Omega t \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} k_1'' + k_2'' - \Omega^2 M & -k_1'' a + k_2'' b \\ -k_1'' a + k_2'' b & k_1'' a^2 + k_2'' b^2 - \Omega^2 (A - C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \Phi \end{bmatrix} &= \Omega^2 \begin{bmatrix} M(x_g \sin \Omega t + y_g \cos \Omega t) \\ -I_{xz} \sin \Omega t - I_{yz} \cos \Omega t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (35)$$

Si l'on résout ce système d'équations pour une vitesse de rotation donnée, on constate que le mouvement résultant prend la forme d'une ellipse dont la forme et la dimension varient avec la vitesse de rotation. En particulier, si la vitesse de rotation est suffisamment élevée pour que les zones d'instabilité délimitées par les vitesses critiques calculées soient dépassées :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_g \cos \Omega t - y_g \sin \Omega t \\ x_g \sin \Omega t + y_g \cos \Omega t \end{bmatrix}$$

l'axe du rotor décrit alors un cercle.

Dans les machines d'équilibrage à paliers souples, le mouvement est pratiquement empêché selon la direction Y. Le mouvement selon X est une vibration à une fréquence égale à la vitesse de rotation, mais est déphasé par rapport au mouvement de rotation d'un angle qui dépend

- du déséquilibre du rotor,
- de la vitesse de rotation.

Les méthodes d'équilibrage dynamique mettent à profit d'une part, le synchronisme qui existe entre le mouvement de rotation et la vibration aux paliers, et d'autre part, le fait que l'amplitude et la phase de cette vibration ne dépendent que du déséquilibre, si l'on travaille à vitesse constante.

#### 6. Vibrations non amorties d'un rotor constitué d'un arbre de masse négligeable comportant un disque en son milieu

Considérons le système représenté schématiquement par la figure 8. On admet que l'arbre peut présenter des raideurs différentes  $k_x$  et  $k_y$  en flexion mesurées au point O. De plus, on admet que le disque de masse  $m$  est monté avec une certaine excentricité ( $p$   $q$ ) de son centre de gravité.

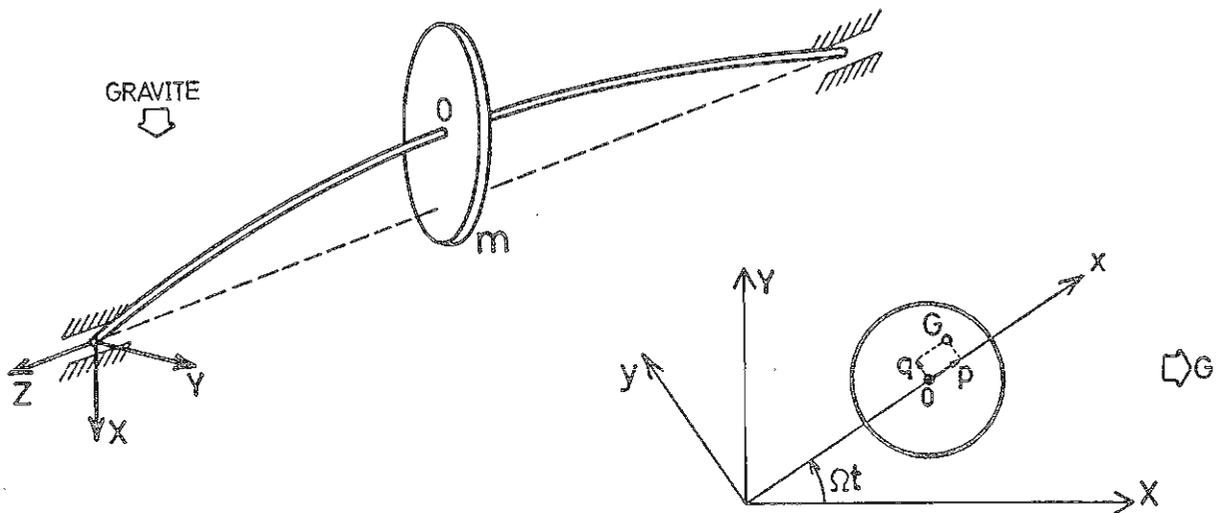


FIGURE 8  
Rotor monté de façon symétrique

L'hypothèse que le disque est monté au milieu de l'arbre intervient dans le fait que, la déformée étant nécessairement symétrique, les effets d'inertie rotatoire du disque n'interviennent pas. Enfin, les forces de gravité sont supposées agir selon la direction X.

On peut exprimer les équations du mouvement pour le système à deux degrés de liberté résultant :

- dans un repère (x,y) en rotation

On calcule successivement

- l'énergie de déformation de l'arbre

$$V_{\text{int}} = \frac{1}{2} (k_x x^2 + k_y y^2)$$

- l'énergie cinétique du disque

$$T = \frac{1}{2} m \{ [\dot{x} - \Omega(y + q)]^2 + [\dot{y} + \Omega(x + p)]^2 \}$$

- l'énergie potentielle des forces de gravité

$$V_{\text{ext}} = -mg(x \cos \Omega t - y \sin \Omega t)$$

D'où les équations du mouvement

$$-m\ddot{x} + m\Omega^2(x + p) + 2m\Omega\dot{y} - k_x x = -mg \cos \Omega t$$

$$-m\ddot{y} + m\Omega^2(y + q) - 2m\Omega\dot{x} - k_y y = +mg \sin \Omega t$$

Divisons ensuite par la masse de l'arbre et définissons les fréquences propres

$$\alpha^2 = \frac{k_x}{m} \quad \beta^2 = \frac{k_y}{m} \quad (36)$$

on obtient

$$\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} + (\alpha^2 - \Omega^2)x = \Omega^2 p + g \cos \Omega t \quad (37)$$

$$\ddot{y} + 2\Omega\dot{x} + (\beta^2 - \Omega^2)y = \Omega^2 q - g \sin \Omega t$$

On note donc que la solution du système (37) comporte trois parties :

- 1) la solution générale du système homogène, qui correspond aux vibrations libres ;
- 2) la solution particulière du système complet dans le cas où  $p, q \neq 0$  et  $mg = 0$  qui inclut l'effet de l'excentricité du centre de gravité ;
- 3) la solution particulière du système complet dans le cas où  $p = q = 0$ ,  $mg \neq 0$  qui inclut l'effet de la gravité.

- dans un repère (X,Y) inertiel

Dans ce cas, omettons pour simplifier les effets de l'excentricité du centre de masse et de la gravité

On calcule successivement

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)$$

$$V = \frac{1}{2} [ k_x (X \cos \Omega t + Y \sin \Omega t)^2 + k_y (-X \sin \Omega t + Y \cos \Omega t)^2 ]$$

On définit alors

$$\text{une raideur moyenne } \frac{k_x + k_y}{2} = \frac{1}{2} m (\alpha^2 + \beta^2) = k_m$$

$$\text{un écart de raideur } \frac{k_x - k_y}{2} = \frac{1}{2} m (\alpha^2 - \beta^2) = k_\sigma$$

auquel cas

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} [ (k_m + k_\sigma) (X \cos \Omega t + Y \sin \Omega t)^2 + (k_m - k_\sigma) (-X \sin \Omega t + Y \cos \Omega t)^2 ] \\ &= \frac{1}{2} [ k_m (X^2 + Y^2) + k_\sigma (X^2 - Y^2) \cos 2\Omega t + 2k_\sigma XY \sin 2\Omega t ] \end{aligned}$$

soit finalement

$$V = \frac{1}{2} m [ \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} (X^2 + Y^2) + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} (X^2 - Y^2) \cos 2\Omega t + (\alpha^2 - \beta^2) XY \sin 2\Omega t ]$$

et il vient les équations du mouvement

$$\ddot{X} + [ \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{2} + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{2} \cos 2\Omega t ] X + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} Y \sin 2\Omega t = 0 \tag{38}$$

$$\ddot{Y} + [ \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \cos 2\Omega t ] Y + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} X \sin 2\Omega t = 0$$

On note que les termes de couplage gyroscopique ont disparu, mais par contre, le passage au repère inertiel fait apparaître une raideur périodique à la fréquence  $2\Omega t$ . La périodicité des coefficients de raideur n'intervient plus lorsque le système est symétrique. La solution d'un système d'équations à coefficient périodique tel que (38) requiert l'assimilation préalable de la théorie de Floquet sur les systèmes à coefficients périodiques. Nous ne l'envisagerons pas dans le cadre du présent exposé.

Solution dans le repère tournant

A. Solution du problème homogène

Pour résoudre le système

$$\ddot{x} - 2\Omega \dot{y} + (\alpha^2 - \Omega^2) x = 0$$

$$\ddot{y} + 2\Omega \dot{x} + (\beta^2 - \Omega^2) y = 0$$

on recherche une solution exprimant une vibration dans le système tournant sous le forme

$$x = A e^{i\omega t} \quad y = B e^{i\omega t}$$

où A et B sont des constantes. La substitution fournit l'équation aux valeurs propres

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 - \Omega^2 - \omega^2 & -2i\Omega\omega \\ 2i\Omega\omega & \beta^2 - \Omega^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

soit

$$\omega^4 - \omega^2 (\alpha^2 + \beta^2 + 2\Omega^2) + (\alpha^2 - \Omega^2) (\beta^2 - \Omega^2) = 0 \quad (39)$$

d'où les racines

$$\omega_{1,2,3,4} = \pm \left[ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\Omega^2 \pm [(\alpha^2 - \beta^2)^2 + 8\Omega^2(\alpha^2 + \beta^2)]^{1/2}}{2} \right]^{1/2}$$

On note que deux des racines s'annulent pour  $\Omega^2 = \alpha^2$  et  $\Omega^2 = \beta^2$ , auquel cas l'amplitude du mouvement devient arbitrairement grande.

Soit  $\lambda$  la fréquence angulaire du mouvement dans le repère fixe. Elle est égale à

$$\lambda = \omega + \Omega \quad (40)$$

puisqu'un déplacement constant dans le repère tournant se transforme en mouvement synchrone avec la rotation dans le repère fixe.

Lorsqu'on trace le diagramme  $\lambda(\Omega)$ , on obtient l'évolution représentée ci-dessous

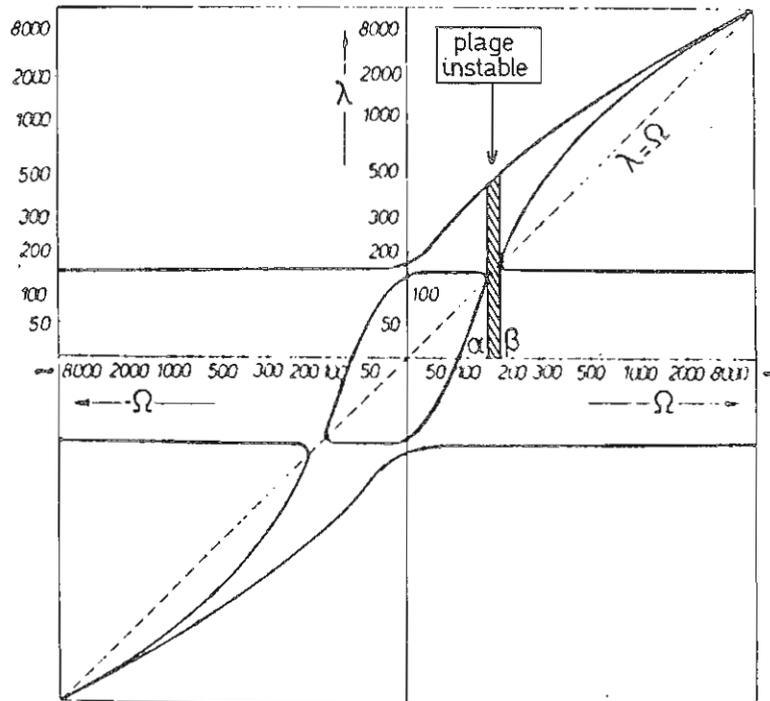


FIGURE 9

Racines du système arbre + disque  
en fonction de la vitesse de rotation

On observe que

1) la ligne droite  $\lambda = \Omega$  ( $\Omega > 0$ ) coupe la fonction  $\lambda(\Omega)$  en 2 points qui sont les deux valeurs  $\Omega = \alpha$  et  $\Omega = \beta$  correspondant à un mouvement de précession synchrone. Ces deux points, pour lesquels la stabilité du rotor est neutre, sont les *vitesse critiques directes du rotor*.

2) Pour  $\Omega \rightarrow \infty$ , une des branches de la fonction tend vers la valeur moyenne

$\lambda_m = \sqrt{\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)}$ , tandis que la seconde branche de la courbe donne toujours une valeur de  $\lambda$  supérieure à  $\Omega$ .

