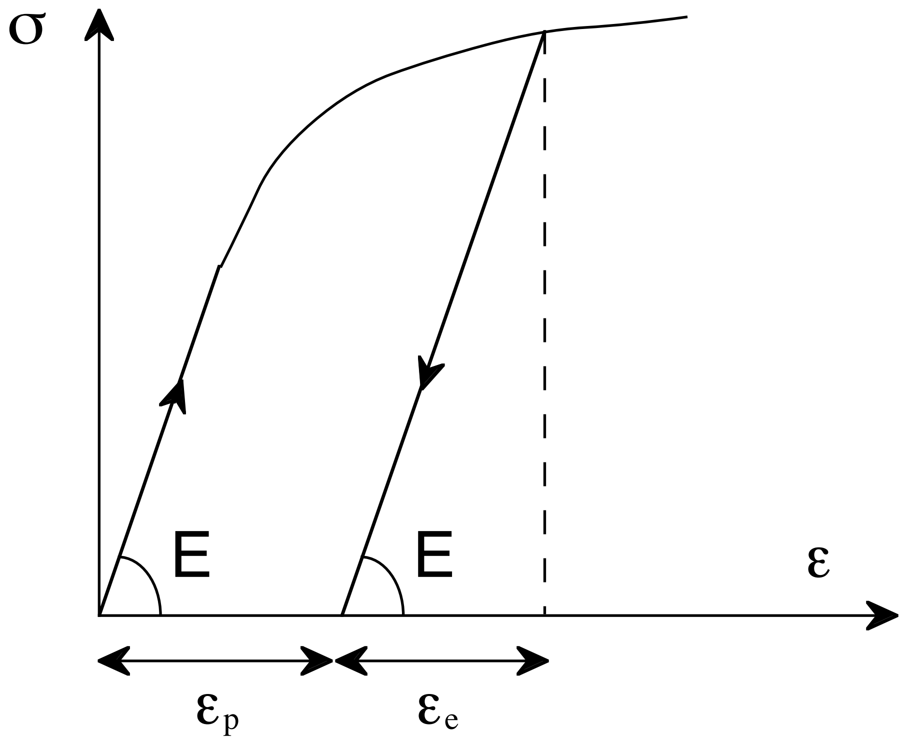
ELASTO-(VISCO-)PLASTICITE



Exemple de Plasticité 1D

Partition des déformations

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

Elasticité

$$\sigma = E\varepsilon_e$$

Fonction critère

$$f = |\sigma - X| - R - \sigma_y$$

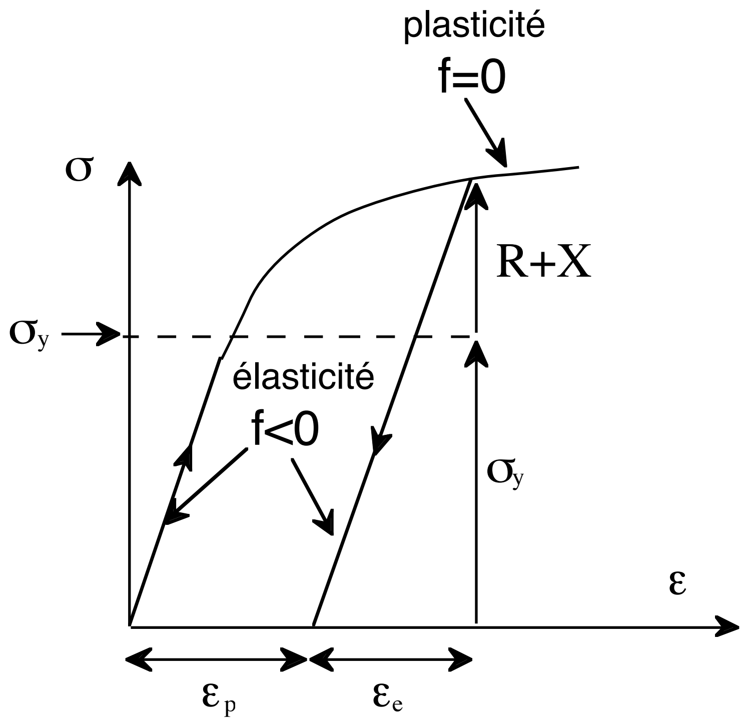
Ecrouissages

$$R = R(p)$$

$$\left(\; \dot{X} = C\dot{\varepsilon}_p - \gamma X\dot{p} \;\right)$$

Déformation plastique cumulée

$$p = \int |\dot{\varepsilon}_p| dt$$



Cadre thermodynamique

Variables thermodynamiques

Potentiel thermodynamique

$$\rho\psi = \frac{1}{2}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p) : \underline{\underline{E}} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p) + G(p)$$

Lois d'état

$$\underline{\sigma} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{E}} : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p) = \underline{\underline{E}} : \underline{\varepsilon}^e \qquad -\underline{\sigma} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\underline{\varepsilon}^p}$$

$$R = \rho\frac{\partial\psi}{\partial p} = G'(p) = \begin{cases} Kp & \text{linéaire} \\ Kp^{1/M} & \text{puissance} \\ R_\infty(1 - e^{-bp}) & \text{exponentiel} \end{cases}$$

Fonction critère $f = \sigma_{eq} - R - \sigma_y$

Potentiel de dissipation $F = f$

(modèle associé pour écrouissage isotrope seul)

Lois d'évolution

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^{p} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} = \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{\underline{\sigma}^{D}}{\sigma_{eq}}$$

$$\dot{p} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial R} = \dot{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\dot{\varepsilon}}^{p} : \underline{\dot{\varepsilon}}^{p}}$$

Détermination du multiplicateur plastique

