ECOLE DES MINES DE NANCY

Décision et Prévision Statistiques

Thierry Verdel (2007)

Chapitre 3

Le contrôle statistique

Le contrôle de la qualité constitue sans doute l'un des postes les plus importants de l'entreprise moderne. Les méthodes de fabrication à la chaîne exigent une parfaite interchangeabilité entre les innombrables pièces fabriquées en série. Un tel résultat ne peut être atteint que si les spécifications imposées sont rigoureusement respectées. A ce premier objectif de qualité s'en ajoute un second qui semble s'opposer au précédent, celui de l'économie. La qualité voudrait qu'on se livre à un examen minutieux de la fabrication ; l'économie exige qu'on réduise au maximum tous les frais, en particulier ceux du contrôle qui peuvent constituer une part très importante du prix de revient. Cela fait apparaître la nécessité de substituer à une inspection à 100% des pièces fabriquées, un contrôle par échantillonnage, ou contrôle statistique qui devient d'ailleurs inévitable lorsqu'on doit procéder à des essais destructifs : résistance des matériaux, par exemple. Il importe, dès lors, de rechercher des modes de contrôle qui permettent à la fois de prélever un nombre de pièces aussi faible que possible, et de déterminer aussi bien que possible la qualité d'un lot.

1. Distribution d'échantillonnage

1.1. Population

En statistique, on appelle *population* un ensemble d'éléments caractérisés par un critère permettant de les identifier sans ambiguïté. Chacun des éléments est appelé *individu*. Ces appellations sont liées aux origines démographiques de la statistique. On parlera, par exemple, de la population des axes usinés sur telle machine-outil pendant telle période, en s'intéressant d'ailleurs, non pas aux individus en tant que tels, mais à une ou plusieurs de leurs caractéristiques.

Chacune des caractéristiques sur laquelle on décide de faire porter l'observation est appelée *variable* (ou caractère). Il importe de faire ici une distinction entre deux types de variables et par conséquent, deux catégories de populations :

- Populations à caractéristiques *qualitatives*. Pour des axes, par exemple, on distinguera entre pièces satisfaisantes et pièces défectueuses. On se trouve dans ce cas chaque fois qu'un contrôle s'effectue par calibre, c'est-à-dire que l'on distingue, par exemple, les axes dont le diamètre appartient ou n'appartient pas à un certain intervalle admissible appelé intervalle de tolérance.

- Populations à caractéristiques *quantitatives* (ou mesurables). Dans l'exemple des axes, on peut mesurer le diamètre des axes et classer les pièces suivant les valeurs qu'il peut prendre.

La notion de population n'est pas toujours très facile à définir avec précision. Si on considère, par exemple, la production journalière d'une machine-outil, on peut, de prime abord, parler de la population des pièces produites ; mais, au cours de la journée, la machine a pu se dérégler, l'ouvrier qui surveille la fabrication a peut-être procédé à un réglage, etc. Il n'est donc pas du tout évident que l'ensemble de la production journalière constitue une population unique et bien homogène.

Un autre type de difficulté peut se présenter pour définir la population. Supposons, par exemple, que la variable étudiée soit la résilience de l'acier des lingots d'une certaine coulée. L'individu, c'est-à-dire l'élément sur lequel on effectue la mesure est une éprouvette d'acier découpée et usinée suivant certaines modalités. Pour définir la population, il faut se référer à l'ensemble infini de toutes les éprouvettes susceptibles d'être réalisées dans les mêmes conditions à partir des lingots étudiés.

1.2. Echantillon

Une partie essentielle de la statistique, consiste à porter des jugements sur une population à partir d'échantillons ; c'est ce qu'on appelle l'*inférence* statistique. Un *échantillon* est un ensemble d'individus prélevés, suivant un procédé bien défini, dans l'ensemble plus important constitué par la population. Le nombre d'individus prélevés s'appelle la *taille* de l'échantillon, que nous noterons généralement n. Tous les résultats statistiques établis sur les échantillons impliqueront que ces derniers sont *représentatifs* de la population dont ils proviennent. C'est le cas s'ils ont été prélevés *au hasard*, c'est à dire que tous les individus de la population avaient la même probabilité de faire partie de l'échantillon effectivement prélevé. En pratique, l'obtention d'échantillons au hasard présente un certain nombre de difficultés qui peuvent être levées si l'on peut numéroter chacun des individus de la population et qu'on a alors recours à une table de nombres au hasard.

