

Contact et frottement en mise en forme

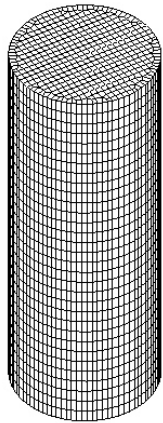
A. Introduction :

Dans de nombreux systèmes mécaniques, les liaisons mécaniques, les transmissions des efforts, les procédés de transformation des matériaux (emboutissage, découpage, usinage, forgeage), sont assurés par des conditions de contact.

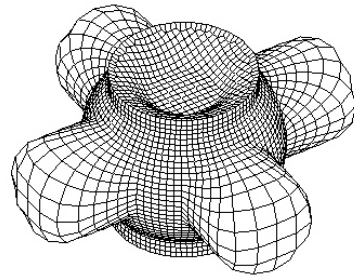
Le contact peut avoir lieu entre des solides déformables ou entre solides déformables et contacteurs rigides.

B. Exemples :

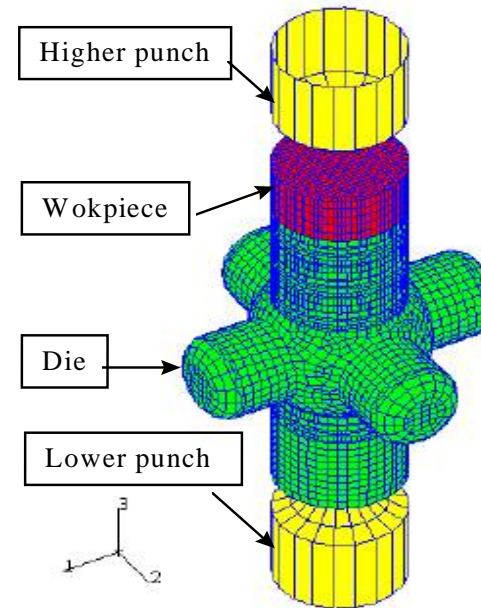
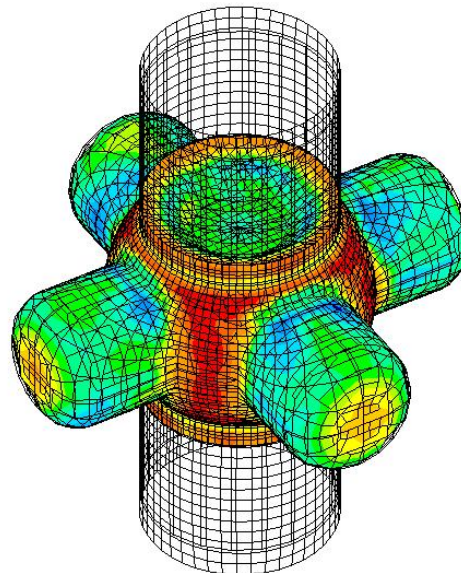
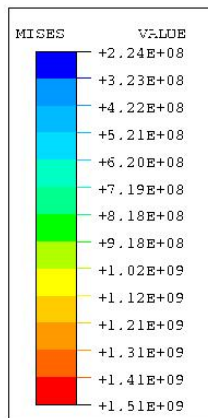
1 - Forgeage 3D d'un cardon



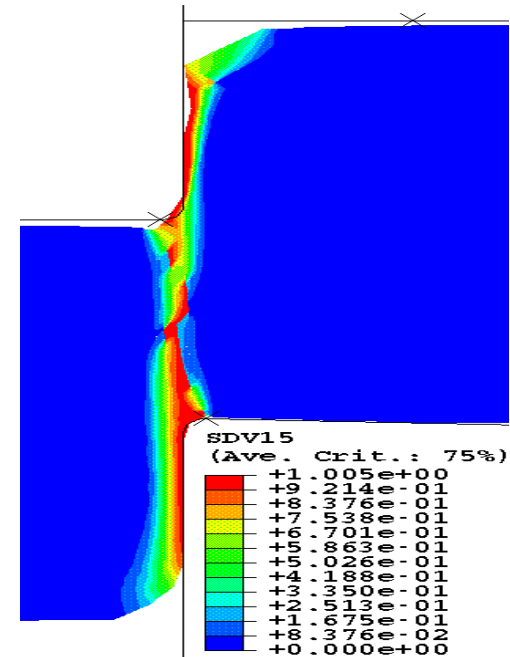
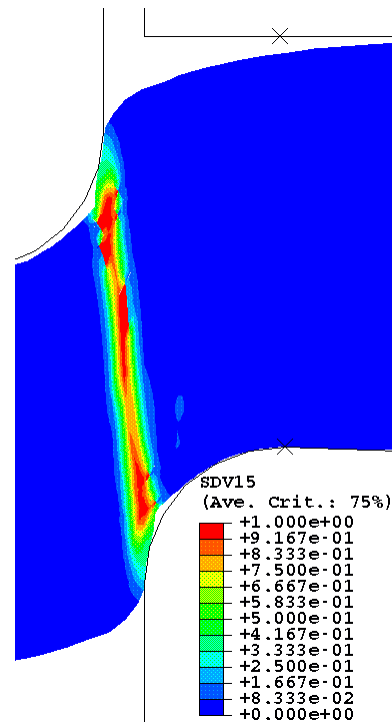
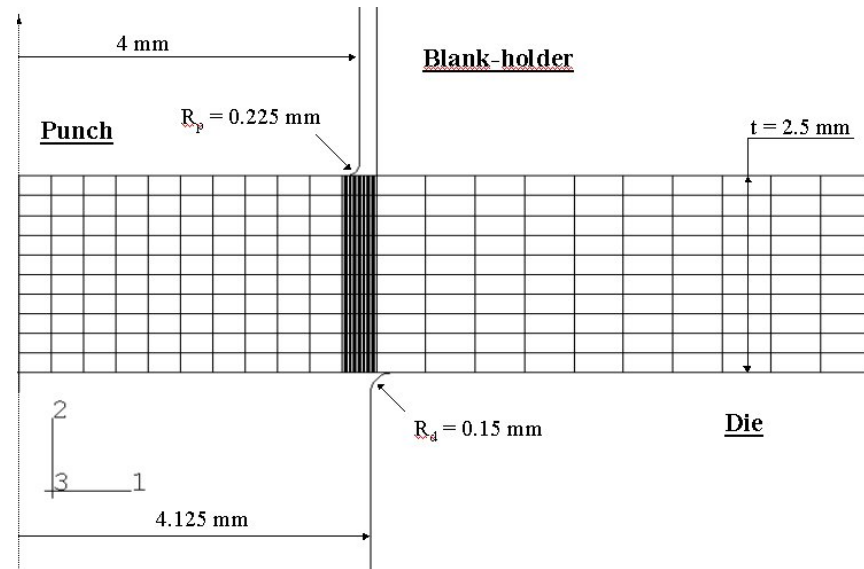
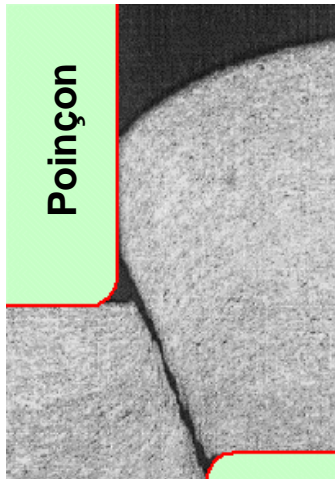
a