plasticité $f = 0, \dot{f} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\lambda}$

visco-plasticité $f = \sigma_v, \quad \sigma_v = K_N \dot{p}^{1/N} \quad \rightarrow \quad \dot{\lambda} = \dot{p} = \left\langle \frac{f}{K_N} \right\rangle^{N}$

Cas de la traction

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\sigma}^D = \underline{\sigma} - \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}\,\underline{\sigma}\,\underline{1} = \begin{bmatrix} \tfrac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\tfrac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\tfrac{1}{3}\sigma \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\sigma}^D : \underline{\sigma}^D} = \sigma$$

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^p = \dot{p}\,\frac{3}{2}\frac{\underline{\sigma}^D}{\sigma_{eq}} = \begin{bmatrix} \dot{p} & 0 & 0 \\ 0 & -\tfrac{1}{2}\dot{p} & 0 \\ 0 & 0 & -\tfrac{1}{2}\dot{p} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \\ \rightarrow \end{matrix}$$

$$\boxed{\varepsilon^p_{11} = p = \varepsilon_p}$$

incompressibilité plastique

Courbe de traction :

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \dfrac{\sigma}{E} + p \\ \sigma = R(p) + \sigma_y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \sigma(\varepsilon)$$

L'endommagement en post-traitement

- d'un calcul élastique (correction de Neuber)
- d'un calcul élasto-(visco-)plastique

Approche non couplée

Endommagement gouverné par la plasticité

Loi d'évolution de l'endommagement (Lemaitre)

$$\dot{D} = \left(\frac{Y}{S}\right)^{s} \dot{p} \quad \text{si} \quad p > p_D$$

$$D = D_c \longrightarrow \text{amorçage d'une fissure}$$

Energie élastique

$$Y = \frac{1}{2}\underline{\varepsilon}^{e} : \underline{\underline{E}} : \underline{\varepsilon}^{e} = \frac{\sigma_{eq}^{2} R_{\nu}}{2E}$$