Dans toute la suite, nous admettrons que les échantillons sont prélevés de façon non exhaustive ou bien que la taille de la population est suffisamment importante devant celle de l'échantillon pour que l'on puisse se ramener à ce cas.

1.3. Caractéristiques des échantillons

Nous désignerons par la notation $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, les valeurs prises par la variable pour chacun des individus constituant l'échantillon, ce qu'on appelle une série d'observations. Les séries d'observations peuvent être caractérisées par un certain nombre de valeurs typiques que nous allons définir.

1.3.1. Caractéristiques de tendance centrale

On appelle caractéristique de tendance centrale, une fonction des observations dont la valeur est comprise entre les valeurs extrêmes de la série.

La plus couramment utilisée est la *moyenne* arithmétique :

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

qui est très facile à calculer et possède d'importantes propriétés théoriques, par ailleurs assez faciles à établir. La moyenne, toutefois, possède l'inconvénient d'être très sensible au retrait ou à l'ajout d'une observation "aberrante" : on dit que c'est une statistique peu *robuste*.

Une caractéristique de tendance centrale plus robuste est la *médiane* dont les propriétés théoriques, par contre, sont plus compliquées à manipuler que pour la moyenne. Lorsqu'on a classé les observations par ordre de grandeurs croissantes, la médiane est la valeur de l'observation qui se trouve au rang $\frac{n+1}{2}$, si n est impair. Si n est pair ($n = 2p$), c'est le milieu de l'intervalle $[x_p, x_{p+1}]$.

De façon plus générale, on définit les *quantiles*. Par exemple les *déciles* : le premier décile est la valeur telle qu'il y ait 10 % des observations en dessous d'elle, le neuvième décile est la valeur telle qu'il y ait 10 % des observations au dessus d'elle. De même, les *quartiles* : le premier et le troisième quartiles laissent respectivement 25 % et 75 % des observations en dessous d'eux et la médiane est donc le deuxième quartile.

1.3.2. Caractéristiques de dispersion

On appelle caractéristique de dispersion, une fonction des observations dont la valeur rend compte du plus ou moins grand *étalement* des valeurs observées autour de leur tendance centrale.

On appelle *étendue w* d'une série d'observations, l'écart entre la plus grande et la plus petite valeur de la série :

$$w = x_{\max} - x_{\min},$$

dont le principal avantage est la simplicité de calcul, mais qui est, par contre, extrêmement peu robuste.

On appelle *variance* s^2 d'une série d'observations, la quantité qui est définie par la relation :

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2,$$

et qui mesure l'écart moyen quadratique entre les observations et leur moyenne. Elle joue un rôle très important dans toute la statistique mathématique. Pour la calculer, on notera l'incontournable relation :

$$s^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - 2\, m \sum_{i=1}^{n} x_i + n\, m^2\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 \ - m^2,$$

que l'on mémorisera facilement en retenant que : *la variance est égale à la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne*.

La racine carrée s de la variance est appelée l'*écart-type* :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2}\ .$$

Variance et écart-type sont assez peu robustes. Plus favorable, de ce point de vue, on peut calculer l'écart absolu moyen e des observations à leur moyenne :

$$e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \, x_i - m \, \right| .$$

Enfin, une caractéristique de dispersion extrêmement robuste est la distance *interquartile* : écart entre le troisième quartile Q_3 et le premier quartile Q_1 :

$$I_Q = Q_3 - Q_1 .$$

1.4. Distributions d'échantillonnage

On appelle *population de référence* ou *modèle*, une population définie par une loi de probabilité $P(x)$ pouvant être considérée comme à l'origine des résultats observés, c'est-à-dire telle que la probabilité pour que la variable étudiée prenne une valeur dans un certain intervalle $[x,\ x + h[$, pour un individu prélevé au hasard, soit :

$$\text{Prob}\,\{x \leq X < x + h\} = P(x + h) - P(x).$$

Cela étant, considérons une population de référence définie par la loi de probabilité d'une certaine variable aléatoire X. Si nous prélevons, *au hasard* et de façon non exhaustive, un échantillon de taille n, nous observons n valeurs :

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_n,$$

dont on peut calculer la moyenne m et la variance s^2.