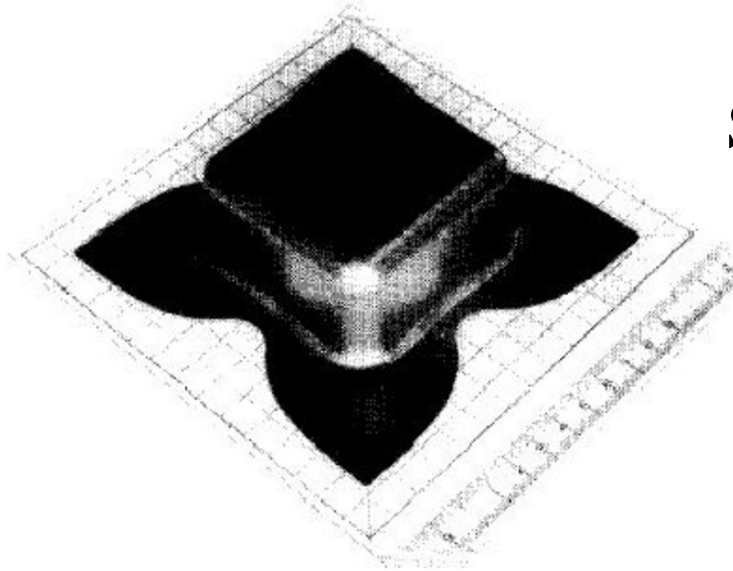
b



2 - Découpage des tôles



3 - Emboutissage des tôles

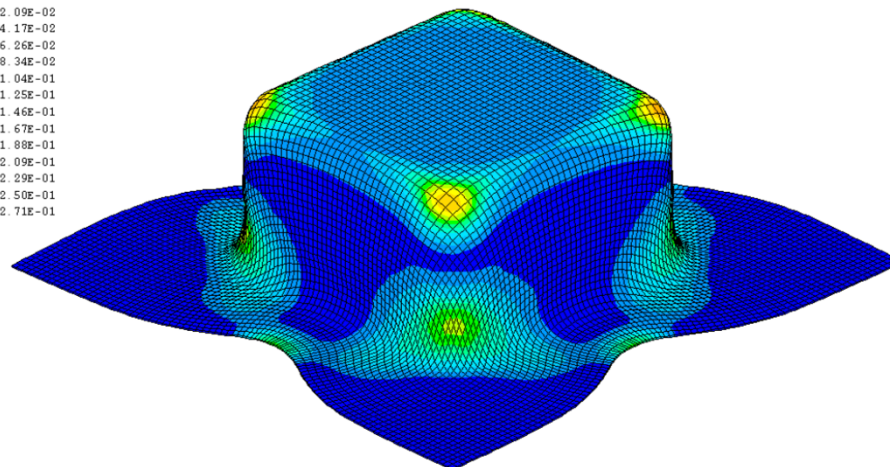
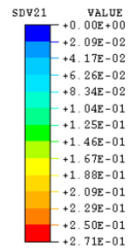
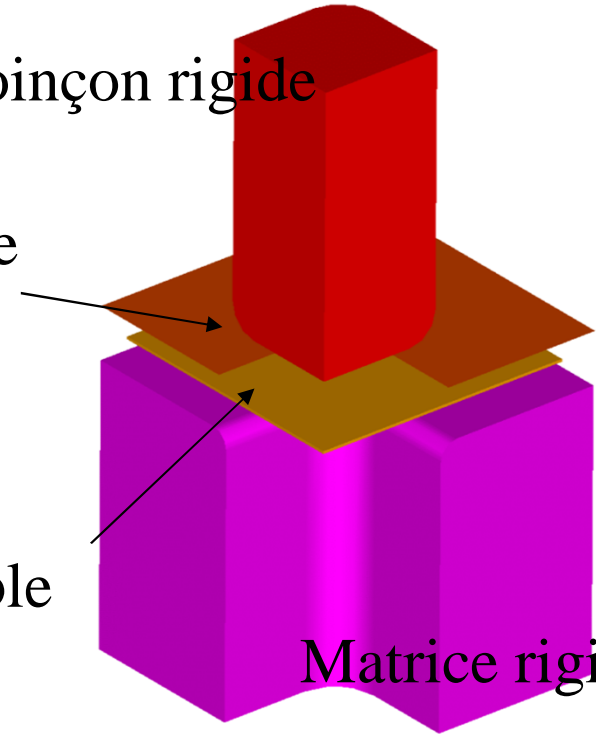