Triaxialité des contraintes

Fonction de triaxialité

$$R_{\nu} = \tfrac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{eq}(t),\ \sigma_H(t) = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\underline{\sigma}(t) \\ p(t) \\ Y(t) = \dfrac{\sigma_{eq}^2(t)R_\nu(t)}{2E}\end{array}\right\}$$

grandeurs calculées en élasto(-visco-)plasticité

Temps à apparition de l'endommagement : $p(t_D) = p_D \rightarrow t_D$

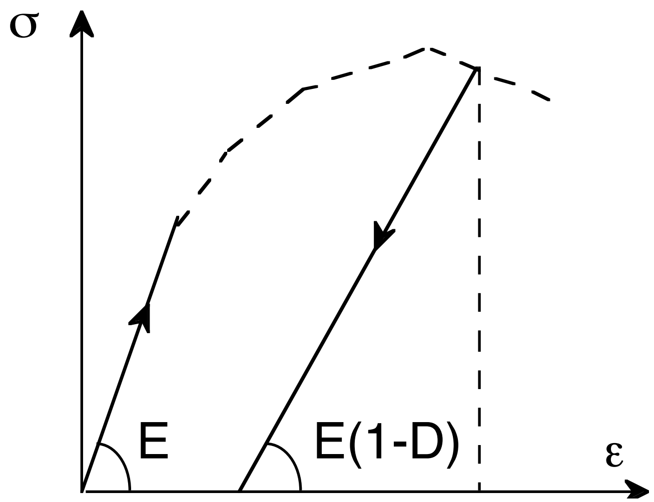
Calcul de l'endommagement :

$$\boxed{D(t) = \int_{t_D}^{t} \dot{D}\,dt = \int_{t_D}^{t} \left(\frac{Y(t)}{S}\right)^{s} \dot{p}(t)\,dt}$$

Temps à rupture :

$$\boxed{D(t_R) = D_c \rightarrow t_R}$$

ENDOMMAGEMENT ISOTROPE

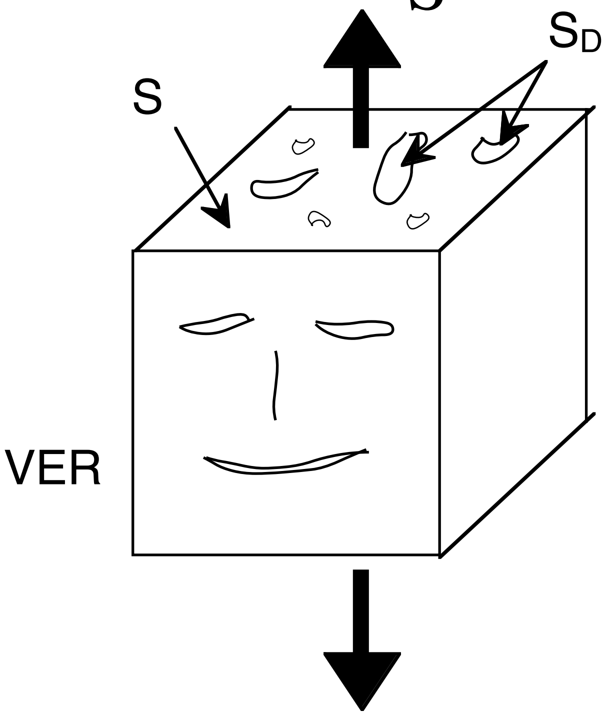


Endommagement = variable scalaire D

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E}$$

ENDOMMAGEMENT ET CONTRAINTE EFFECTIVE

$$\sigma = \frac{F}{S}$$



Contrainte effective

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} = \frac{F}{S - S_D} = \frac{F}{S\left(1 - \boxed{\frac{S}{S_D}}\right)}$$