Mais un autre échantillon de taille n, prélevé au hasard dans la même population, conduirait à d'autres valeurs :

$$x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_i,\ \ldots,\ x'_n,$$

puis m' et s'^2, a priori différentes à cause des fluctuations dues à l'échantillonnage ... Et ainsi de suite, on pourrait répéter ces mesures et ces calculs sur un grand nombre d'échantillons différents.

Les nombres $x_1,\ x'_1,\ \ldots$ peuvent alors être considérés comme des réalisations d'une certaine variable aléatoire X_1, les nombres $x_2,\ x'_2,\ \ldots$ comme des réalisations d'une variable aléatoire X_2, et plus généralement, les nombres $x_i,\ x'_i, \ldots$ comme des réalisations d'une variable aléatoire X_i.

Les variables aléatoires $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_i,\ \ldots$ sont *indépendantes* (si l'échantillonnage est non exhaustif) et ont même loi de probabilité : celle qui définit la population de référence.

Les valeurs $m,\ m',\ \ldots$ peuvent alors être considérées comme des réalisations d'une variable aléatoire M_n, fonction des variables aléatoires $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_i,\ \ldots X_n$:

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

La distribution de M_n est appelée *distribution d'échantillonnage*. Il en est de même de celle de la variable aléatoire :

$$S_n{}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - M_n)^2.$$

La détermination des lois d'échantillonnage est fondamentale en statistique. Nous avons déjà étudié une de ces lois : la loi binomiale qui se rencontre chaque fois que l'on étudie un lot de pièces contenant une proportion ϖ de pièces défectueuses et qu'on y prélève, de façon non exhaustive, un échantillon de n pièces. Le nombre K_n de pièces défectueuses contenues dans l'échantillon est une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs $0,\ 1,\ \ldots,\ k,\ \ldots,\ n$ avec les probabilités :

$$\text{Prob}\,\{K_n = k\} = C_n^k\ \varpi^k (1 - \varpi)^{n-k}.$$

La suite fournira plusieurs exemples de lois d'échantillonnage. Nous nous limiterons, dans ce chapitre, à un autre cas particulier concernant, cette fois, une population à caractéristique quantitative.

1.5. Distribution de la moyenne d'un échantillon prélevé dans une population normale

On rencontre très fréquemment, dans la pratique, des populations à caractéristiques quantitatives qui peuvent être *raccordées* à des populations de référence définies par une loi de probabilité normale :

$$\text{Prob}\,\{X \le x\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2}\, du$$

On dit alors que la population est normale de moyenne μ et d'écart-type σ.

Considérons la variable aléatoire M_n : moyenne d'un échantillon prélevé au hasard dans une telle population :

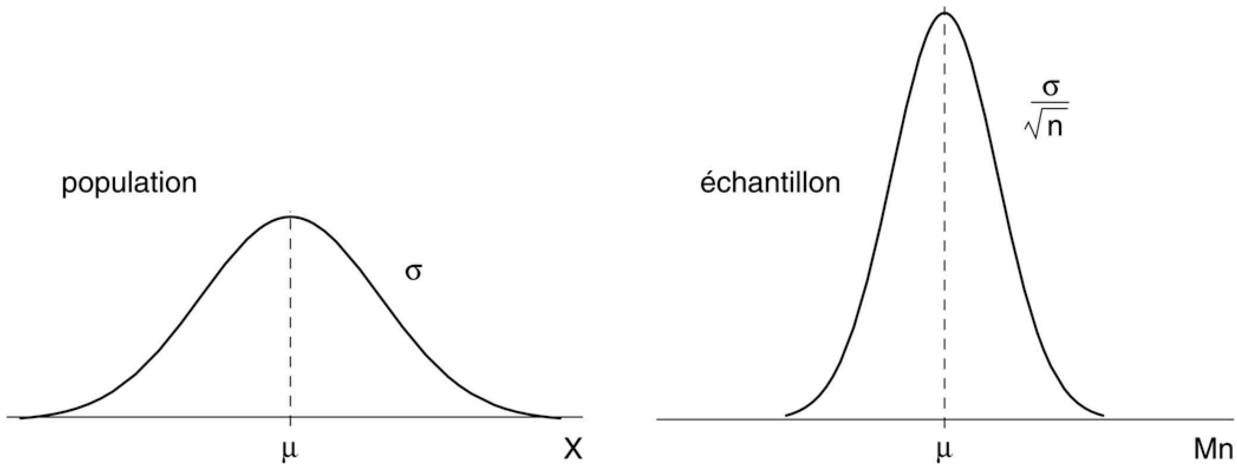
$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