Serre-flanc rigide

Poinçon rigide

Tôle déformable

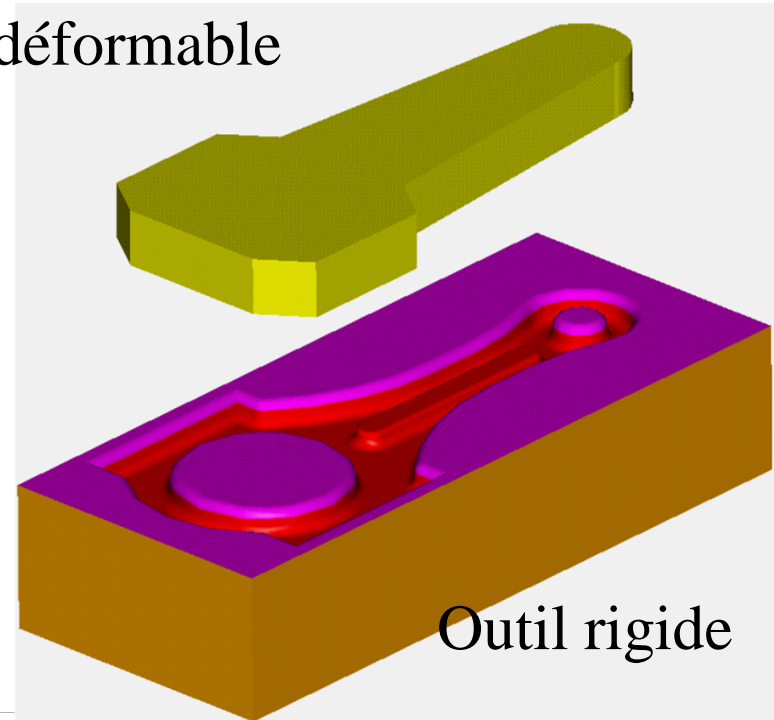
Matrice rigide



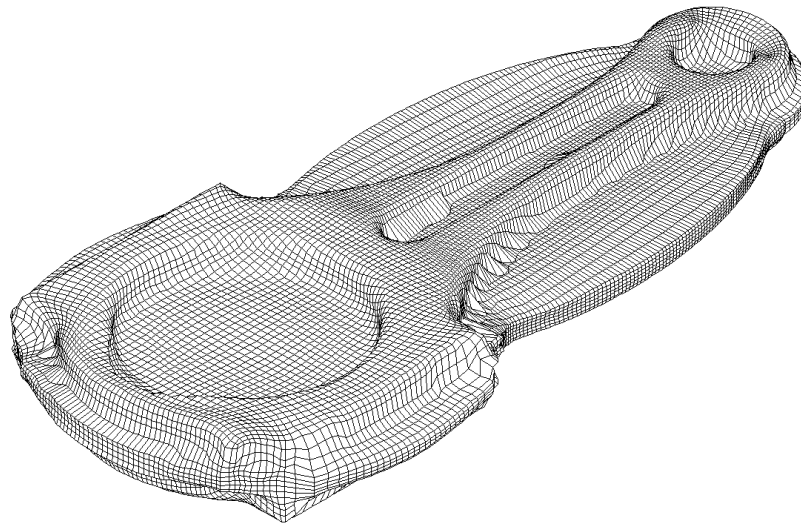
4 - Matricage d'une bielle



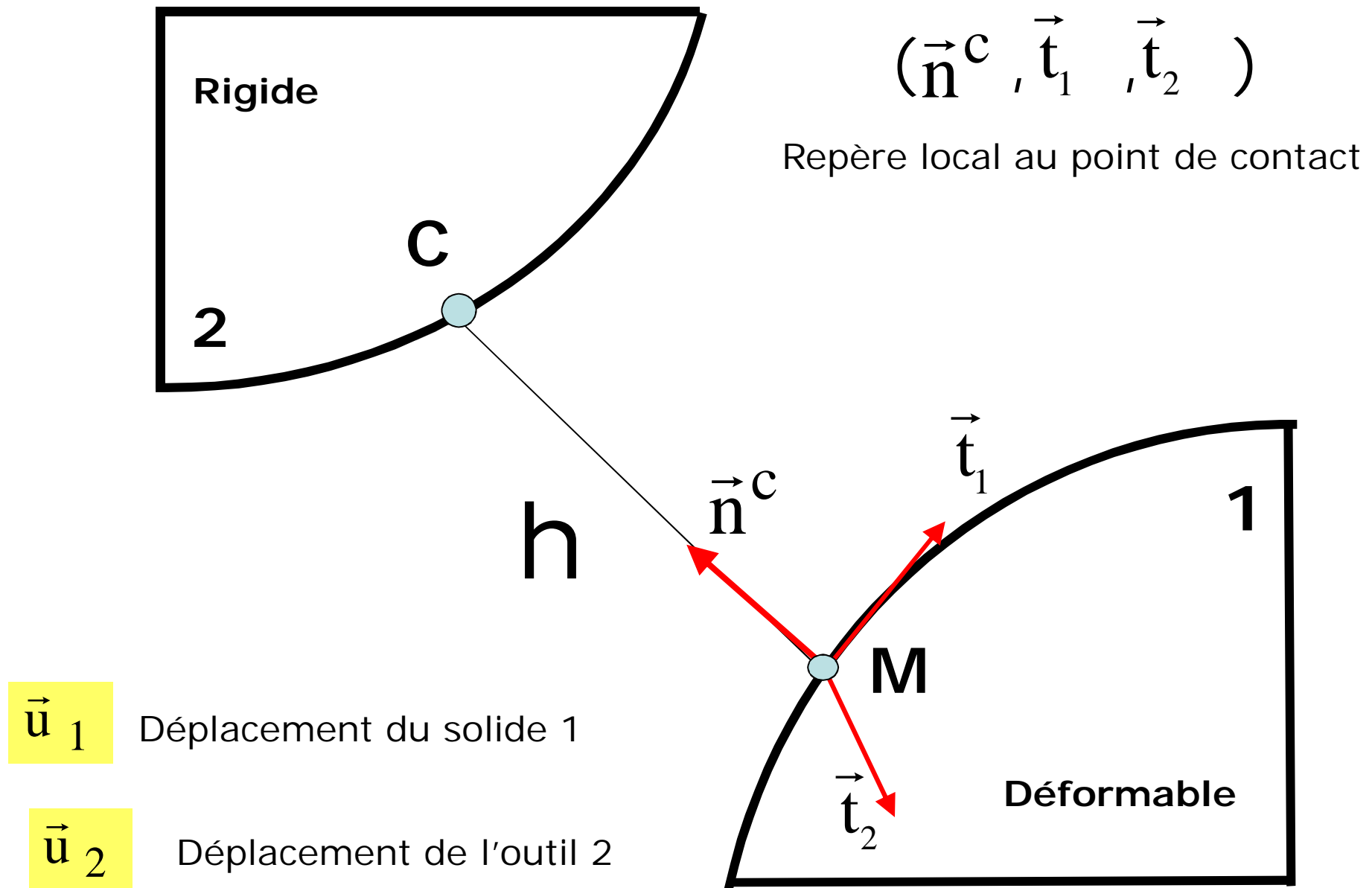
Lopin déformable



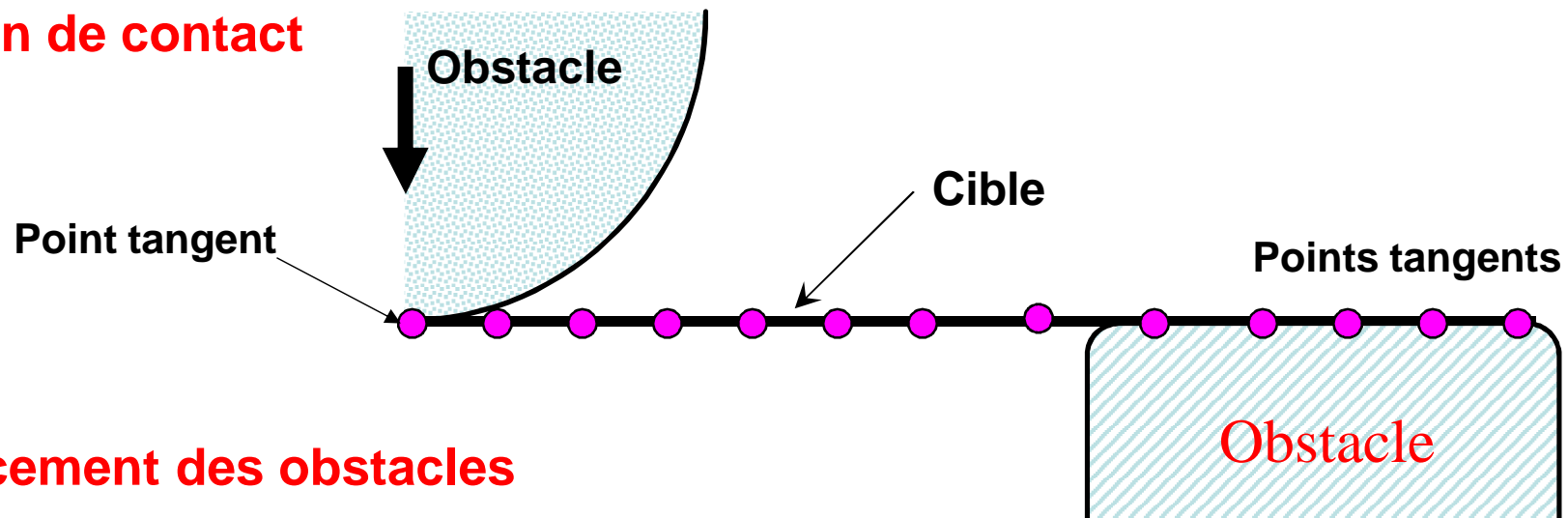
Outil rigide



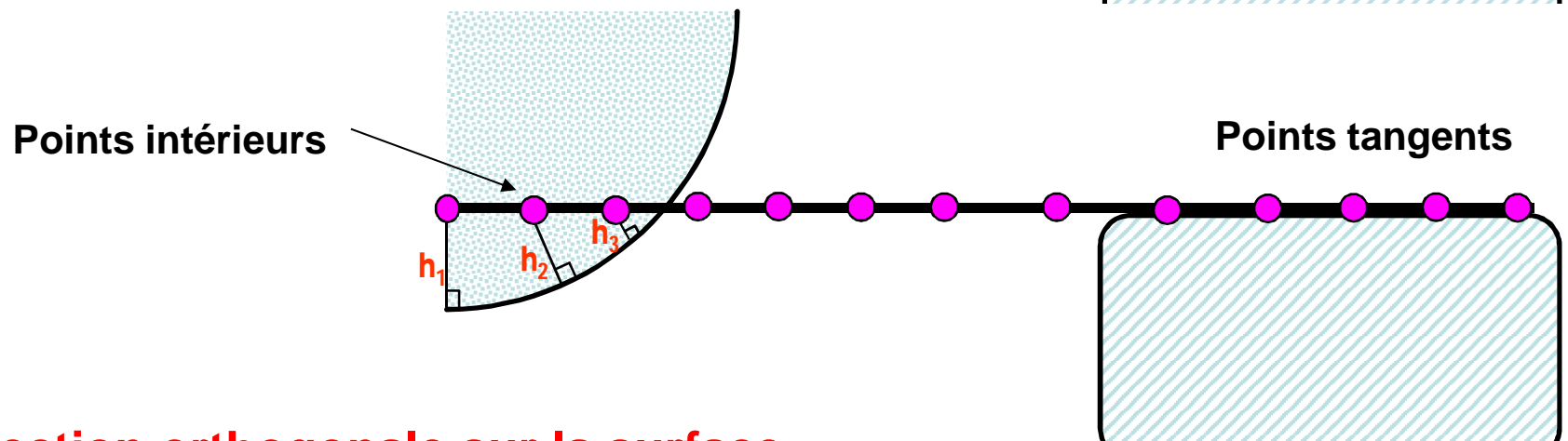
C. Cinématique du mouvement



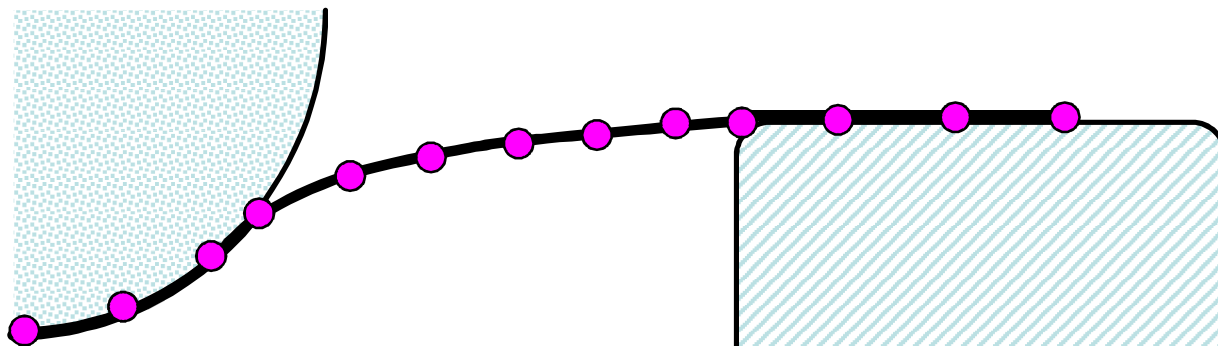
Gestion de contact



Déplacement des obstacles



Projection orthogonale sur la surface



Distance entre pièce 1 et pièce 2

$$h = (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot \vec{n}^c$$

Contrainte normale de la pièce déformable

$$\vec{R} = \underline{\sigma} \cdot \vec{n}^c$$

Vecteur déplacement

$$\vec{u} = u_n \cdot \vec{n}^c + \vec{u}_t$$