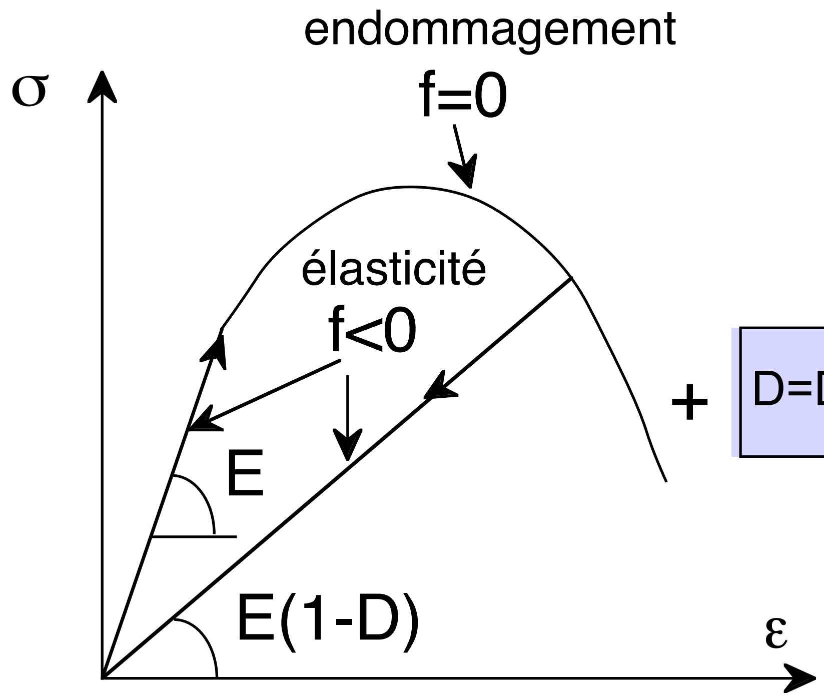
D

$$\boxed{\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D}}$$

$$\tilde{\sigma} = E\varepsilon_e \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sigma = \tilde{E}\varepsilon_e \\ \tilde{E} = E(1 - D) \end{cases}$$

Principe d'équivalence
en déformation

ELASTICITE ENDOMMAGEABLE



$+ \boxed{D=D(Y) \text{ ou } D=D(\hat{\varepsilon})}$

Variables thermodynamiques

Potentiel thermodynamique

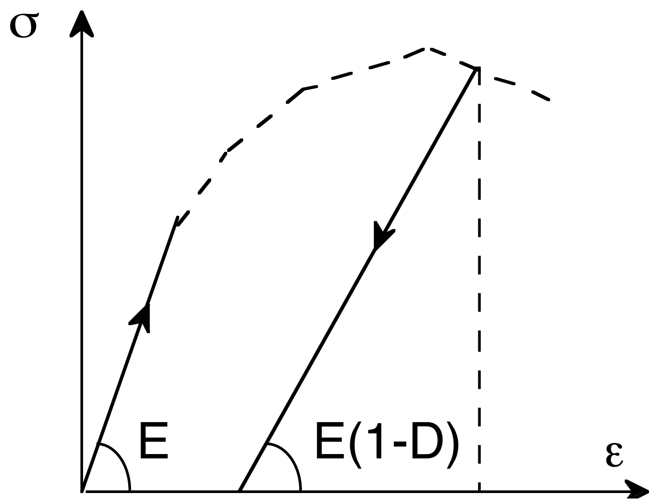
$$\rho\psi = \frac{1}{2}(1-D)\,\underline{\varepsilon} : \underline{\underline{E}} : \underline{\varepsilon}$$

Lois d'état

$$\underline{\sigma} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{E}}(1-D) : \underline{\varepsilon}$$

$$-Y = \rho\frac{\partial\psi}{\partial D} \quad\rightarrow\quad \boxed{Y = \frac{1}{2}\underline{\varepsilon} : \underline{\underline{E}} : \underline{\varepsilon}}$$

ENDOMMAGEMENT ISOTROPE



Endommagement = variable scalaire D

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E}$$

Variables thermodynamiques

Variables d'état		Variables associées
observable	internes	
$\underline{\varepsilon}$		$\underline{\sigma}$
	$\underline{\varepsilon}^p$	$-\underline{\sigma}$
	r	R
	D	-Y

Partition des déformations

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^p$$

Potentiel thermodynamique

$$\rho\psi = \frac{1}{2}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p) : \underline{E}(1-D) : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p) + G(r)$$