3) Le rotor reste stable aussi longtemps que les racines  $\omega_{1,2,3,4}$  sont réelles, ce qui est le cas si

$$1) \alpha^2 + \beta^2 + 2\Omega^2 > 0$$

$$2) (\alpha^2 - \beta^2)^2 + 8\Omega^2(\alpha^2 + \beta^2) > 0$$

$$3) (\alpha^2 - \Omega^2)(\beta^2 - \Omega^2) > 0$$

Les deux premières conditions sont toujours satisfaites et la troisième montre que la solution est toujours stable excepté dans l'intervalle  $(\alpha, \beta)$ . La plage de vitesse  $\alpha < \Omega < \beta$  correspondante est une plage d'*instabilité*.

On en conclut que l'anisotropie de la raideur de l'arbre, qui se traduit par des constantes  $k_1$  et  $k_2$  différentes, transforme la vitesse critique directe du rotor isotrope en une plage d'instabilité limitée par les vitesses critiques différentes que l'on calcule selon les deux directions.

#### B. Effet de l'excentricité du centre de gravité

On recherche une solution particulière du système en l'absence de gravité ( $g = 0$ ).

Faisant l'hypothèse d'un mouvement constant, on obtient

$$x = \frac{\Omega^2}{\alpha^2 - \Omega^2} p \quad y = \frac{\Omega^2}{\beta^2 - \Omega^2} q \quad (41)$$

ce qui montre qu'à très grande vitesse, le centre de gravité a tendance à revenir sur l'axe de rotation, puisque

$$\lim_{\Omega^2 \rightarrow \infty} x = -p \quad \text{et} \quad \lim_{\Omega^2 \rightarrow \infty} y = -q$$

Si l'on représente le mouvement par le vecteur complexe

$$z_e = x + iy$$

que l'on met sous la forme

$$z_e = R_e e^{-i\phi} \quad (42)$$

avec

$$R_e = \Omega^2 \frac{\sqrt{p^2(\beta^2 - \Omega^2)^2 + q^2(\alpha^2 - \Omega^2)^2}}{|(\alpha^2 - \Omega^2)(\beta^2 - \Omega^2)|}$$

$$\tan \phi = \frac{q}{p} \frac{\alpha^2 - \Omega^2}{\beta^2 - \Omega^2}$$

On note que dans le repère fixe le mouvement est de la forme

$$Z_e = R_e e^{i(\Omega t - \phi)} \quad (43)$$

D'où

en raison de l'excentricité du centre de gravité, le centre du disque décrit un cercle de rayon  $R_e$  avec une vitesse angulaire égale à celle de la rotation. Ce mouvement est décalé d'un angle  $\phi$  qui dépend à la fois de l'excentricité ( $p, q$ ) et de la vitesse de rotation.

### C. Effet du poids du disque

On recherche cette fois une solution particulière du système (37) dans le cas où  $p = q = 0$ . Posant comme dans le cas précédent  $z = x + i y$ , en multipliant la seconde équation par  $i$  et additionnant, il vient l'équation complexe

$$\ddot{z} + 2 i \Omega \dot{z} + \left( \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} - \Omega^2 \right) z + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \bar{z} = g e^{-i \Omega t}$$

On essaie donc une solution particulière de la forme

$$z_g = U e^{i \Omega t} + V e^{-i \Omega t} \quad (44)$$

où  $U$  et  $V$  sont des constantes complexes. Notant que

$$\bar{z}_g = \bar{U} e^{-i \Omega t} + \bar{V} e^{i \Omega t}$$

on obtient les équations

$$\left( -4 \Omega^2 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right) U + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \bar{V} = 0$$

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \bar{U} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} V = +g$$

Remplaçons la première équation par son conjugué

$$\bar{U} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{8 \Omega^2 - (\alpha^2 + \beta^2)} V$$

par substitution dans la deuxième équation

$$\begin{aligned} V = \bar{V} &= +2g \frac{8 \Omega^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}{+(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (\alpha^2 + \beta^2) [8 \Omega^2 - (\alpha^2 + \beta^2)]} \\ &= \frac{g}{2} \frac{8 \Omega^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}{2 \Omega^2 (\alpha^2 + \beta^2) - \alpha^2 \beta^2} \end{aligned}$$

et de même

$$U = \bar{U} = \frac{g}{2} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2 \Omega^2 (\alpha^2 + \beta^2) - \alpha^2 \beta^2}$$

Si on repasse à la représentation du mouvement en partie réelle, on obtient

$$x_g = \frac{4 \Omega^2 - \beta^2}{\alpha^2 \beta^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2) \Omega^2} \cos \Omega t \quad (45)$$

$$y_g = \frac{\alpha^2 - 4 \Omega^2}{\alpha^2 \beta^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2) \Omega^2} \sin \Omega t$$

ce qui montre qu'une résonance apparaît pour la vitesse

$$\Omega_g = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2(\alpha^2 + \beta^2)}} \quad (46)$$

soit en posant

$$\omega_m^2 = \frac{k_x + k_y}{2m} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{k_x - k_y}{k_x + k_y}$$

$$\Omega_g = \frac{1}{2} \omega_m \sqrt{1 - \mu^2} \quad (47)$$

Pour un arbre isotrope, une résonance apparaît pour une vitesse égale à la moitié de la fréquence propre de l'arbre, que l'on dénote *vitesse critique secondaire due à la gravité*.

Examinons encore la forme que prend le mouvement dans le repère fixe

$$Z_g = z_g e^{i\Omega t} = U e^{2i\Omega t} + V \quad (48)$$

soit

$$X = U \cos 2\Omega t + V$$

$$Y = U \sin 2\Omega t$$

Lorsque l'arbre est isotrope, l'effet de la pesanteur se traduit par le seul terme constant, le mouvement de précession disparaît. Ce qui montre que le centre du disque subit une déflexion constante d'amplitude  $V$  selon  $X$ , et exécute en même temps un mouvement circulaire à une vitesse  $2\Omega$ . Il est intéressant de noter que dans l'intervalle

$$\frac{\alpha^2 \beta^2}{2(\alpha^2 + \beta^2)} < \Omega^2 < \frac{\alpha^2 + \beta^2}{8}$$

la déflexion constante de l'arbre s'effectue en sens contraire de la gravité. Contrairement à l'effet de balourd, l'effet de la gravité ne peut être supprimé par un équilibrage.

#### D. Effets combinés du balourd et de la gravité

Combinant les résultats (43) et (48), on peut écrire le mouvement forcé du centre du disque dans le repère fixe sous la forme

$$Z = R_e e^{i(\Omega t - \Phi)} + U e^{2i\Omega t} + V \quad (49)$$

soit

$$X = R_e \cos(\Omega t - \Phi) + U \cos 2\Omega t + V$$

$$Y = R_e \sin(\Omega t - \Phi) + U \sin 2\Omega t$$

On y observe que :

- 1) les vitesses critiques principales  $\alpha$  et  $\beta$  se caractérisent par une réponse infinie à l'excentricité initiale. On sait par ailleurs que dans l'intervalle  $[\alpha, \beta]$ , la solution du système homogène est instable.
- 2) Une vitesse critique secondaire

$$\Omega_g = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2(\alpha^2 + \beta^2)}}$$

résulte de l'effet de la gravité. Elle affecte tant l'amplitude de la déflexion constante selon X que la précession directe à la vitesse  $2\Omega$ .

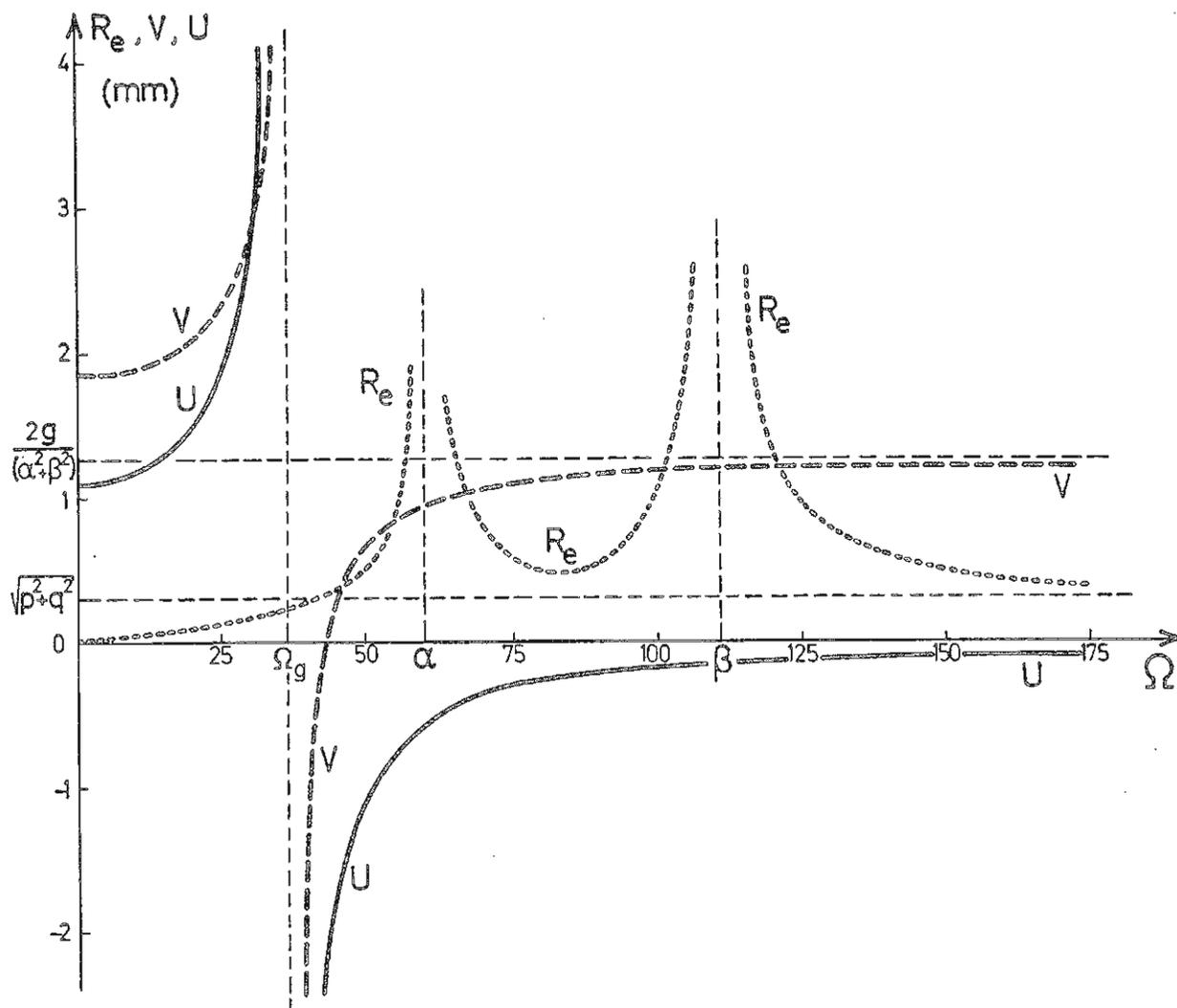


FIGURE 10

Effets combinés du balourd et de la gravité  
 $(\alpha = 59.2 \text{ sec}^{-1}, \beta = 110.9 \text{ sec}^{-1}, p = q = 0.02 \text{ cm})$

$$U = \frac{g}{2} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\Omega^2(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha^2\beta^2}$$

$$V = \frac{g}{2} \frac{\Omega^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}{2\Omega^2(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha^2\beta^2}$$

$$R_e = \frac{\Omega^2 \sqrt{p^2(\beta^2 - \Omega^2)^2 + q^2(\alpha^2 - \Omega^2)^2}}{|(\alpha^2 - \Omega^2)(\beta^2 - \Omega^2)|}$$

### 7. Vibrations de flexion d'un arbre flexible de machine à axe horizontal

Un arbre anisotrope a une section présentant 2 axes principaux d'inertie perpendiculaires l'un à l'autre passant par le centre de la section.