Déplacement normal

$$u_n = \vec{u} \cdot \vec{n}^c$$

Déplacement tangentiel

$$\vec{u}_t = \vec{u} - u_n \cdot \vec{n}^c$$

Vecteur réaction

$$\vec{R} = R_n \cdot \vec{n}^c + \vec{R}_t$$

Réaction normale

$$R_n = \vec{R} \cdot \vec{n}^c$$

Réaction tangentielle

$$\vec{R}_t = \vec{R} - R_n \cdot \vec{n}^c$$

D. Contact unilatéral et bilatéral

Contact peut avoir lieu :

1. Entre solide déformable et contacteur rigide
2. Entre deux solides déformables
3. Entre deux parties du même solide

Contact peut être :

1. Purement glissant (sans frottement)
2. Avec frottement $1 \text{ (sec)} \leq \mu \leq 0$ (glissant ou lubrifiant)

Contact est :

1. Bilatéral (zone de contact reste fixe au cours de la déformation)
2. Unilatéral (zone de contact varie au cours de la déformation)

1. Contact bilatéral :

Le contact est bilatéral si la condition de contact suivante est maintenue :

$$h = (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n}^c = 0$$

2. Contact unilatéral (ou de SIGNIORI) :

Les deux solides sont libres de se décoller si les réactions extérieures vont dans ce sens (perte de contact) :

$$h = (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot \vec{n}^c \geq 0 \quad R_n \geq 0 \quad h R_n = 0$$

1. **Impénétrabilité** : condition de contact cinématique

$$h > 0$$

2. **Non adhésion** : condition de contact statique, le point M ne doit pas coller au solide (réaction toujours positive)

$$h = 0 \Rightarrow R_n \geq 0$$

3. **Non contact** : condition de décollement cinématique, le point M se trouve à l'extérieur du solide décollement