Lois d'état

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} = \underline{E}(1 - D) : \underline{\varepsilon}^e$$

$$R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} = G'(r) = \begin{cases} Kr & \text{linéaire} \\ Kr^{1/M} & \text{puissance} \\ R_\infty (1 - e^{-br}) & \text{exp onentiel} \end{cases}$$

$$-Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D}$$

Taux de restitution de densité d'énergie

$$Y = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^e : \underline{E} : \underline{\varepsilon}^e = \frac{\sigma_{eq}^2 R_\nu}{2E(1-D)^2} = \frac{\tilde{\sigma}_{eq}^2 R_\nu}{2E}$$

Fonction de triaxialité

$$R_\nu = \tfrac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right)^2$$

Fonction critère

$$f = \tilde{\sigma}_{eq} - R - \sigma_y = \frac{\sigma_{eq}}{1-D} - R - \sigma_y$$

Potentiel de dissipation

(modèle non associé)

$$F = f + F_D$$

$$F_D = \frac{S}{(s+1)(1-D)}\left(\frac{Y}{S}\right)^{s+1}$$

Lois d'évolution

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D}\frac{3}{2}\frac{\underline{\sigma}^D}{\sigma_{eq}}$$

$$\dot{r} = -\dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial R} = \dot{\lambda} = \dot{p}(1-D)$$

Loi d'évolution de l'endommagement (Lemaitre)

$$\boxed{\dot{D} = \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial Y} = \left(\frac{Y}{S}\right)^{s}\dot{p}}$$

Détermination du multiplicateur plastique

plasticité $f = 0, \dot{f} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\lambda}$

visco-plasticité $f = \sigma_v , \quad \sigma_v = K_N \dot{p}^{1/N} \quad \rightarrow \quad \dot{p} = \left\langle \frac{f}{K_N} \right\rangle^N$

Loi de Norton

Amorçage d'une fissure si $D=D_c$

Paramètres d'endommagement (à identifier)
ε_{pD}, S, s, D_c

Rupture en chargement monotone

Déformation plastique cumulée
à rupture

$$p_R = \varepsilon_{pD} + \left(\frac{2ES}{\sigma_u^2 R_\nu}\right)^s D_c$$

Analyse de sensibilité

$$\frac{\delta p_R}{p_R} = \overset{2.9}{\boxed{S^{p_R}_{T_X}}}\frac{\delta T_X}{T_X} + \overset{5}{\boxed{S^{p_R}_{\sigma_u}}}\frac{\delta \sigma_u}{\sigma_u} + \overset{2.5}{\boxed{S^{p_R}_{S}}}\frac{\delta S}{S} + \overset{2.5}{\boxed{S^{p_R}_{E}}}\frac{\delta E}{E} + \overset{1.94}{\boxed{S^{p_R}_{\nu}}}\frac{\delta \nu}{\nu} + \overset{1}{\boxed{S^{p_R}_{s}}}\frac{\delta s}{s} + \overset{0.5}{\boxed{S^{p_R}_{\varepsilon_{pD}}}}\frac{\delta \varepsilon_{pD}}{\varepsilon_{pD}} + \overset{0.5}{\boxed{S^{p_R}_{D_c}}}\frac{\delta D_c}{D_c}$$

$T_X = \dfrac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}$ taux de triaxialité des contraintes

$\sigma_u = \sigma_y + R_\infty$ contrainte ultime

Définition physique de l'endommagement

Isotropie

Définition physique $D = \frac{\delta S_D}{\delta S}$ (Kachanov 1958)

Contrainte effective $\underline{\tilde{\sigma}} = \frac{\underline{\sigma}}{1 - D}$ (Rabotnov 1968)