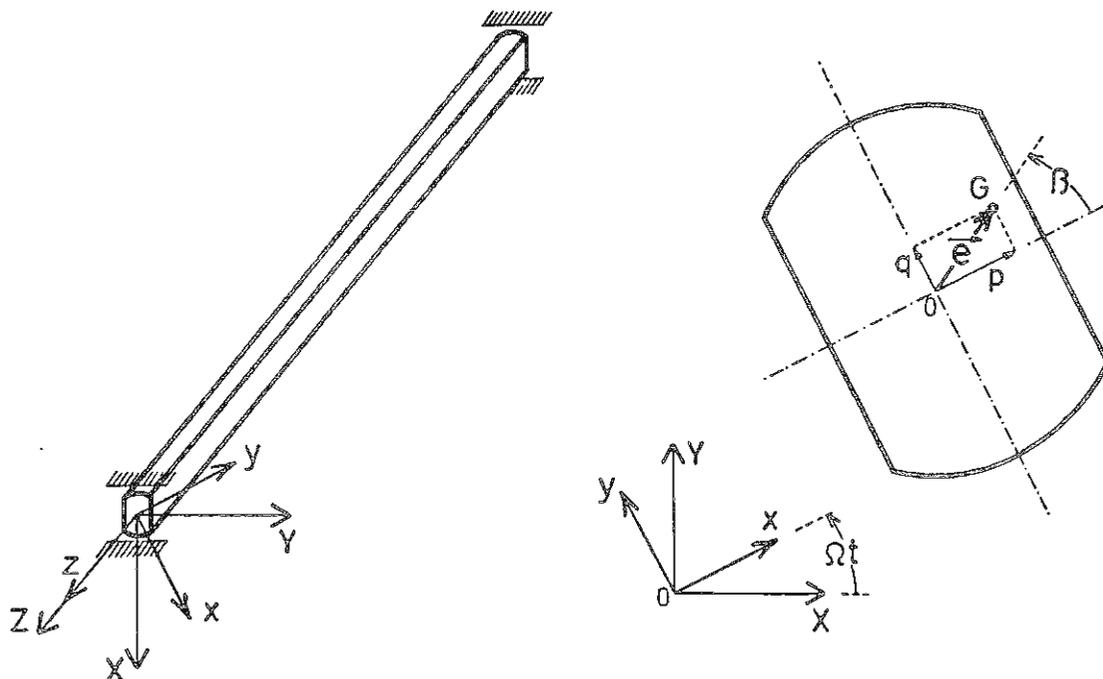


FIGURE 11  
Arbre flexible de raideurs différentes  
selon 2 directions

A chacun de ces axes, correspond une raideur en flexion  $EI_x$  et  $EI_y$  déterminée. Il s'ensuit que les vibrations provoquées par un balourd éventuel caractérisé par une excentricité  $\vec{e}(z) = (e \cos \beta, e \sin \beta)$  du centre de masse, lorsque l'arbre tourne, dépend du balourd dans chaque section.

Si l'arbre a son axe horizontal, il se produit en outre, comme dans le cas simple d'un seul disque étudié, des vibrations de flexion dues à la gravité.

Soient  $x$  et  $y$  les déformées en flexion de l'arbre dans le repère tournant.

Pour exprimer les équations du mouvement, on calcule successivement

- l'énergie potentielle de déformation de l'arbre

$$V_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ EI_x \left( \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right)^2 + EI_y \left( \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right)^2 \right] dz \quad (50)$$

- l'énergie cinétique de l'arbre, en négligeant les effets d'inertie rotatoire

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m \left\{ \left[ \dot{x} - \Omega (y + e \sin \beta) \right]^2 + \left[ \dot{y} + \Omega (x + e \cos \beta) \right]^2 \right\} dz \quad (51)$$

- l'Énergie potentielle des forces de gravité

$$V_{\text{ext}} = - \int_0^{\ell} m g (x \cos \Omega t - y \sin \Omega t) dz \quad (52)$$

On calcule ensuite les équations du mouvement par expression du principe de Hamilton. Tous calculs faits, on obtient les équations du mouvement dans le repère tournant

$$m(\ddot{x} - \Omega^2 x - 2\Omega \dot{y}) + \frac{d^2}{dz^2} [EI_x \frac{d^2 x}{dz^2}] = m \Omega^2 e \cos \beta + mg \cos \Omega t$$

$$m(\ddot{y} - \Omega^2 y + 2\Omega \dot{x}) + \frac{d^2}{dz^2} [EI_y \frac{d^2 y}{dz^2}] = m \Omega^2 e \sin \beta - mg \sin \Omega t$$

On considère sans résolution dans le cas de caractéristiques uniformes  $EI_x$ ,  $EI_y$  et  $m$ , avec des conditions aux limites correspondant à la poutre bi-appuyée : soit, en posant

$$\alpha^2 = \frac{EI_x}{m} \quad \text{et} \quad \beta^2 = \frac{EI_y}{m} \quad (53)$$

$$\ddot{x} - \Omega^2 x - 2\Omega \dot{y} + \alpha^2 \frac{d^4 x}{dz^4} = \Omega^2 e \cos \beta + g \cos \Omega t \quad (54)$$

$$\ddot{y} - \Omega^2 y + 2\Omega \dot{x} + \beta^2 \frac{d^4 y}{dz^4} = \Omega^2 e \sin \beta - g \sin \Omega t$$

$$x(0) = x(\ell) = \ddot{x}(0) = \ddot{x}(\ell) = 0$$

$$y(0) = y(\ell) = \ddot{y}(0) = \ddot{y}(\ell) = 0$$

On peut aussi, comme dans le cas discret, exprimer les mêmes équations dans le repère fixe par la transformation

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

Les équations du mouvement prennent alors la forme

$$\ddot{X} + \left[ \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \cos 2\Omega t \right] \frac{d^4 X}{dz^4} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \sin 2\Omega t \frac{d^4 Y}{dz^4} = e\Omega^2 \cos(\beta + \Omega t) + g$$

$$\ddot{Y} + \left[ \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \sin 2\Omega t \right] \frac{d^4 Y}{dz^4} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \sin 2\Omega t \frac{d^4 X}{dz^4} = e\Omega^2 \sin(\beta + \Omega t)$$

(55)

Toutefois, la solution des équations du système sous la forme (55) nécessite le recours à la théorie des équations différentielles à coefficients périodiques, ce que nous ne ferons pas ici. On se limite donc au traitement du problème dans le repère tournant. Pour exprimer la solution, nous allons travailler de la même manière que pour le système à 2 degrés de liberté :

- nous utiliserons les équations dans le repère tournant ;
- nous séparons la solution en réponse du système homogène, réponse forcée à un balourd et réponse forcée à la gravité.

Solution dans le cas homogène

$$\text{Posons } x = \phi(t) \eta(z) \quad y = \psi(t) \eta(z) \quad (56)$$

La substitution fournit les équations

$$\frac{1}{\alpha^2} (\ddot{\phi} - \Omega^2 \phi - 2\Omega \dot{\psi}) + \frac{\eta''''}{\eta} \phi = 0$$

$$\frac{1}{\beta^2} (\ddot{\psi} - \Omega^2 \psi + 2\Omega \dot{\phi}) + \frac{\eta''''}{\eta} \psi = 0$$

qui ne peuvent être satisfaites que si

$$\eta'''' - \mu^4 \eta = 0 \quad (57)$$

d'où les équations vérifiées par la partie temporelle

$$\ddot{\phi} - \Omega^2 \phi - 2\Omega \dot{\psi} + \alpha^2 \mu^4 \phi = 0 \quad (58)$$

$$\ddot{\psi} - \Omega^2 \psi + 2\Omega \dot{\phi} + \beta^2 \mu^4 \psi = 0$$

où  $\mu^4$  est une constante à déterminer.

L'équation régissant la partie spatiale admet la solution générale

$$\eta = A \sin \mu z + B \cos \mu z + C \operatorname{sh} \mu z + D \operatorname{ch} \mu z$$

Tenant compte des conditions aux limites, on obtient  $B = C = D = 0$  et

$$\mu = \frac{n\pi}{\ell} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

D'où la forme générale de la solution spatiale

$$\eta_n = \sin \frac{n\pi}{\ell} \cdot z \quad (59)$$

qui correspond aux solutions propres de la poutre au repos.

Définissons ensuite les fréquences propres non dimensionnelles de la poutre

$$\alpha_n^2 = \alpha^2 \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4 \quad \beta_n^2 = \beta^2 \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4 \quad (60)$$

Les parties temporelles correspondantes de la solution,  $\phi_n$  et  $\psi_n$ , vérifient

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_n - \Omega^2 \phi_n - 2\Omega \dot{\psi}_n + \alpha_n^2 \phi_n &= 0 \\ \ddot{\psi}_n - \Omega^2 \psi_n + 2\Omega \dot{\phi}_n + \beta_n^2 \psi_n &= 0 \end{aligned} \quad (61)$$

On essaie donc une solution de la forme

$$\begin{bmatrix} \phi_n \\ \psi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} e^{i\omega t}$$

ce qui donne l'équation aux valeurs propres

$$\omega^4 - 2\omega^2 \left( \Omega^2 + \frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{2} \right) + (\Omega^2 - \alpha_n^2) (\Omega^2 - \beta_n^2) = 0 \quad (62)$$

Il en résulte que

- à chaque nombre d'onde de la solution, correspondent 4 racines fournies par l'équation ci-dessus, et évoluant avec la vitesse  $\Omega$  de la même manière que pour le système à un disque ;
- lorsque les raideurs selon x et y sont identiques, à chaque fréquence propre de vibration de l'arbre

$$\omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{m\ell^4}}$$

correspond une vitesse critique de rotation ;

- lorsque les raideurs selon x et y sont distinctes, à chaque nombre d'onde dans la série des modes propres, correspond une plage de vitesse instable limitée par les fréquences propres selon x et y

$$n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{(EI)_{\min}}{m\ell^4}} < \Omega < n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{(EI)_{\max}}{m\ell^4}}$$

sa largeur est donc proportionnelle à  $n^2$ .

#### Vibrations entretenues par le balourd

On recherche une solution particulière du système (58) que l'on obtient en calculant la solution stationnaire

$$\alpha^2 \frac{d^4 x}{dz^4} - \Omega^2 x = \Omega e(z) \cos \beta(z) \quad (63)$$

$$\beta^2 \frac{d^4 y}{dz^4} - \Omega^2 y = \Omega^2 e(z) \sin \beta(z)$$

Du fait que l'on n'est pas maître du balourd au niveau de la construction, on exprime qu'il dépend de z.

On résout le système (63) par un développement en série de modes propres

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{\ell} z \quad \text{et} \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{\ell} z$$

Les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  sont obtenus en exprimant l'orthogonalité des modes propres.

On obtient :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{\alpha_n^2 - \Omega^2} \sin \frac{n\pi}{\ell} z \cdot \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} e(z) \cos \beta(z) \sin \frac{n\pi}{\ell} z dz \quad (64)$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega^2}{\beta_n^2 - \Omega^2} \sin \frac{n\pi}{\ell} z \cdot \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} e(z) \sin \beta(z) \sin \frac{n\pi}{\ell} z dz$$

On peut écrire la solution sous forme complexe

$$v = x + iy = \sum_{n=1} R_n e^{-i\Phi_n} \sin \frac{n\pi}{\ell} z \quad (65)$$

avec

$$R_n = \frac{\Omega^2 \sqrt{p_n^2 (\beta^2 - \Omega^2)^2 + q_n^2 (\alpha^2 - \Omega^2)^2}}{(\alpha^2 - \Omega^2) (\beta^2 - \Omega^2)}$$

$$\tan \Phi_n = \frac{q_n \alpha_n^2 - \Omega^2}{p_n \beta_n^2 - \Omega^2}$$

moyennant les définitions

$$p_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} e(z) \cos \beta(z) \sin \frac{n\pi}{\ell} z dz$$

$$q_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} e(z) \sin \beta(z) \sin \frac{n\pi}{\ell} z dz$$

Dans le repère fixe, la solution peut s'écrire de la même manière

$$V = \sum_n R_n e^{i(\Omega t - \Phi_n)} \sin \frac{n\pi}{\ell} z \quad (66)$$

et correspond à un cercle de rayon différent en chaque point.

On note que si l'on veut réaliser l'équilibrage dynamique du rotor, on doit nécessairement annuler les coefficients  $p_n$  et  $q_n$  successifs. L'annulation de toute la série des  $(p_n - q_n)$  requiert un équilibrage de chaque tranche infinitésimale dans son plan, ce qui est évidemment irréalisable.

En pratique, une procédure possible d'équilibrage des rotors flexibles consiste à réaliser un *équilibrage modal*.