$$h > 0 \Rightarrow R_n = 0$$

E. Lois de frottement

1. Loi de Coulomb

$$\|\vec{R}_t\| \leq \mu R_n$$

$$\mu \in [0,1]$$

$$\|\vec{R}_t\| = \sqrt{(\vec{R}_{t1})^2 + (\vec{R}_{t2})^2}$$

μ : coefficient de frottement de Coulomb entre la cible et le contacteur

Remarque : Il existe un seuil de déclenchement d'un phénomène irréversible

$$\|\vec{R}_t\| < \mu R_n$$

si

$$\vec{u}_t = 0$$

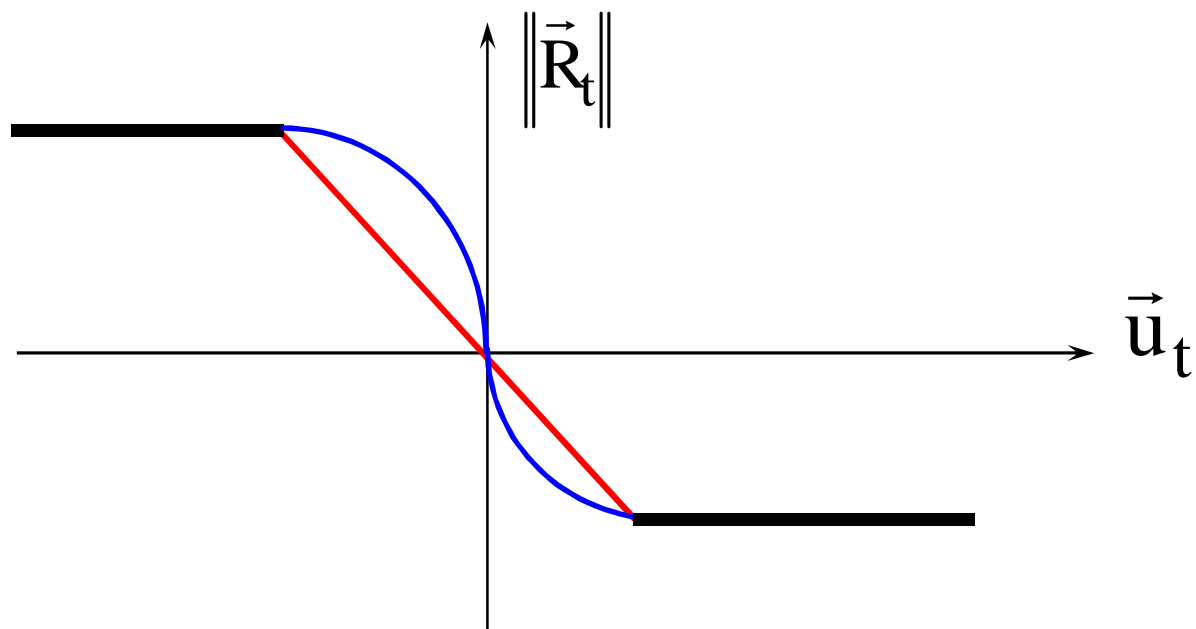
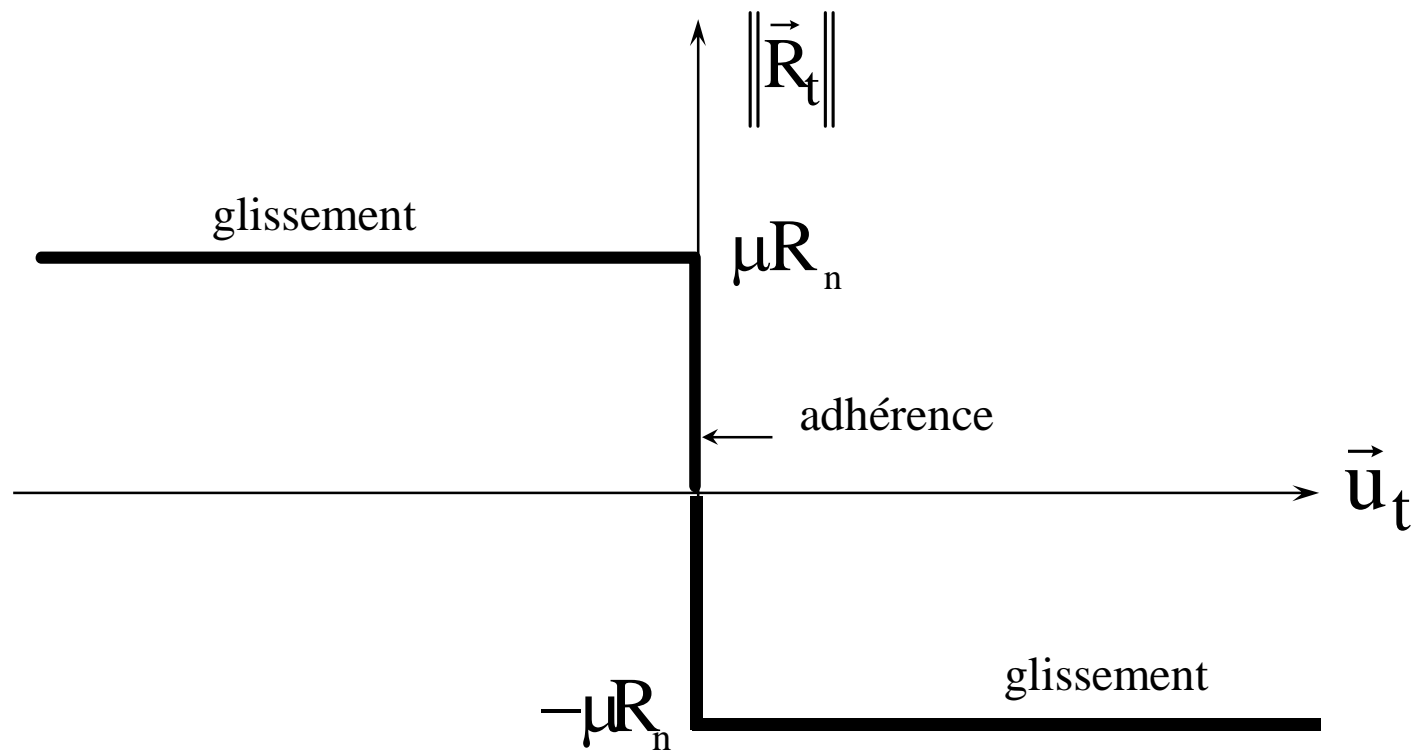
adhérence

$$\vec{R}_t = -\mu R_n \frac{\dot{u}_t}{\|\dot{u}_t\|}$$

si

$$\vec{u}_t \neq 0$$

glissement



2. Loi de Tresca

$$\vec{R}_t = -m \frac{\sigma_y(\varepsilon^P)}{\sqrt{3}} \frac{\vec{u}_t}{\|\vec{u}_t\|}$$

σ_y : Contrainte d'écoulement et $m \in [0,1]$ coefficient de Tresca

3. Loi de Coulomb-Orowan

$$\vec{R}_t = -\text{Min} \left[\mu |\mathbf{R}_n| \frac{\mathbf{u}_t}{\|\mathbf{u}_t\|}, m \frac{\sigma_y \left(\frac{-P}{\varepsilon} \right)}{\sqrt{3}} \frac{\mathbf{u}_t}{\|\mathbf{u}_t\|} \right]$$

4. Loi de Critescu

$$\vec{R}_t = -m \frac{|\bar{\sigma}|}{\sqrt{3}} \frac{\vec{u}_t}{\|\vec{u}_t\|}$$

$\bar{\sigma}$: Contrainte équivalent de von - Mises

5. Loi de Norton-Hoff

$$R_t = \alpha \dot{u}_t^p$$

$0 \leq p \leq 1$ et α est le coefficient de frottement de Norton-Hoff (en Pa)