On a établi qu'une somme de variables indépendantes, suivant des lois normales, suivait elle-même une loi normale de moyenne égale à la somme des moyennes des variables, et de variance égale à la somme de leurs variances. Il en résulte que M_n suit une loi normale de moyenne :

$$E[M_n] = \frac{E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n]}{n} = \mu$$

et de variance :

$$\sigma^2[M_n] = \frac{\sigma^2[X_1]+\sigma^2[X_2]+\dots+\sigma^2[X_n]}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$



(3.1)

On peut encore écrire ce résultat très important :

$$\text{Prob}\left\{ \left| M_n - \mu \right| > u \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_u^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt.$$

2. Contrôle Statistique

2.1. Contrôle de fabrication et contrôle de réception

Nous appellerons qualité ϖ d'un lot, la proportion de pièces défectueuses qu'il contient. La qualité d'une pièce peut, quant à elle, être déterminée, suivant les cas, de deux manières :

- *contrôle qualitatif* : la pièce est passée au calibre et l'on vérifie si elle correspond ou non aux tolérances imposées par le cahier des charges ;

- *contrôle quantitatif* : la pièce est mesurée, et l'on vérifie si la valeur obtenue est comprise dans l'intervalle de tolérance.

On distingue encore deux types de contrôle :

- *contrôle de fabrication* : c'est celui qui est effectué à chaque stade de l'élaboration d'un produit pour limiter la proportion de rebuts ;

- *contrôle de réception* : c'est celui qui est effectué par le client qui achète une certaine quantité de ce produit et veut vérifier que sa qualité correspond bien à ce qu'il attend.

En fait, leurs méthodes reposent sur les mêmes bases. Nous nous limiterons donc à l'étude du contrôle de réception dans le cas qualitatif, et à celle du contrôle de fabrication dans le cas quantitatif.

2.2. Contrôle de réception

L'objectif du contrôle, dans ce cas, est de porter un jugement sur la proportion ϖ *inconnue* de pièces défectueuses contenues dans un lot. En général, deux parties se trouvent en présence, un fournisseur et un client, dont les exigences peuvent se traduire de la façon suivante :

- le *fournisseur* ne voudrait pas qu'on lui refuse un lot contenant ϖ_1 ou moins de déchets ;

- le *client* ne voudrait pas accepter un lot s'il contient ϖ_0 ou plus de déchets.

Il faut remarquer dès ce stade que ϖ_0 et ϖ_1 sont définis à partir de considérations techniques et non statistiques. Le fournisseur peut déterminer ϖ_1 en fonction de son matériel, de son prix de vente, etc. Le client détermine ϖ_0 en fonction des conséquences économiques ou techniques qu'entraîne pour lui la présence de pièces défectueuses dans les lots réceptionnés.

Définir une *règle de contrôle*, va consister à fixer la taille n de l'échantillon à prélever, et une valeur limite c telle que :

- si on trouve moins de c pièces défectueuses parmi les n pièces prélevées, on accepte le lot ;

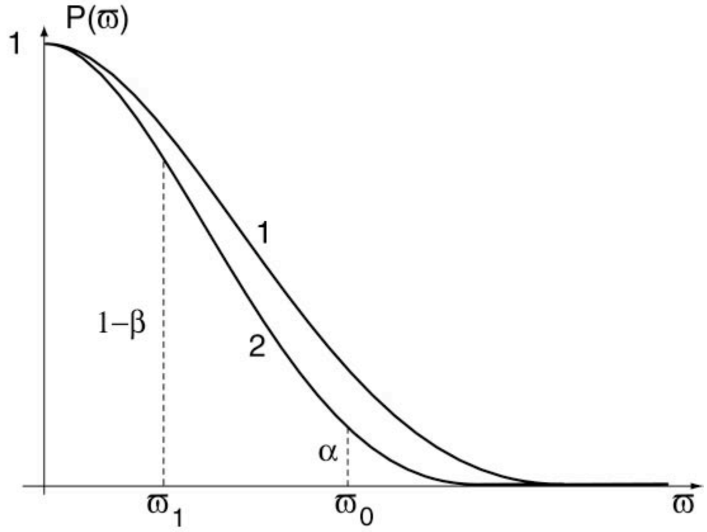
- si on en trouve plus de c, on le refuse.