- La structure de la solution montre que seuls les modes dont la fréquence propre rentre dans le domaine de vitesse de la machine doivent être neutralisés : on fixe ainsi le nombre  $n$  de modes à équilibrer.
- On réalise en premier lieu un équilibrage du rotor rigide en le faisant tourner à une vitesse  $\Omega < \frac{\alpha_1}{2}$ .
- On augmente ensuite la vitesse du rotor jusqu'à une vitesse de rotation proche de  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  : à ce moment, le terme prépondérant dans la réponse de l'arbre est la réponse selon le premier mode

$$x \approx \frac{\Omega^2 p_1}{\alpha_1^2 - \Omega^2} \sin \frac{\pi z}{\ell} \quad \text{et} \quad y \approx \frac{\Omega^2 p_1}{\beta_1^2 - \Omega^2} \sin \frac{\pi z}{\ell}$$

La correction à appliquer pour équilibrer le premier mode élastique doit ne pas perturber l'équilibrage rigide. Trois corrections dans trois plans différents sont donc nécessaires puisque la nouvelle distribution de masse, notée  $e'(z)e^{i\beta}$ , doit satisfaire les trois conditions

$$\int_0^{\lambda} e^{\prime}(z) e^{i\beta(z)} dz = 0 \quad \text{équilibrage statique}$$

$$\int_0^{\lambda} e^{\prime}(z) e^{i\beta(z)} (z - z_g) dz = 0 \quad \text{équilibrage dynamique}$$

$$\int_0^{\lambda} e^{\prime}(z) e^{i\beta(z)} \sin \frac{\pi z}{\lambda} dz = 0 \quad \text{équilibrage du mode flexible 1}$$

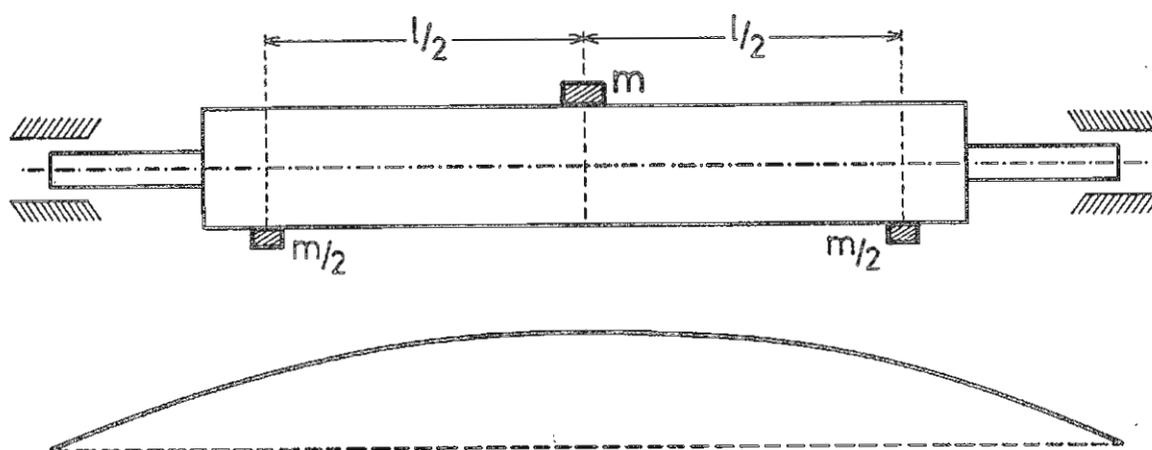


FIGURE 12  
Équilibrage du premier mode élastique

La figure 12 montre le type de correction à appliquer à un rotor symétrique de manière à altérer l'équilibrage rigide. En principe, un test avec un balourd d'essai suffit à déterminer la correction finale. En pratique toutefois, on sera amené à procéder en plusieurs essais, jusqu'à réduire suffisamment le balourd résiduel lorsqu'on passe la première vitesse critique.

Si la vitesse du service dépasse ou se rapproche des vitesses critiques d'ordre supérieur du rotor, on devra équilibrer de la même manière les modes élastiques suivants. Le mode d'ordre  $n$  sera équilibré à l'aide de  $n + 2$  masses additionnelles.

La figure 13 montre comment réaliser l'équilibrage du second mode élastique d'un rotor symétrique.

#### Vibrations entretenues par la pesanteur

De nouveau, on recherche une solution particulière des équations non homogènes (58) en y incluant le seul terme de pesanteur. Si l'on admet la même structure de solution (60) que dans le cas homogène,

$$\sum_n \eta_n(z) [\ddot{\phi}_n - \Omega^2 \phi_n - 2\Omega \dot{\psi}_n + \alpha_n^2 \phi_n] = g \cos \Omega t$$

$$\sum_n \eta_n(z) [\ddot{\psi}_n - \Omega^2 \psi_n + 2\Omega \dot{\phi}_n + \beta_n^2 \psi_n] = -g \sin \Omega t \quad (67)$$

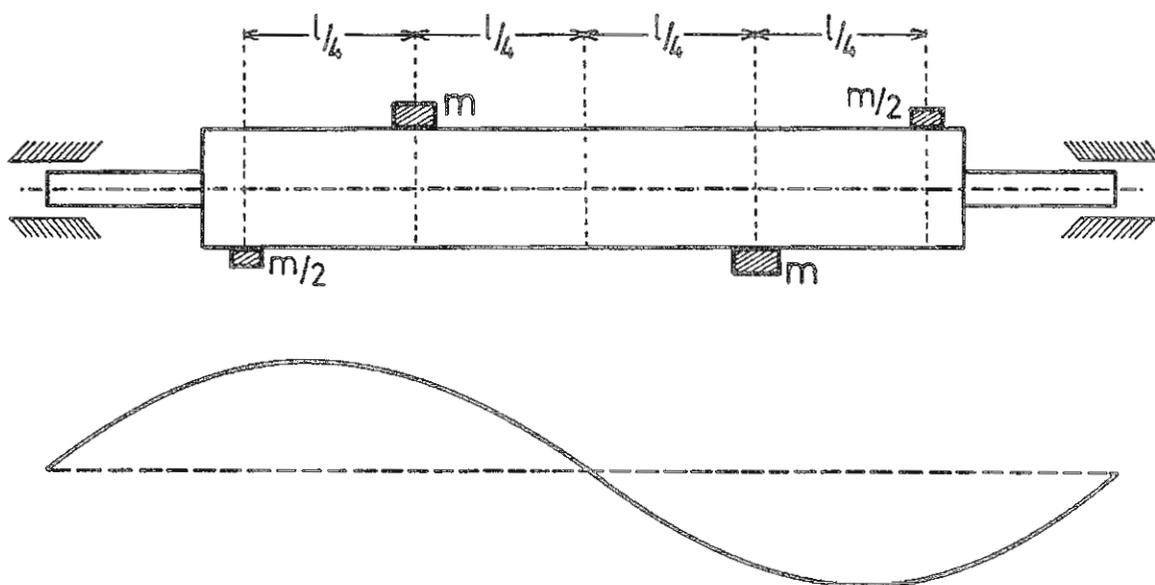


FIGURE 13  
Equilibrage de deuxième mode élastique

Tenant compte des relations d'orthogonalité

$$\int_0^l \eta_n \eta_m dz = \frac{l}{2} \delta_{mn}$$

et de

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi z}{l} dz = \frac{2l}{n\pi} \quad n \text{ impair}$$

on obtient les équations normales

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi}_n - (\Omega^2 - \alpha_n^2) \Phi_n - 2\Omega \dot{\Psi}_n &= \frac{4g}{n\pi} \cos \Omega t \\ \ddot{\Psi}_n - (\Omega^2 - \beta_n^2) \Psi_n + 2\Omega \dot{\Phi}_n &= -\frac{4g}{n\pi} \sin \Omega t \end{aligned} \quad n \text{ impair} \quad (68)$$

On essaie la solution particulière

$$\Phi_n = A_n \cos \Omega t \quad \Psi_n = B_n \sin \Omega t$$

ce qui fournit

$$(-2\Omega^2 + \alpha_n^2) A_n - 2\Omega^2 B_n = \frac{4g}{n\pi}$$

$$-2\Omega^2 A_n + (-2\Omega^2 + \beta_n^2) B_n = -\frac{4g}{n\pi}$$

d'où

$$A_n = \frac{4g}{n\pi} \left[ \frac{-4\Omega^2 + \beta_n^2}{\alpha_n^2 \beta_n^2 - 2\Omega^2 (\alpha_n^2 + \beta_n^2)} \right]$$

$$B_n = \frac{4g}{n\pi} \left[ \frac{4\Omega^2 - \alpha_n^2}{\alpha_n^2 \beta_n^2 - 2\Omega^2 (\alpha_n^2 + \beta_n^2)} \right]$$

On met finalement la solution dans le repère tournant sous la forme

$$v = x + iy = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (U_n e^{i\Omega t} + V_n e^{-i\Omega t}) \sin \frac{n\pi z}{l} \quad (69)$$

avec les coefficients

$$U_n = \frac{2g}{n\pi} \frac{\beta_n^2 - \alpha_n^2}{\alpha_n^2 \beta_n^2 - 2\Omega^2 (\alpha_n^2 - \beta_n^2)} = A_n + B_n$$

$$V_n = \frac{2g}{n\pi} \frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2 - 8\Omega^2}{\alpha_n^2 \beta_n^2 - 2\Omega^2 (\alpha_n^2 + \beta_n^2)} = B_n - A_n$$

On passe ensuite à la solution dans le repère fixe

$$V = v e^{i\Omega t} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (U_n e^{2i\Omega t} + V_n) \sin \frac{n\pi z}{l} \quad (70)$$

soit

$$X = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (V_n + U_n \cos 2\Omega t) \frac{\sin n\pi z}{l}$$

$$Y = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} U_n \sin 2\Omega t \sin \frac{n\pi z}{l}$$

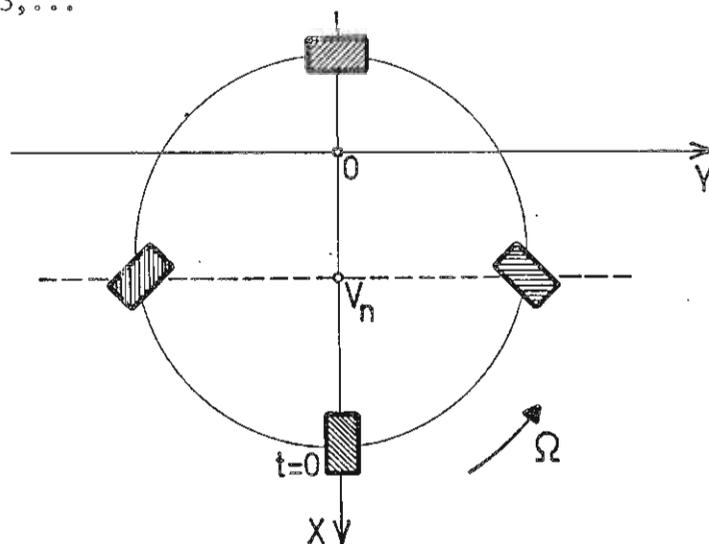


FIGURE 14

Vibration d'un arbre horizontal  
due à la pesanteur

La figure 14 montre le mouvement de précession d'une section lorsque les raideurs sont différentes selon  $x$  et  $y$ .