Remarque :

1. Fonction de régularisation $f(u)$ (discontinuité du déplacement au voisinage de 0)

$$\|\vec{R}_t\| = f(u_t) \mu R_n$$

avec

$$\lim_{u_t \rightarrow \infty} f(u_t) = 1$$

Exemple de fonction de régularisation :

$$f(u_t) = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\|\vec{u}_t\|}{u_0} \right)$$

2. Loi de Norton-Hoff est très pratique pour les calculs en viscoplasticité

3. Loi de Coulomb-Orowan est difficile d'emploi, elle dépend de R_n et de la déformation plastique cumulée (inconnues du problème)

4. Loi de Tresca se prête bien aux calculs simples de plasticité

5. Loi de Critescu se prête bien aux matériaux écrouissables

6. Loi de Coulomb se prête bien aux calculs simples d'élasticité
isotrope

a. Équations d'équilibre (contact solide déformable – outil rigide):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f}_v = \vec{0} & \text{sur } \Omega \\ \vec{u} = \vec{\bar{u}} & \text{sur } \Gamma_u \\ h = 0 & \text{sur } \Gamma_c \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \vec{f}_s & \text{sur } \Gamma_\sigma \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}^c = \vec{R} & \text{sur } \Gamma_c \end{array} \right.$$

b. Action de contact sans frottement :

Equilibre du solide 1 sans contact :

$$W_{\text{solide}} = \frac{1}{2} \int_V [\sigma] : \{\varepsilon\} dV - \int_V \vec{f}_v \cdot \vec{u} dV - \int_{\Gamma_\sigma} \vec{f}_s \cdot \vec{u} dS$$

Action des efforts de outil 2 sur le solide 1

$$\vec{f}_{\text{cont}} = \iint_{\Gamma_c} (\vec{R} \cdot \vec{n}^c) \vec{n}^c dS = \iint_{\Gamma_c} R_n \vec{n}^c dS$$

Travail des actions de contact sur le solide 1

$$W_{\text{cont}} = \iint_{\Gamma_c} \vec{f}_{\text{cont}} \cdot \vec{u}_n dS$$

$$\vec{u}_n = \left[(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n}^c \right] \vec{n}^c$$

c. Action de contact avec frottement

Action des efforts du contacteur 2 sur le solide 1

$$\vec{f}_{\text{cont}} = \iint_{\Gamma_c} \left(\mathbf{R}_n \vec{n}^c + \vec{R}_t \right) dS$$

Travail des actions de contact sur le solide 1

$$W_{\text{cont}} = \iint_{\Gamma_c} \left(\mathbf{R}_n \vec{n}^c \cdot \vec{u}_n + \vec{R}_t \cdot \vec{u}_t \right) dS$$

$$\vec{u}_t = (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) - \vec{u}_n \cdot \vec{n}^c$$

Equilibre du solide 1 avec contact + frottement

$$W_{\text{solide}} = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma} : \{\varepsilon\} dV - \int_V \vec{f}_v \cdot \vec{u} dV - \int_{\Gamma_\sigma} \vec{f}_s \cdot \vec{u} dS - W_{\text{cont}}$$

G. Discrétisation par éléments finis de l'équilibre

$$W_{\text{solide}} = \frac{1}{2} \int_V [\sigma] : \{\varepsilon\} dV - \int_V \vec{f}_v \cdot \vec{u} dV - \int_{\Gamma_\sigma} \vec{f}_s \cdot \vec{u} dS - W_{\text{cont}}$$

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon} \quad \text{Loi de comportement}$$

$$\underline{\varepsilon} = [\underline{B}] \vec{u} \quad \text{interpolation des déformations}$$

$$\underline{u} = [\underline{N}] \underline{u}^k \quad \text{interpolation des déplacements}$$

sous forme matricielle

$$W_{\text{solide}} = \left(\frac{1}{2} \underline{u}^T [\underline{K}] \underline{u} - \underline{u}^T \{\underline{F}\} \right)$$

$$[\underline{K}] = \int_V \underline{B}^T [\underline{C}] \underline{B} dV \quad \text{Matrice de rigidité}$$

$$\{\underline{F}\} = \int_V [\underline{N}]^T \vec{f}_v dV + \int_{\Gamma_\sigma} [\underline{N}]^T \vec{f}_s dS \quad \text{Vecteur efforts extérieures}$$

L'équilibre du système avec contact revient à minimiser l'équation de l'énergie sous la contrainte suivante:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\sigma} \equiv \delta W_{\text{solide}} = 0 & \text{équilibre} \\ \mathbf{h} = \left((\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n}^c \right) \vec{n}^c = [\mathbf{G}]^T \mathbf{u}_n = 0 & \text{contact} \end{cases}$$

Méthodes de résolution du contact :

1. Méthode de pénalisation
2. Méthode de multiplicateur de Lagrange
3. Méthode du lagrangien augmenté
4. Méthode du lagrangien perturbé

H. Gestion numérique du contact

1. Un tri des noeuds esclaves (appartenant au solide déformable) susceptibles d'être en contact

$$\vec{X}_P$$

2. Chaque nœud esclave sélectionné est projeté orthogonalement sur les facettes de la surface maîtresse (obstacle)

$$h$$

3. Les fonctions de forme $N^k(\xi, \eta)$ et les normales extérieures \vec{n}^c des obstacles sont utilisées pour déterminer la position du point P

$$\vec{X}_C$$

4. La position relative h du nœud esclave et sa projection orthogonale sont données par :

$$\vec{X}_P = \vec{X}_C - \vec{n}h = \sum_{k=1}^{\text{Node}} N^k(\xi, \eta) \vec{X}_c^k - h \sum_{k=1}^{\text{Node}} \vec{n}^k$$