Examinons les conséquences d'une telle règle. Connaissant n et c, il est possible, par référence à la loi binomiale, de calculer la probabilité $P(\varpi)$ *d'accepter* un lot où la proportion de pièces défectueuses serait égale à une valeur ϖ donnée quelconque :

$$P(\varpi) = \sum_{k=0}^{c} C_n^k \, \varpi^k (1 - \varpi)^{n-k}.$$

$P(\varpi)$ varie avec ϖ. La courbe représentative de la fonction $P(\varpi)$ est appelée la *courbe d'efficacité* de la règle de contrôle.

Elle a la forme indiquée ci-après (figure 3.2). Si l'on compare les courbes 1 et 2, on constate que la règle relative à la courbe 2 est plus sévère que celle qui correspond à la courbe 1, la probabilité d'accepter un lot de qualité donnée ϖ, étant plus faible : on dit qu'elle est plus ***efficace.***



(3.2)

On constate, d'autre-part, qu'à une règle donnée correspond :

- une probabilité α d'accepter un lot présentant une proportion ϖ_0 de déchets ; c'est le *risque du client* ;

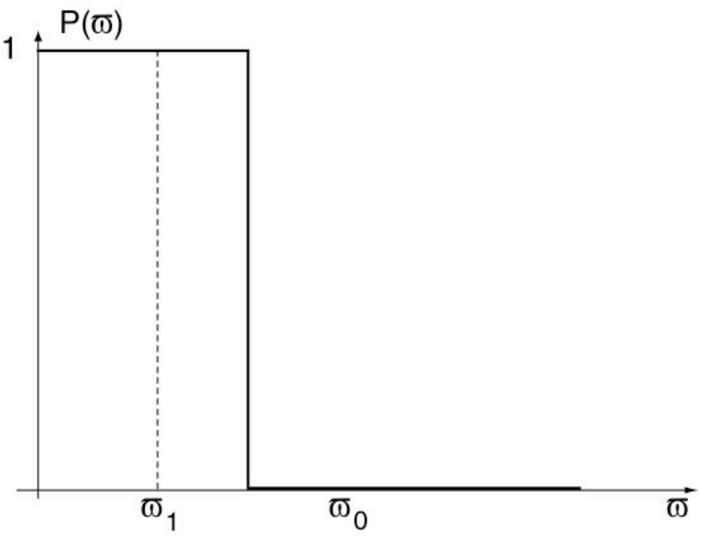
- une probabilité β de refuser un lot présentant une proportion ϖ_1 de déchets ; c'est le *risque du fournisseur.*

Il en résulte qu'il est possible inversement de déterminer la règle du contrôle, c'est à dire n et c, telle que la courbe d'efficacité passe par les deux points $\{\varpi_0,\ \alpha\}$ et $\{\varpi_1,\ 1-\beta\}$, à partir des deux relations :

$$\alpha = \sum\nolimits_{k=0}^{c} C_n^k\ {\varpi_0}^k (1-\varpi_0)^{n-k},$$
$$1-\beta = \sum\nolimits_{k=0}^{c} C_n^k\ {\varpi_1}^k (1-\varpi_1)^{n-k}.$$

Il est clair qu'aussi petits soient-ils choisis, les risques α et β devront être consentis par le fournisseur et le client.

A la limite en effet, la courbe d'efficacité qui conduirait à accepter avec certitude tout lot contenant une proportion de déchets inférieure à ϖ_1 et à refuser avec certitude tout lot contenant une proportion de déchets supérieure à ϖ_0, devrait avoir la forme indiquée ci-après. Seule une inspection à 100 % permettrait de l'obtenir.