Lorsque l'arbre est isotrope, le mouvement de précession disparaît et l'arbre subit la déflexion constante

$$X(z) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4g}{n\pi\alpha_n^2} \sin \frac{n\pi z}{\ell}$$

### 8. Energie cinétique d'un rotor dans le cas non stationnaire

Pour calculer l'énergie cinétique (13) d'un rotor dans le cas non stationnaire, on va faire l'hypothèse que son équilibrage est parfait, de telle sorte que son expression se limite à

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_V \{ \dot{\underline{r}}_t^T \dot{\underline{r}}_t + 2 \dot{\underline{r}}_t^T [\omega] \underline{r}_t + \underline{r}_t^T [\omega] \dot{\underline{r}}_t + \underline{p}_t^T [\omega + \gamma] \dot{\underline{r}}_t + \dot{\underline{r}}_t^T [\omega + \gamma] \underline{p}_t \} dm = \\ &= T_1 + T_3 \end{aligned} \quad (71)$$

Les termes d'énergie cinétique de translation peuvent s'écrire

$$T_1 = \frac{1}{2} M [\dot{x}^2 + \dot{y}^2] + \frac{1}{2} \Omega^2 M [x^2 + y^2] + \Omega M [-\dot{x}y + x\dot{y}] \quad (72)$$

De même, les termes de rotation

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{1}{2} \Omega^2 (1 - \phi^2) \int_V b^2 dm + \frac{1}{2} \Omega^2 \phi^2 \int_V c^2 dm + \Omega \phi \dot{\phi} \int_V c^2 dm \\ &\quad - \Omega \phi \dot{\theta} \int_V b^2 dm + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \int_V c^2 dm - \Omega \dot{\phi} \theta \int_V b^2 dm \\ &\quad + \frac{1}{2} \Omega^2 (1 - \theta^2) \int_V a^2 dm + \frac{1}{2} \Omega^2 \theta^2 \int_V c^2 dm + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \int_V c^2 dm \\ &\quad - \Omega \dot{\phi} \theta \int_V c^2 dm + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \int_V a^2 dm + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \int_V b^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \Omega^2 \int_V (a^2 + b^2) dm + \frac{1}{2} \Omega^2 \phi^2 \int_V (c^2 - b^2) dm \\ &\quad + \frac{1}{2} \Omega^2 \theta^2 \int_V (c^2 - a^2) dm + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \int_V (c^2 + a^2) dm \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \int_V (c^2 + b^2) dm + \Omega \phi \dot{\theta} \int_V (c^2 - b^2) dm \\ &\quad + \Omega \dot{\phi} \theta \int_V (b^2 + c^2) dm \end{aligned}$$

soit

$$T_3 = \frac{1}{2} \Omega^2 [I_{zz} + \phi^2 (I_{yy} - I_{zz}) + \theta^2 (I_{xx} - I_{zz})] \\ + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 I_{xx} + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 I_{yy} + \Omega \phi \dot{\theta} (I_{yy} - I_{zz}) - \Omega \dot{\phi} \theta I_{xx} \quad (73)$$

D'où les forces d'inertie

- selon x

$$-M\ddot{x} + 2\Omega M\dot{y} + \Omega^2 Mx$$

- selon y

$$-M\ddot{y} - 2\Omega M\dot{x} + \Omega^2 My \quad (74)$$

- selon  $\phi$

$$-I_{xx} \ddot{\phi} + \Omega^2 \phi (I_{yy} - I_{zz}) + \Omega \dot{\theta} (I_{yy} + I_{xx} - I_{zz})$$

- selon  $\theta$

$$-I_{yy} \ddot{\theta} + \Omega^2 \theta (I_{xx} - I_{zz}) - \Omega \dot{\phi} (I_{yy} + I_{xx} - I_{zz})$$

### 9. Effet gyroscopique sur les vitesses critiques d'un rotor

Considérons le système de la figure 15, constitué d'un arbre isotrope (raideurs identiques selon x et y) de masse négligeable sur lequel est monté, en général de façon non symétrique, un disque de grande inertie.

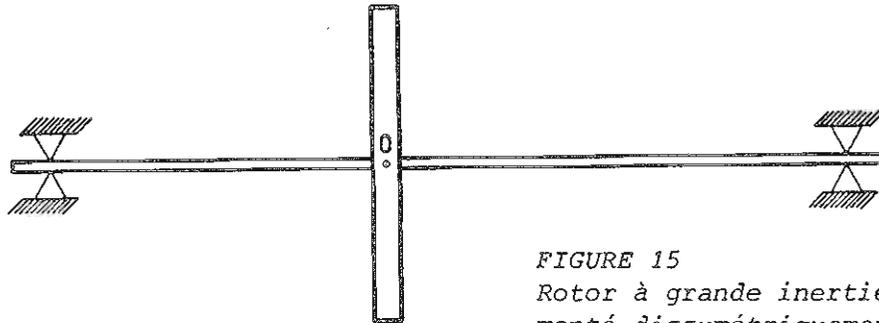


FIGURE 15

Rotor à grande inertie rotatoire monté dissymétriquement

Soient  $q^T = (x, \theta, y, \phi)$  les déplacements et rotations en O définissant l'état du système dans un repère d'axes tournant. Son énergie de déformation peut s'exprimer

$$V = \frac{1}{2} q^T K q \quad (75)$$

avec une matrice de raideur de la forme

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11} & -k_{12} \\ 0 & 0 & -k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}$$

Le disque étant supposé isotrope lui aussi, si l'on note

$$I_{zz} = C \quad I_{xx} = I_{yy} = A$$

les équations régissant le comportement du système en l'absence de forces de perturbation peuvent donc s'écrire

$$\begin{bmatrix} k_{11} - \Omega^2 M & k_{12} & 0 & 0 \\ k_{12} & k_{22} - \Omega^2(A - C) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11} - \Omega^2 M & -k_{12} \\ 0 & 0 & -k_{12} & k_{22} - \Omega^2(A - C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ y \\ \phi \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$+ \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2A - C \\ 2M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2A + C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = 0$$

Si l'on adopte la notation complexe

$$r = x + iy \quad \psi = \theta - i\phi$$

le système (76) peut être réécrit en un système de 2 équations à 2 inconnues

$$\begin{bmatrix} k_{11} - \Omega^2 M & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} - \Omega^2(A - C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + i\Omega \begin{bmatrix} 2M & 0 \\ 0 & 2A - C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = 0 \quad (77)$$

Si l'on exprime le mouvement vibratoire dans le repère tournant sous la forme

$$\begin{bmatrix} r \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} e^{i\omega t}$$

on calcule les fréquences correspondantes par l'équation aux valeurs propres en  $\omega$

$$\begin{vmatrix} k_{11} - (\Omega + \omega)^2 M & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} - \Omega^2(A - C) - \omega^2 A - \omega\Omega(2A - C) \end{vmatrix} = 0 \quad (78)$$

Examinons d'abord le cas où les mouvements de translation et de rotation sont découplés ( $k_{12} = 0$ ), ce qui correspond à un arbre dont le rotor est fixé en

son milieu.

- Pour un mouvement de translation pure, les fréquences de vibration sont solutions de

$$(\Omega + \omega)^2 = \frac{k_{11}}{M}$$

et l'on retrouve en particulier la vitesse critique fondamentale  $\Omega_1 = \sqrt{k_{11}/M}$  à laquelle est associée une instabilité de type stationnaire dans le repère tournant caractérisée par la fréquence  $\omega = 0$ .

Si l'on admet que le mouvement de rotation peut introduire des perturbations (effet de la gravité notamment) qui sont des harmoniques du mouvement, les vitesses  $\Omega$  telles que

$$\Omega^2 = \frac{k_{11}}{(1 + \lambda)^2 M} \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

sont susceptibles de donner lieu à des résonances de fréquence  $\omega = \lambda \Omega$ .

- Pour un mouvement de rotation pure du disque, les fréquences de vibration dans le repère tournant sont solutions de

$$k_{22} - \Omega^2 (A - C) - \omega^2 A + \omega \Omega (2A - C) = 0$$

en particulier, la vitesse critique fondamentale est

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{k_{22}}{A - C}}$$

et l'on note qu'elle devient imaginaire lorsque le moment d'inertie polaire du disque excède le moment d'inertie diamétral.

Les vitesses critiques correspondant à des harmoniques supérieurs du mouvement s'obtiennent à partir de la relation

$$\Omega^2 = \frac{k_{22}}{(A - C) + \lambda^2 A + \lambda (2A - C)} \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Dans le cas où les mouvements de translation et de rotation ne sont plus découplés, on doit résoudre l'équation (78) du quatrième ordre en  $\omega^2$  que l'on réécrit sous la forme

$$\begin{vmatrix} k_{11} - (\Omega + \omega)^2 M & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} - (\Omega + \omega)^2 A + \Omega(\omega + \Omega) C \end{vmatrix} = 0 \quad (79)$$

et que l'on résout le plus aisément en terme de la variable

$$s = \Omega + \omega$$

qui représente la fréquence du mouvement dans le repère fixe.

L'équation résultante s'écrit

$$s^4 - s^3 \frac{\Omega C}{A} - s^2 \left[ \frac{k_{11}}{M} + \frac{k_{22}}{A} \right] + s \Omega \frac{k_{11} C}{M A} + \frac{k_{11} k_{22} - k_{12}^2}{A M} = 0$$

et on la résout en pratique en l'écrivant sous la forme

$$\Omega = \frac{s^4 - s^2 \left[ \frac{k_{11}}{M} + \frac{k_{22}}{A} \right] + \frac{k_{11} k_{22} - k_{12}^2}{AM}}{\frac{C}{A} s \left( s^2 - \frac{k_{11}}{M} \right)}$$

soit

$$\Omega = \frac{A(s^2 - \omega_1^2)(s^2 - \omega_2^2)}{C s (s^2 - \alpha_1^2)} \quad (80)$$

où  $\omega_1^2$  et  $\omega_2^2$  représentent les fréquences de vibration du système au repos, et annulent donc le dénominateur

$$s^4 - s^2 \left[ \frac{k_{11}}{M} + \frac{k_{22}}{A} \right] + \frac{k_{11} k_{22} - k_{12}^2}{AM} = 0$$

tandis que

$$\alpha_1^2 = \frac{k_{11}}{M}$$

est la fréquence de vibration du système dont le degré de liberté de rotation serait bloqué.

Traisons par exemple le cas d'un disque de moment d'inertie diamétral  $A = \frac{C}{2} = \frac{Ml^2}{3}$  monté en porte-à-faux sur un arbre de masse négligeable (figure 16)

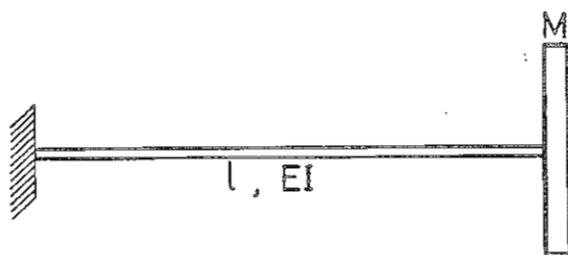


FIGURE 16

Disque monté en porte-à-faux sur arbre uniforme

la matrice des raideurs correspondante est

$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

et l'on calcule donc successivement

$$\alpha_1^2 = \frac{k_{11}}{M} = \frac{12 EI}{Ml^3} \quad \text{soit} \quad \alpha_1 = 3.464 \sqrt{\frac{EI}{Ml^3}}$$

$\omega_1^2$  et  $\omega_2^2$  solutions de

$$s^4 - s^2 \cdot 24 \frac{EI}{Ml^3} + 36 \left( \frac{EI}{Ml^3} \right)^2 = 0$$

$$\text{soit} \quad s^2 = 6 \frac{EI}{Ml^3} (2 \pm \sqrt{3})$$

d'où les fréquences

$$\omega_1 = 1.268 \sqrt{\frac{EI}{M\ell^3}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = 4.732 \sqrt{\frac{EI}{M\ell^3}}$$

On peut donc tracer le diagramme de l'évolution des fréquences de vibration du système en fonction de la vitesse de rotation.

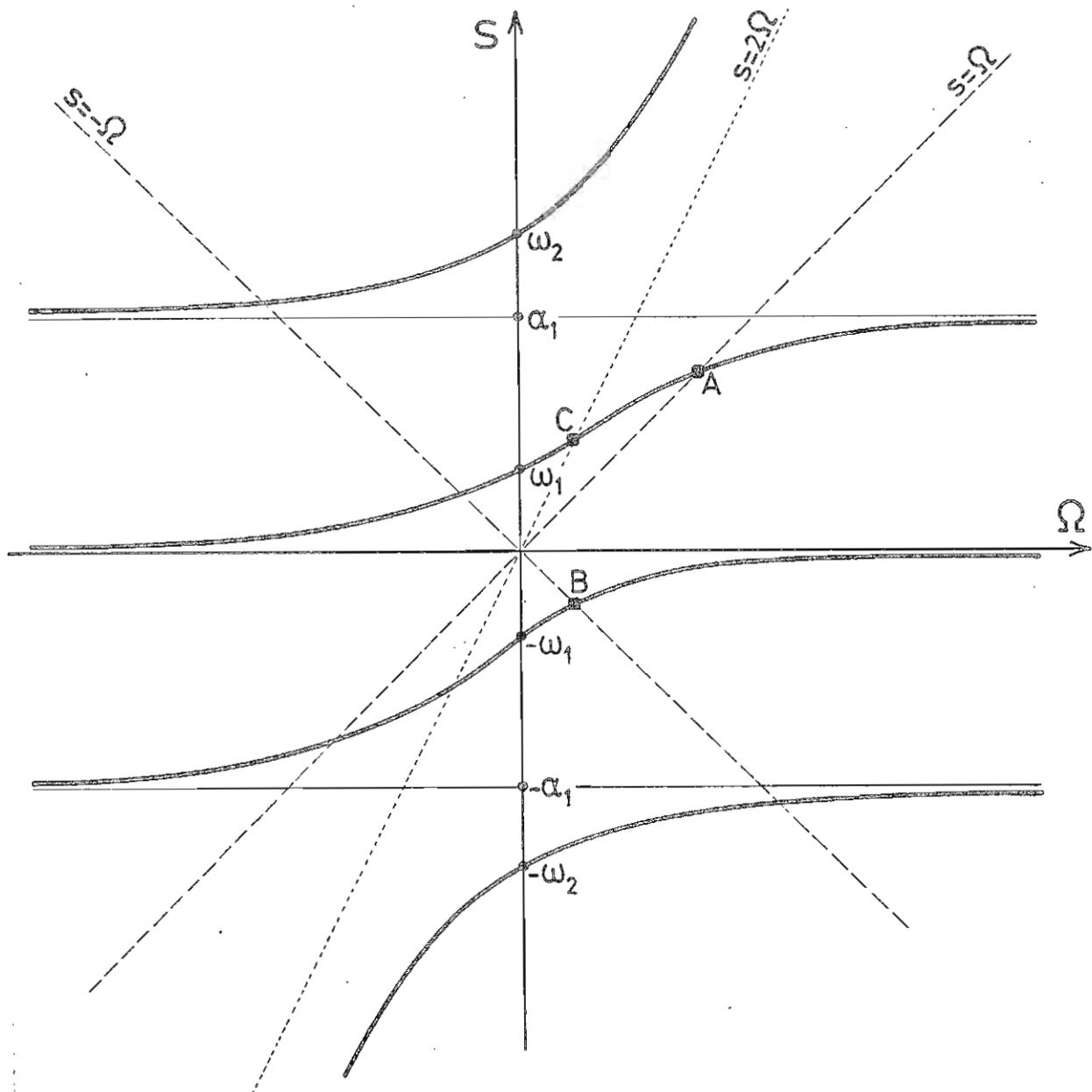


FIGURE 17

Evolution des fréquences de vibration  
en fonction de la vitesse de rotation

On y observe que :