Principe d'équivalence en déformation (Lemaitre 1971)

$$\rho\psi^e = \frac{1}{2}(1 - D)\,\underline{\varepsilon}^e : \underline{E} : \underline{\varepsilon}^e$$

$$\rho\psi^*_e = \frac{1}{2}(1 - D)^{-1}\,\underline{\sigma} : \underline{E}^{-1} : \underline{\sigma}$$

$$\Rightarrow$$

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \underline{E} : \underline{\varepsilon}^e$$

$$\underline{\sigma} = \underline{E}(1 - D) : \underline{\varepsilon}$$

D = densité surfacique de micro-défauts (induit une perte de rigidité…)

Couplage par décomposition du potentiel élastique

Matériaux initialement isotropes

$$\rho\chi = \overbrace{\frac{1+\nu_0}{2E_0}\,\mathrm{Tr}\left[(\underline{1}-\underline{D})^{-1/2}\underline{\sigma}^D(\underline{1}-\underline{D})^{-1/2}\underline{\sigma}^D\right]}^{\text{Deviatoric part}} + \overbrace{\frac{3(1-2\nu_0)}{2E_0}\,\frac{\sigma_H^2}{(1-\eta D_H)}}^{\text{Hydrostatic part}}$$

$$D_H = \frac{1}{3}\,\mathrm{Tr}\,\underline{D}$$

η est un paramètre “matériau” de sensibilité à la contrainte hydrostatique

$\eta=3$ pour la plupart des matériaux

- Potentiel thermodynamique différentiable: continuité de la relation contraintes-déformations
- Contrainte effective symétrique indépendante des paramètres d'élasticité

ELASTO-PLASTICITE COUPLEE A L'ENDOMMAGEMENT

Variables thermodynamiques

Variables d'état		Variables associées
observable	internes	
$\underline{\varepsilon}$		$\underline{\sigma}$
	$\underline{\varepsilon}^p$	$-\underline{\sigma}$
	r	R
	$\underline{D}$	$-\underline{Y}$

Lois d'état

$$\underline{\varepsilon}^e = \rho \frac{\partial \chi}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\tilde{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \mathrm{tr}\,\underline{\tilde{\sigma}}\,\underline{1}$$

$$\boxed{\underline{\tilde{\sigma}} = \underbrace{\left[(\underline{1}-\underline{D})^{-1/2}\,\underline{\sigma}^D\,(\underline{1}-\underline{D})^{-1/2}\right]^D}_{\text{Deviatoric}} + \underbrace{\frac{\sigma_H}{1-\eta D_H}\underline{1}}_{\text{Hydrostatic}}}$$

$$\underline{Y} = \rho \frac{\partial \chi}{\partial \underline{D}} \qquad R = G'(r) = R(r)$$

Fonction critère

$$f = \tilde{\sigma}_{eq} - R - \sigma_y = \left((\underline{1} - \underline{D})^{-1/2} \underline{\sigma}^D (\underline{1} - \underline{D})^{-1/2} \right)_{eq} - R - \sigma_y$$

Potentiel de dissipation $F = f + F_D$

(modèle non associé)

$$F_D = \left(\frac{\tilde{Y}(\underline{\varepsilon}^e)}{S} \right)^s \underline{Y} : \left| \frac{d\underline{\varepsilon}^p}{dr} \right|$$

Energie élastique effective

« Direction »

$$\tilde{Y} = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^e : \underline{E} : \underline{\varepsilon}^e = \frac{1}{2} \underline{\tilde{\sigma}} : \underline{\varepsilon}^e = \frac{\tilde{\sigma}_{eq}^2 \tilde{R}_\nu}{2E}$$

$$\tilde{R}_\nu = \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu)\left(\frac{\tilde{\sigma}_H}{\tilde{\sigma}_{eq}} \right)^2$$

Lois d'évolution

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^{p} = \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}$$

$$\dot{r} = -\dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial R}$$

$$\underline{\dot{D}} = \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial \underline{Y}}$$

Loi d'évolution de l'endommagement anisotrope induit par la plasticité

$$\underline{\dot{D}} = \left(\frac{\tilde{Y}}{S}\right)^{s} \left|\underline{\dot{\varepsilon}}^{p}\right| \quad \text{si } p \geq p_D$$