(3.3)

2.3. Contrôle en cours de fabrication

2.3.1. Intervalle de tolérance et déchets

Considérons les pièces usinées sur un tour automatique. Si l'on s'intéresse au diamètre de ces pièces, on constate que, pour un certain réglage de la machine, c'est une variable aléatoire que l'on peut mettre sous la forme :

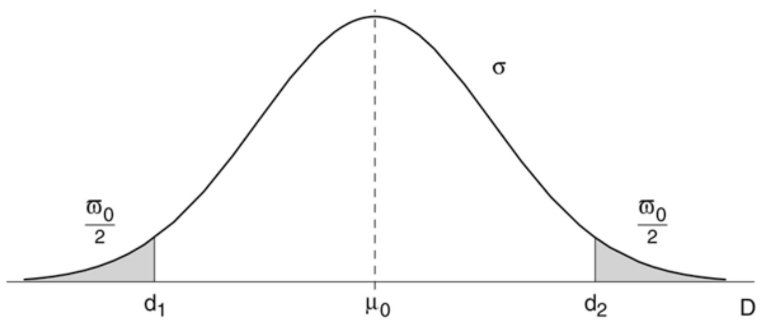
$$D = \mu + \sigma U,$$

où μ est un nombre certain, U une variable normale centrée et réduite, et où σ correspond à la variabilité de la machine et en constitue une caractéristique intrinsèque pour un certain niveau d'usure. La machine sera réglée au mieux si μ est égal à la cote théorique μ_0 prévue pour la pièce.

Mais, même si le réglage représente ce qu'on peut obtenir de mieux sur la machine, dans l'état où elle se trouve, il n'empêchera pas pourtant la production d'une proportion ϖ_0 de pièces défectueuses, c'est-à-dire dont le diamètre sort des limites de tolérance $[d_1,\ d_2]$:

$$\varpi_0 = 2 \operatorname{Prob}\left\{U > \frac{d_2 - d_1}{2\sigma}\right\}$$

où U suit une loi normale réduite. On constate que ϖ_0 est d'autant plus grand que σ l'est devant l'intervalle de tolérance.



(3.4)

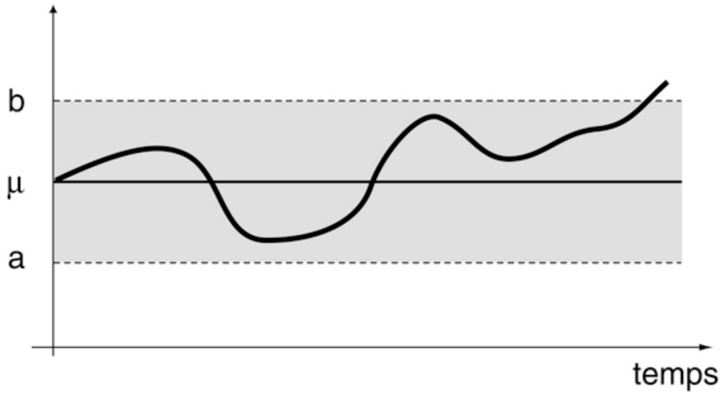
2.3.2. Règle de contrôle

Le principe du contrôle en cours de fabrication est de prélever à intervalles réguliers n pièces consécutives, de calculer leur moyenne et de vérifier qu'elle tombe à l'intérieur d'un certain intervalle :

$$[a, b] = \left[\mu_0 - u_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \mu_0 + u_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

$u_{\alpha/2}$ désignant la valeur d'une variable normale réduite U, correspondant à la probabilité α telle que :

$$\alpha \ = \ 2\,\mathrm{Prob}\,\{U \ > \ u_{\alpha/2}\}.$$

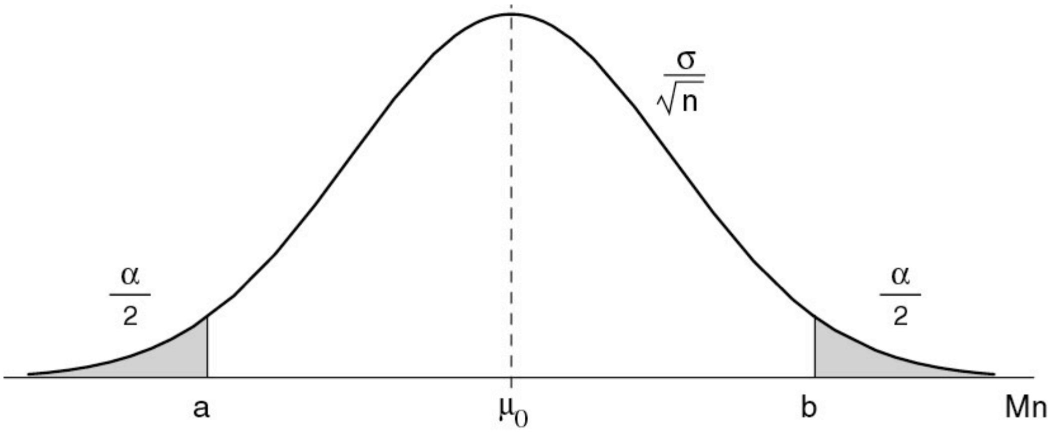


(3.5)