- 1) les points d'intersection des courbes  $s(\Omega)$  avec l'axe vertical sont les fréquences propres de l'arbre au repos.
- 2) Les vitesses critiques principales, qui correspondent à une déformée stationnaire dans le repère tournant et donnent donc lieu à un mouvement de précession de l'arbre à la vitesse  $\Omega$  dans le sens direct, apparaissent à

l'intersection des courbes  $s(\Omega)$  avec la droite  $s = \Omega$ . On voit que seule la première vitesse critique subsiste (point A) et est relevée par rapport à la valeur  $\omega_1$  qu'elle prendrait en l'absence d'effet gyroscopique.

- 3) Les vitesses critiques dues à la gravité, ainsi qu'on l'a vu plus haut, correspondent à une vibration synchrone avec la rotation dans le repère tournant ( $\omega = \Omega$ ). Pour un observateur fixe, la vibration correspondante est une précession directe de fréquence double ( $s = 2\Omega$ ), et les vitesses critiques dues à la gravité sont donc obtenues à l'intersection des courbes  $s(\Omega)$  et de la droite  $s = 2\Omega$  ; elles sont elles aussi relevées par l'effet gyroscopique (point C).
- 4) D'autres vitesses critiques secondaires peuvent apparaître pour les différents harmoniques de la vitesse de rotation. Elles correspondent alors à l'intersection des courbes  $s(\Omega)$  avec les droites

$$s = \lambda \Omega \quad \lambda = \pm 1, \pm 2, \dots$$

En particulier, le cas  $\lambda = -1$  correspond à une fréquence de vibration  $\omega = -2\Omega$  dans le repère tournant. On peut montrer qu'un tel mouvement de précession inverse peut résulter de l'anisotropie des paliers de l'arbre (point B).

- 5) En ce qui concerne l'amplitude des mouvements que l'on peut observer au passage des différentes vitesses critiques, il est important de noter que les vitesses critiques directes, du fait qu'elles correspondent à une *instabilité de type statique* dans le repère tournant (instabilité de même type que le flambage), ne donnent lieu à aucun amortissement. Seuls les effets de non linéarité limitent l'ampleur de la déformation. Par contre, toutes les autres vitesses critiques correspondent à des *vibrations* qui sont de ce fait limitées par l'amortissement interne. Cette observation explique bien pourquoi les vitesses critiques fondamentales donnent lieu à l'instabilité la plus violente.

\* \*

\*

## 6.10 Equilibrage des rotors rigides

Dans les sections précédentes, nous avons mis en évidence les effets du déséquilibre d'un rotor sur son comportement en régime soit sur paliers rigides, soit sur paliers souples.

- Lorsque le rotor tourne sur paliers rigides, ceux-ci sont le siège de réactions en synchronisme avec la rotation et variant linéairement en amplitude et en phase avec le déséquilibre. Elles croissent comme le carré de la vitesse de rotation.
- Lorsque le rotor tourne sur paliers élastiques, ceux-ci vibrent en synchronisme avec le mouvement de rotation. L'amplitude et la phase de la vibration dépendent linéairement du déséquilibre mais varient de façon non simple avec la vitesse.

Sur la base de ces observations, les méthodes d'équilibrage peuvent être envisagées de deux façons différentes.

- a) Lorsque le rotor *peut être démonté* de la machine dont il fait partie, son équilibrage peut être réalisé sur un banc spécialement conçu à cet effet. Il existe des bancs d'équilibrage de deux types:
  - *Les bancs d'équilibrage à paliers rigides:*  
L'équilibrage doit être réalisé à une vitesse de rotation qui reste nettement inférieure à la première vitesse critique de l'ensemble rotor-paliers (figure 6.10.7). On mesure les réactions exercées par le rotor sur les paliers à l'aide de capteurs de force (piézo-électriques) solidaires des paliers. Rentrent en particulier dans cette catégorie, la plupart des machines d'équilibrage dynamique de roues d'automobiles.
  - *Les bancs d'équilibrage à paliers souples :*  
On réalise dans ce second cas l'équilibrage à une vitesse de rotation qui excède suffisamment la plage des vitesses critiques (figure xx) de l'ensemble rotor-banc, tout en restant en deça des vitesses critiques d'ordre plus élevé résultant de la flexibilité du rotor. Les bancs d'équilibrage à paliers souples sont beaucoup plus flexibles d'utilisation en ce qui concerne la gamme des rotors à équilibrer (dimensions, masse, qualité requise de l'équilibrage). Les vibrations des paliers sont mesurées à l'aide de capteurs de déplacement, de vitesse ou d'accélération. Les bancs d'équilibrage à paliers souples permettent en plus, par blocage de chacun des paliers successivement, de ramener le problème de l'équilibrage dynamique à deux équilibrages successifs dans le plan.
- b) *Le rotor est équilibré sur ses propres paliers:* On procède alors directement à l'équilibrage du rotor en le mettant sur ses propres paliers (d'élasticité en général non connue) à une vitesse de rotation suffisamment stable au sens de la figure xx. On mesure simultanément les vibrations des deux paliers de la machine, de manière à déduire le déséquilibre du rotor à partir de l'hypothèse de linéarité de comportement.

Dans ce qui suit, nous aborderons successivement:

- le principe de l'équilibrage dans un plan à partir de mesures de vibrations en un seul palier à la fois;
- les méthodes d'équilibrage dynamique qui se ramènent à deux équilibrages successifs dans le plan;
- le principe général de l'équilibrage dynamique d'un rotor à partir de mesures simultanées en deux paliers;
- les critères et normes adoptés pour la mesure de la qualité d'un équilibrage.

### 6.10.1 Principe de l'équilibrage dans un plan

L'équilibrage dans un plan est à la base des méthodes d'équilibrage sur banc d'équilibrage qui permettent d'immobiliser successivement chacun des paliers élastiques sur lesquels on pose le rotor. Considérons le système de la figure 1:

il consiste en un rotor rigide posé sur un palier élastique *A* et un palier rigide *B*. On dispose d'un plan d'équilibrage *I* dans lequel on peut apporter la correction de masse nécessaire à l'annulation des vibrations mesurées dans le plan *A*.

On représente en notation complexe (amplitude et phase) les quantités suivantes:

- B** le balourd initial
- V<sub>0</sub>** la vibration correspondante dans le plan *A*
- M** une masse d'essai placée dans le plan *I*
- V<sub>1</sub>** la vibration mesurée avec la masse d'essai.

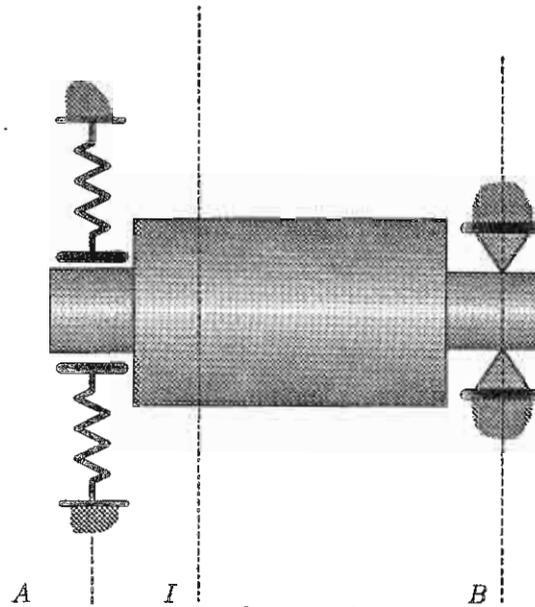


figure 6.10.1  
principe de l'équilibrage dans un plan

Si l'on admet la linéarité du système, on peut écrire les relations représentées graphiquement par la figure 6.10.2

$$V_0 = \alpha B \quad \text{et} \quad V_1 = \alpha(B + M) \quad (6.10.1)$$

où  $\alpha$  désigne un coefficient de proportionnalité entre le balourd et la vibration qu'il provoque, et que l'on calcule par soustraction des deux relations xx:

$$\alpha = \frac{V_1 - V_0}{M} \quad (6.10.2)$$

do u la valeur du balourd initial

$$B = \frac{V_0}{V_1 - V_0} \cdot M \quad (6.10.3)$$

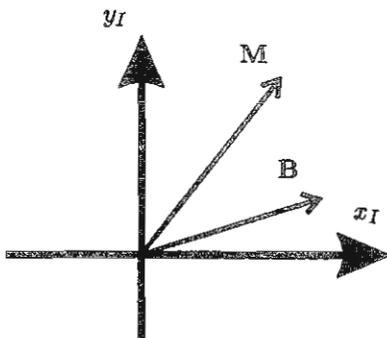


figure 6.10.2a  
plan d'équilibrage

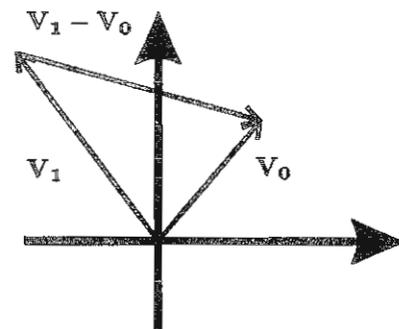
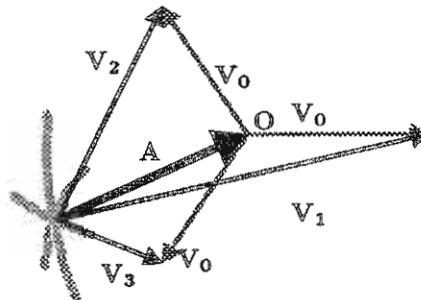
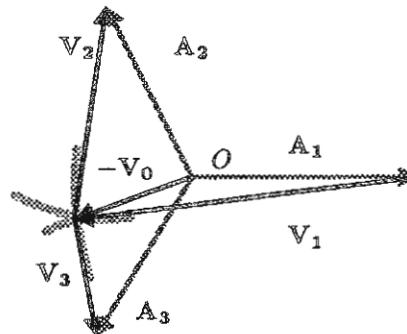
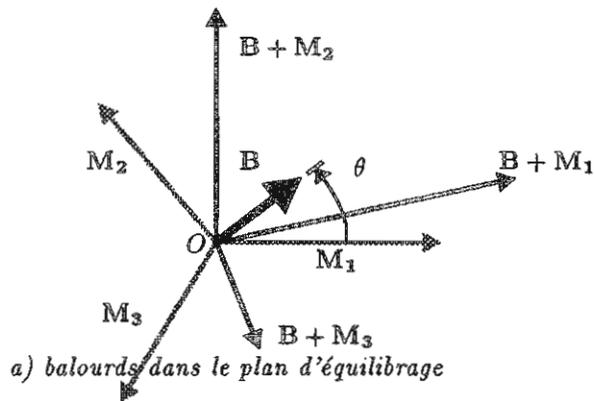


figure 6.10.2b  
vibration mesurée dans  
la direction des ressorts de paliers

L'expression obtenue pour le balourd montre que sa détermination expérimentale requiert deux mesures successives (en amplitude et en phase) de la vibration dans le plan A, avant et après addition d'une masse d'essai.

La procédure ci-dessus suppose que l'on puisse mesurer la vibration en amplitude et en phase, ce que l'on réalise soit à l'aide d'une lampe stroboscopique pilotée par le signal de vibration mesur e, soit à l'aide d'une

cellule photo-électrique.