5. Le point est jugé concerné par la facette de l'obstacle si la distance **h** par rapport aux autres facettes est **minimale** :

$$h = \min(h_i)$$

6. La position du point concerné sur la facette est calculé par ses coordonnées dans le repère de référence : (ξ, η)

7. Le point est concerné par la facette si :

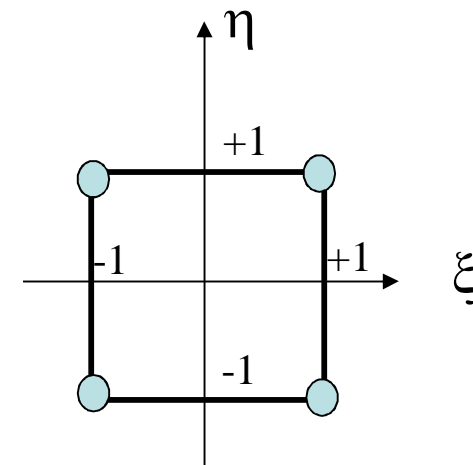
1 D : $-1 \leq \xi \leq 1$



2 D :

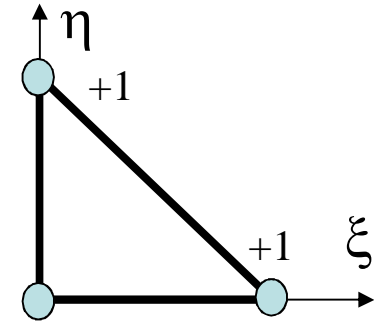
Quadrangle

$$-1 \leq \xi \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \eta \leq 1$$



Triangle

$$0 \leq \xi \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq 1 - \xi - \eta \leq 1$$



8. La position par rapport à cette facette est déterminée par le signe de h

1. $h = 0$ point tangent
2. $h > 0$ pénétration
3. $h < 0$ pas contact

9. Pour chaque point on connaît :

a. distance au contacteur : **h**

b. position de son projeté sur la surface du contacteur (ξ, η)

c. normale de son projeté $\sum_{k=1}^{\text{Node}} \mathbf{N}^k(\xi, \eta) \mathbf{n}^k$

d. déplacement à imposer $\bar{\mathbf{u}} = -h \sum_{k=1}^{\text{Node}} \mathbf{N}^k(\xi, \eta) \mathbf{n}^{ck}$

J. Méthodes de résolution du contact

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} \equiv \delta W_{\text{solide}} = 0 & \text{équilibre} \\ \mathbf{h} = \left((\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{n}^c \right) \vec{n}^c = [\mathbf{G}]^T \mathbf{u}_n = 0 & \text{contact} \end{cases}$$

1. Méthode de pénalisation :

Il faut traduire la condition de non-pénétration $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ pour calculer les déplacements de contact. La méthode est de remplacer le problème avec contrainte par la résolution d'une suite de problème sans fonction contrainte en introduisant la notion de multiplicateurs de pénalité. Cette méthode consiste à ajouter un terme très grand α à l'expression de l'énergie du système

$$W_{\text{solide}}(\vec{u}) = \frac{1}{2} \vec{u}^T [\mathbf{K}] \vec{u} + \frac{\alpha}{2} \vec{u}^T [\mathbf{G}]^T [\mathbf{G}] \vec{u} = \{F\} \vec{u}$$
$$\delta W_{\text{solide}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}} \Rightarrow \left([\mathbf{K}] + \alpha [\mathbf{G}] [\mathbf{G}]^T \right) \{u\} = \{F\}$$

$$\left[[\mathbf{K}] + \alpha [\mathbf{G}] [\mathbf{G}]^T \right] \{u\} = \{F\}$$

2. méthode des multiplicateurs de Lagrange :

L'inconvénient de la méthode de pénalisation est que la solution dépend du choix du coefficient de pénalisation α . La méthode des multiplicateurs de Lagrange peut palier à ce problème en introduisant une inconnue λ (avec un sens physique). Contrairement à la méthode des pénalisation, la taille du problème est augmentée dans cette méthode.

$$W_{\text{solide}}(\mathbf{u}, \lambda) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T [\mathbf{K}] \mathbf{u} + \lambda^T [\mathbf{G}]^T \mathbf{u} = \{\mathbf{F}\} \mathbf{u}$$

$$\delta W_{\text{solide}}(\mathbf{u}, \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [\mathbf{K}] \mathbf{u} + [\mathbf{G}] \lambda = \mathbf{F} \\ [\mathbf{G}]^T \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

3. méthode du lagrangien perturbé :

Pour éviter les problèmes de zéro sur la diagonale de la matrice de raideur, on a remplacé la contrainte de la méthode des multiplicateurs de

$$\text{Lagrange } [G]^T u = 0 \text{ par } [G]^T u - \frac{1}{2\alpha} \lambda = 0$$

$$W_{\text{solide}}(u, \lambda) = \frac{1}{2} u^T [K] u + \lambda^T [G]^T u - \frac{1}{2\alpha} \lambda^T \lambda = \{F\} u$$

$$\delta W_{\text{solide}}(u, \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [K] u + [G] \lambda = F \\ [G]^T u - \frac{1}{\alpha} \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & -\frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

4. méthode du lagrangien augmenté :

1 - La solution (ou précision) dépend directement du coefficient α dans la méthode du Lagrangien perturbé et de pénalisation.

2 - La méthode des multiplicateurs de Lagrange fournit une solution exacte mais la taille du système du problème augmente.

3 - La présence de zéros sur la diagonale des matrices nécessite des précautions numériques.

4 - La méthode lagrangien augmenté peut être comme une technique restant simple et permettant de minimiser les inconvénients précédents.

$$W_{\text{solide}}(u, \lambda) = \frac{1}{2} u^T [K] u + \lambda^T [G]^T u + \frac{\alpha}{2} u^T [G][G]^T u = \{F\}u$$

$$\delta W_{\text{solide}}(u, \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [K + \alpha GG^T] u^k + [G] \lambda^k = F \\ \lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha [G]^T u^k \end{cases}$$