*Equilibrage dans le plan par mesure des amplitudes de vibration*

Lorsqu'on ne dispose pas du matériel nécessaire pour la mesure de déphasage entre la vibration du palier et la rotation, on peut néanmoins déterminer le balourd  $B$  en amplitude et en phase moyennant trois tests successifs à l'aide d'un même balourd additionnel placé en trois positions angulaires différentes. Le plus fréquemment, lorsque rien ne s'y oppose, on choisit trois positions décalées de  $120^\circ$  (figure 10.3a). Soient

- $B$  le balourd initial
- $M_1, M_2$  et  $M_3$  les trois balourds additionnels de même amplitude
- $\theta$  la position angulaire du balourd  $B$  par rapport à  $M_1$
- $V_0$  la vibration due au balourd initial
- $V_1, V_2$  et  $V_3$  les vibrations enregistrées avec les masses d'essai

Appelons  $A_1, A_2$  et  $A_3$  les vibrations dues aux balourds d'essai seuls:

$$\begin{aligned} A_1 &= V_1 - V_0 \\ A_2 &= V_2 - V_0 \\ A_3 &= V_3 - V_0 \end{aligned}$$

Elles sont nécessairement égales en amplitude et décalées angulairement comme les balourds qui les provoquent. Si leur amplitude commune  $A$  est connue, on peut reconstruire le vecteur  $V_0$  par la construction de la figure 10.3b.

En effet, les trois axes de rayons  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$  se coupent en un point  $P$  extr emitt du vecteur  $-V_0$ . Le problème est alors résolu, puisque

$$B = \frac{V_0}{A_1} \cdot M \quad (6.10.4)$$

Il reste à déterminer l'amplitude commune  $A$  des vibrations provoquées par les masses additionnelles. On peut la construire graphiquement comme suit: On trace un cercle de rayon  $V_0$ , et l'on représente ensuite trois rayons vecteurs distants de  $120^\circ$ . L'intersection des trois axes de cercle de longueurs  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$  men es successivement à partir des sommets 1, 2 et 3 fournit le vecteur  $A$ .

### 6.10.2 Méthodes d'équilibrage dynamique basées sur l'équilibrage dans un plan

Lorsque le rotor à équilibrer peut ˆtre d emont e et  equilibr e sur un banc spécialement conçu à cet effet, son équilibrage dynamique peut ˆtre r ealis e par deux  equilibrages dans le plan successifs.

Les deux procédures suivantes sont couramment utilisées.

#### a) Méthode du berceau

Le principe de montage de la méthode du berceau est repr esent e schématiquement par la figure...

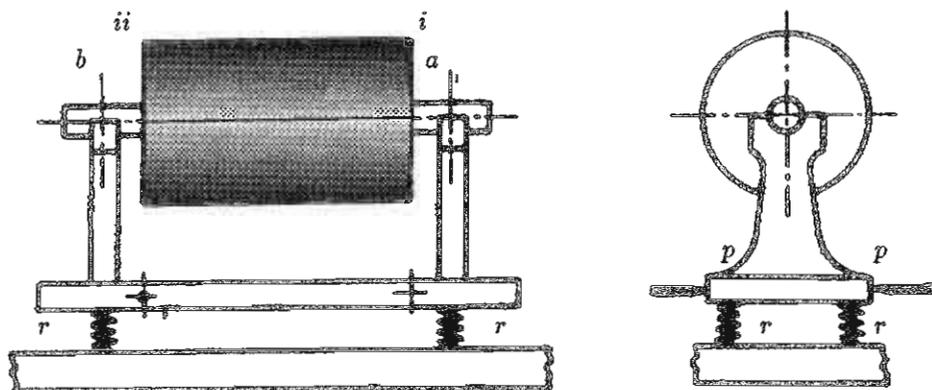


figure 6.10.4  
Méthode du berceau

Le berceau  $B$  est support e par des ressorts de faible raideur, de telle sorte que l'équilibrage soit r ealis e à une vitesse de rotation supérieure à la fréquence de vibration du berceau. Les deux paliers  $a$  et  $b$  dans lesquels tourne le rotor sont solidaires du berceau. Deux pointes  $p$  solidaires du bâti permettent d'immobiliser le berceau d'abord dans le plan  $ii$ , puis dans le plan  $i$  et servent en même temps d'axe d'oscillation pendant la vibration du système.

Quand le plan  $ii$  est immobilis e, la vibration n'est due qu'au balourd dans le plan  $i$  qui peut alors ˆtre d etermin e par une des deux méthodes précédentes d'équilibrage dans le plan. Il suffit ensuite d'immobiliser le plan  $i$  pour déterminer de la même manière le balourd dans le plan  $ii$ .

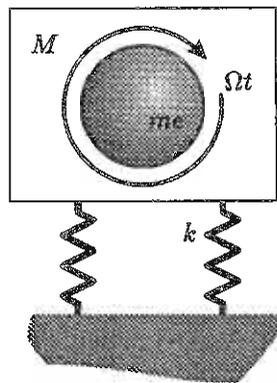


figure 6.10.5

Lorsqu'on étudie la réponse du système à 1 ddl de la figure 10.5, on trouve que pour  $\Omega \gg \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , l'amplitude de la vibration est égale à

$$A = \frac{me}{M}$$

où  $M$  est égale à la masse totale du berceau et du rotor.

Dès lors, on constate que la méthode du berceau, bien que très directe, est assez limitée par le fait que le berceau, qui doit être capable d'accepter le rotor le plus lourd susceptible d'être équilibré sur le banc, présente généralement une trop grande inertie lorsqu'il s'agit de faire vibrer des rotors légers. Elle n'est donc praticable que lorsqu'il s'agit d'équilibrer en série des rotors toujours identiques.

*b) Méthode des paliers élastiques successivement bloqués.*

Dans cette seconde méthode basée sur l'équilibrage dans le plan, on utilise un banc d'équilibrage classique (figures 10.6 et 10.7) portant des paliers montés élastiquement, généralement dans le sens horizontal.

Les paliers sont indépendants, et peuvent donc être immobilisés l'un après l'autre. Leur écart est ajustable en fonction de la longueur du rotor à l'équilibre.

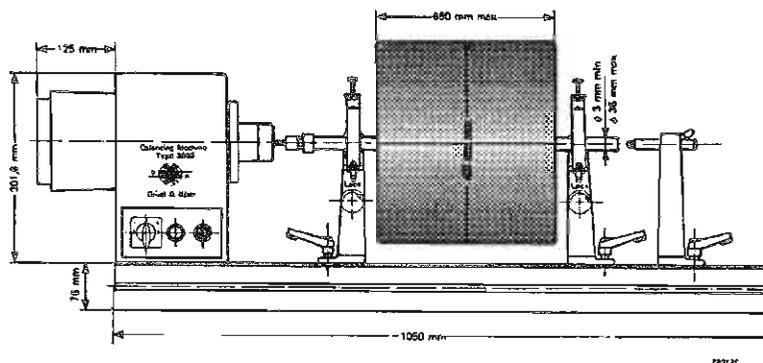


figure 6.10.7

Réalisation pratique: le banc d'équilibrage Brüel et Kjær 3905

Soient  $B_1$  et  $B_2$  les balourds dans les plans d'équilibrage i et ii, distants des paliers  $A$  et  $B$  comme représenté par la figure xx.

- Immobilisons le palier  $B$ : on enregistre alors au niveau du palier  $A$  une vibration due au balourd

$$B'_1 = \frac{(b+c)B_1 + cB_2}{b+c} \tag{6.10.5}$$

que l'on annule par un équilibrage dans le plan i.

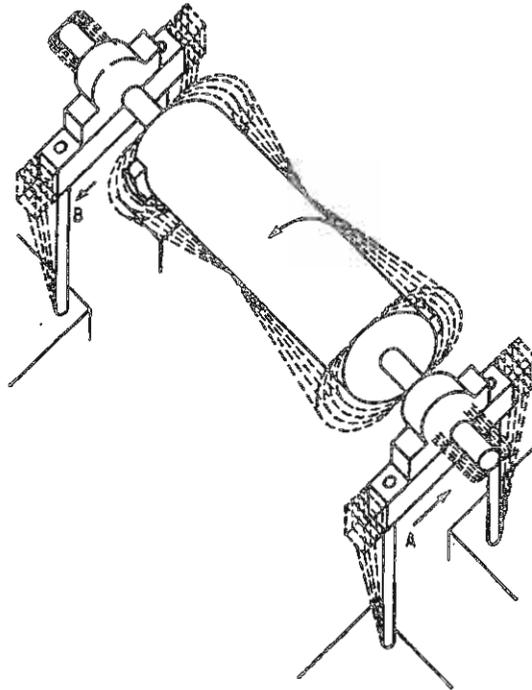


figure 6.10.6  
Principe d'un banc d'équilibrage classique à paliers souples

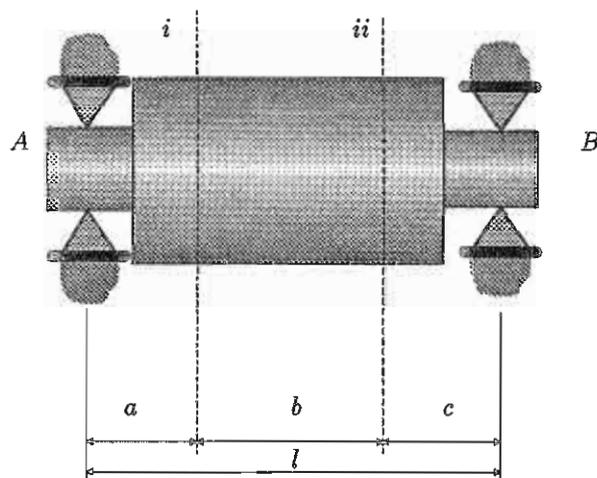


fig 6.10.8  
Localisation des paliers et des plans d'équilibrage

- Immobilisons ensuite le palier A: on enregistre cette fois au niveau du palier B une vibration due au balourd

$$B'_2 = \frac{(a+b)B_2 + a(B_1 - B'_1)}{a+b} \quad (6.10.6)$$

que l'on annule par un second équilibrage dans le plan ii.

### 6.10.3 Méthode générale d'équilibrage dynamique des rotors rigides

Lorsqu'on fait l'équilibrage d'un rotor sur ses propres paliers, ceux-ci ne peuvent évidemment plus être immobilisés. On doit donc mesurer simultanément les vibrations que les deux paliers subissent sous l'effet

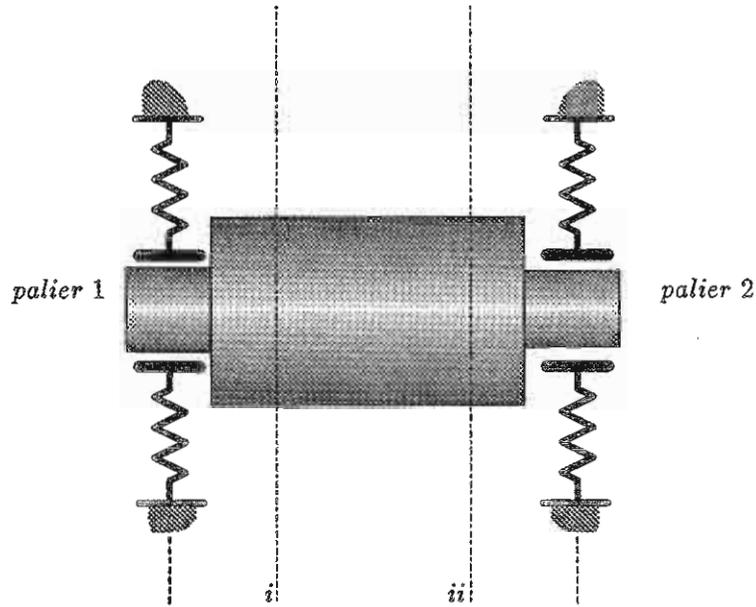


fig 6.10.9  
Equilibrage dynamique dans 2 plans simultanément

des balourds initiaux  $B_1$  et  $B_2$  dans les deux plans d'équilibrage, et ensuite, des balourds d'essai dans les mêmes plans.

On fait l'hypothèse de linéarité du système, et on écrit une relation de proportionnalité entre les vibrations mesurées aux paliers

$$\begin{bmatrix} V_{10} \\ V_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (6.10.7)$$

où l'on note  $V_{kl}$  la vibration mesurée au palier  $k$  dans l'essai  $l$ , la valeur  $l = 0$  correspondant à un essai du rotor en configuration initiale. Les coefficients d'influence  $\alpha_{ik}$  complexes sont des fonctions de la vitesse de rotation.

On réalise 3 essais successifs:

- a) rotor en configuration initiale, avec les balourds  $B_1$  et  $B_2$  à déterminer dans les plans i et ii. On enregistre les vibrations  $V_{10}$  et  $V_{20}$  aux paliers 1 et 2.
- b) On installe ensuite un balourd  $M_1$  dans le plan i, et on enregistre des vibrations  $V_{11}$  et  $V_{21}$  aux paliers 1 et 2.
- c) On installe enfin un balourd  $M_2$  dans le plan ii, et on enregistre des vibrations  $V_{12}$  et  $V_{22}$  aux paliers 1 et 2.

Tenant compte de l'hypothèse de linéarité, et à condition de réaliser les trois essais à la même vitesse de rotation, on peut écrire également

$$\begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 + M_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (6.10.8)$$

et

$$\begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 + M_2 \end{bmatrix} \quad (6.10.9)$$

On dispose ainsi de six relations qui nous permettent de calculer la matrice des coefficients d'influence  $[\alpha]$  et les balourds  $B_1$  et  $B_2$ .

Si on calcule les vibrations  $V_{kl} - V_{k0}$  dues aux seules masses d'essai, on obtient successivement

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{V_{11} - V_{10}}{M_1} & \alpha_{12} &= \frac{V_{12} - V_{10}}{M_2} \\ \alpha_{21} &= \frac{V_{21} - V_{20}}{M_1} & \alpha_{22} &= \frac{V_{22} - V_{20}}{M_2} \end{aligned}$$

et on en déduit les balourds

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = [\alpha]^{-1} \begin{bmatrix} V_{10} \\ V_{20} \end{bmatrix} \quad (6.10.10)$$

L'équation (10) correspond à un système complexe de deux équations à deux inconnues que l'on peut résoudre aisément à l'aide d'une calculatrice de poche.

#### Exemple

Le tableau ci-dessous rapporte un exemple de mesures de déséquilibre sur un rotor; la dernière ligne fournit les corrections à apporter dans les deux plans d'équilibrage.

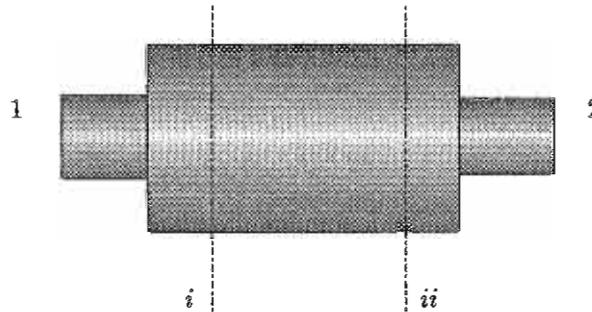


fig 6.10.10

Séquence de mesure relative à un équilibrage sur site

Masse d'essai	effet mesuré avec masse d'essai					
	Palier 1			Palier 2		
position et valeur	7.2 mm/s	238°	$V_{10}$	13.5 mm/s	296°	$V_{20}$
2.5 g ds le plan i	4.9 mm/s	114°	$V_{11}$	9.2 mm/s	347°	$V_{21}$
2.5 g ds le plan ii	4.0 mm/s	79°	$V_{12}$	12.0 mm/s	292°	$V_{22}$
correction	2.95 g	50.2°		2.84 g	-81.8°	

#### 6.10.4 Qualité de l'équilibrage

Les vibrations dues au déséquilibre d'un rotor produisent en général des effets non désirables sur la stabilité des machines, sollicitent leurs organes par fatigue et perturbent également l'environnement (bruits, trépidations). En outre, pour certains types de machines ou d'appareils (machines-outils, tourne-disques, ...) elles altèrent la qualité du travail fourni.

L'expérience montre que la qualité la plus objective de la qualité de l'équilibrage d'un rotor rigide est la vitesse circonférentielle du centre de masse:

$$e\Omega = \frac{\text{balourd} \times \text{vitesse de rotation}}{\text{masse du rotor}} \quad (6.10.11)$$

Ce paramètre est à la base d'une classification des différents rotors d'usage courant. Dans sa norme 1940-1973, l'ISO a défini comme unité de mesure de qualité d'équilibrage

$$1 G = 1\text{mm/sec.}$$

Le tableau de la figure 6.10.11 donne les degrés d'équilibrage admis par l'ISO pour les différentes catégories de rotors usuels.

On peut également reporter sur un diagramme (figure 6.10.12), pour les divers degrés de qualité d'équilibrage repris dans ce tableau, le déséquilibre résiduel acceptable (déplacement du centre de masse, mesuré en microns) en fonction de la vitesse de rotation.

Tableau 1 – Degrés de qualité d'équilibrage pour différents groupes de rotors rigides représentatifs

Degré de qualité d'équilibrage	Produit de la relation $(e_{adm} \times \omega)^{1,2}$ mm/s	Types de rotors – Exemples généraux
G4 000	4 000	Entraînement par vilebrequin <sup>3)</sup> de moteurs Diesel marins à vitesse lente <sup>4)</sup> , montage rigide, avec un nombre de cylindres impair
G1 600	1 600	Entraînement par vilebrequin, montage rigide, de gros moteurs à deux temps
G630	630	Entraînement par vilebrequin, montage rigide, de gros moteurs à quatre temps Entraînement par vilebrequin, montage élastique, des moteurs Diesel marins
G250	250	Entraînement par vilebrequin, montage rigide, de moteurs Diesel rapides <sup>4)</sup> à quatre cylindres
G100	100	Entraînement par vilebrequin de moteurs Diesel rapides <sup>4)</sup> avec six cylindres ou plus Moteurs complets <sup>5)</sup> (à essence ou Diesel) pour voitures, camions et locomotives
G40	40	Roues de voitures, jantes de roues, ensemble de roues, arbres d'entraînement Entraînement par vilebrequin, montage élastique de moteurs rapides <sup>4)</sup> à quatre temps (à essence ou Diesel) avec six cylindres ou plus Entraînement par vilebrequin de moteurs de voitures, camions et locomotives
G16	16	Arbres d'entraînement (arbres d'hélices, arbres à la cardan) avec exigences particulières Pièces de machines à broyer Pièces de machines agricoles Pièces détachées de moteurs (à essence ou Diesel) pour voitures, camions et locomotives Entraînement par vilebrequin de moteurs avec six cylindres ou plus dans des conditions particulières
G6,3	6,3	Pièces de machines de transformation Engrenages de turbines marines principales (marine marchande) Tambours centrifuges Rouleaux de machines à papier ; rouleaux de machines d'impression Ventilateurs Montage de rotors avec turbines à gaz pour l'aéronautique Volants Impulseurs de pompes Machines-outils et pièces de machines courantes Armatures électriques grandes et moyennes (de moteurs électriques ayant au moins une hauteur de tige de 80 mm) sans exigences spéciales Petites armatures électriques souvent produites en série, pour les applications insensibles aux vibrations et/ou avec des supports isolants contre les vibrations Pièces détachées de moteurs avec des exigences particulières
G2,5	2,5	Turbines à gaz et à vapeur y compris les turbines marines principales (marine marchande) Rotors de turbogénérateur rigides Tambours et disques de mémoire d'ordinateur Turbocompresseurs Entraînements de machines-outils Armatures électriques grandes et moyennes avec des exigences particulières Petites armatures électriques ne se qualifiant pas pour l'une ou les deux conditions spécifiées pour les petites armatures électriques de degré de qualité d'équilibrage G6,3 Pompes à entraînement par turbines
G1	1	Entraînement de magnétophones et de phonographe (gramophone) Entraînement de meules Petites armatures électriques avec exigences particulières
G0,4	0,4	Broches, disques et armatures de meules de précision Gyroscopes

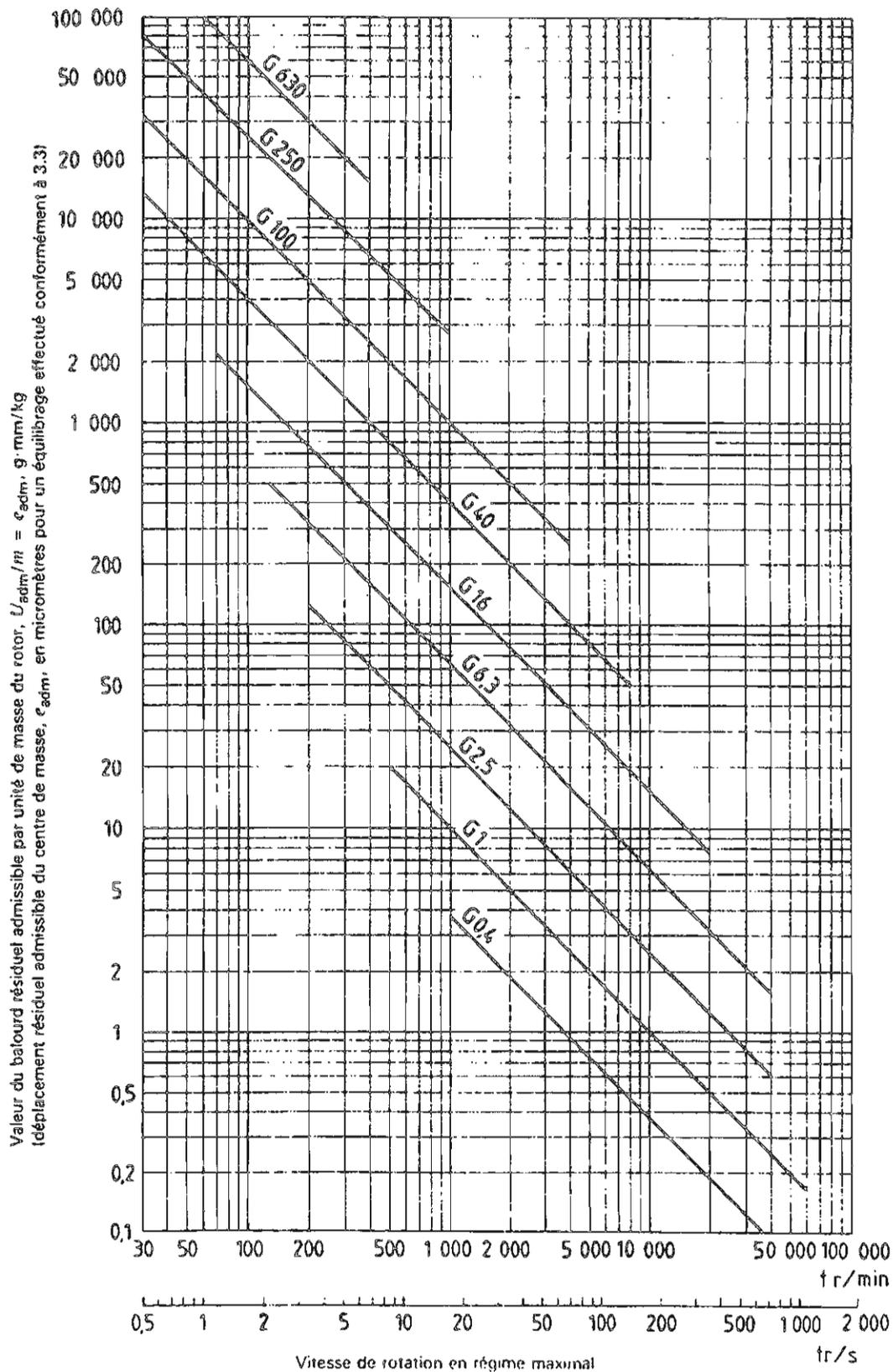
1)  $\omega = 2\pi n/60 = n/10$  si  $n$  est mesuré en tours par minute et  $\omega$  en radians par seconde.

2) Pour l'attribution du balourd résiduel admissible aux plans de correction, voir chapitre 7.

3) Un entraînement par vilebrequin est un montage qui comprend le vilebrequin, un volant, un embrayage, une poulie, un amortisseur de vibrations, la partie en rotation de la bielle, etc. (voir 3.5).

4) Dans la présente partie de l'ISO 1940, les moteurs Diesel lents sont ceux dont la vitesse du piston est inférieure à 9 m/s, les moteurs Diesel rapides sont ceux dont la vitesse du piston est supérieure à 9 m/s.

5) Pour les moteurs complets, la masse du rotor comprend la somme de toutes les masses qui appartiennent à l'entraînement par vilebrequin décrit dans la note 3 ci-dessus.



NOTE - La valeur numérique après la lettre G est égale au produit ( $e_{adm} \times \omega$ ), exprimé en millimètres par seconde.

Figure 2 - Valeur du balourd spécifique résiduel maximal admissible correspondant à divers degrés de qualité d'équilibrage