2.3.3. Efficacité d'un contrôle

Si la moyenne calculée tombe dans l'intervalle $[a,\ b]$, on laisse la fabrication se poursuivre ; sinon, on règle la machine. α représente donc le *risque de procéder à un réglage de la machine alors qu'elle n'est pas déréglée*. C'est la probabilité conditionnelle :

$$\alpha = \mathrm{Prob}\,\{M_n \notin [a,\ b]\,/\,\mu = \mu_0\}.$$



(3.6)

Supposons maintenant que la machine se dérègle et que la moyenne de la fabrication devienne $\mu \ \neq \mu_0$. On peut calculer la probabilité :

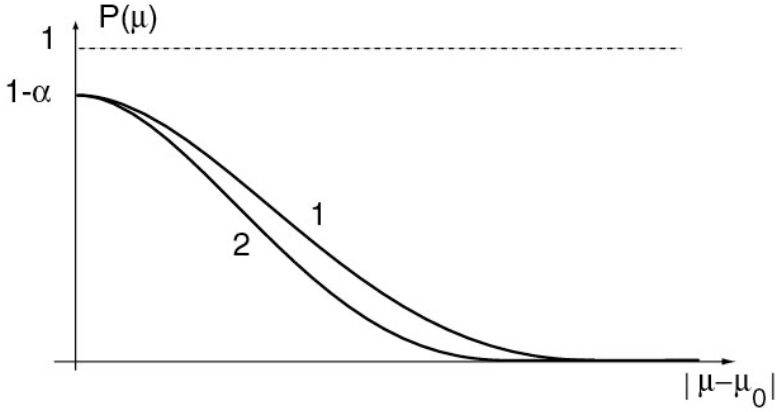
$$P(\mu) = \mathrm{Prob}\,\{M_n \in [a,\ b]\,/\,\mu\}.$$

qui désigne le *risque de laisser la fabrication se poursuivre alors que la machine est déréglée*.

On a évidemment :

$$P(\mu_0) = 1 - \alpha.$$

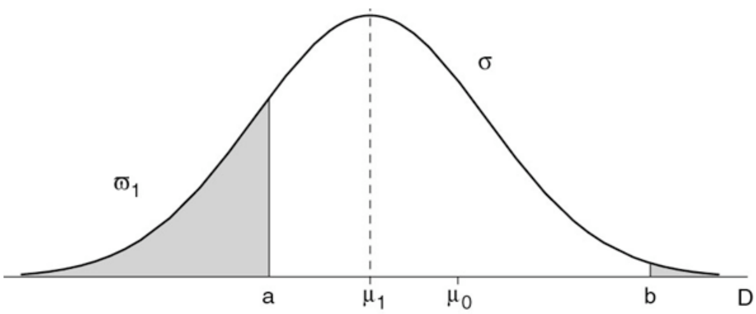
La courbe représentative de la fonction $P(\mu)$ est appelée courbe d'efficacité du contrôle. Pour un risque α donné, l'efficacité croît avec n : on a d'autant plus de chances de détecter un déréglage donné $|\mu - \mu_0|$ que les échantillons prélevés sont plus importants.



(3.7)

2.3.4. Risque β

Considérons maintenant la valeur μ_1 de μ qui correspond à une proportion ϖ_1 de déchets, que l'on considère comme inadmissible parce que trop importante, et qui est déterminée à partir de considérations techniques et (ou) économiques.



(3.8)

Remarquons que la valeur μ'_1 qui est symétrique de μ_1 par rapport à μ_0 (milieu de l'intervalle de tolérance) correspond au même déréglage $|\mu - \mu_0|$ et conduit à la même proportion ϖ_1 de déchets.

Ayant ainsi déterminé μ_1, on note généralement β la probabilité $P(\mu_1)$ qui est le *risque de ne pas régler la machine alors que son déréglage est inadmissible* :

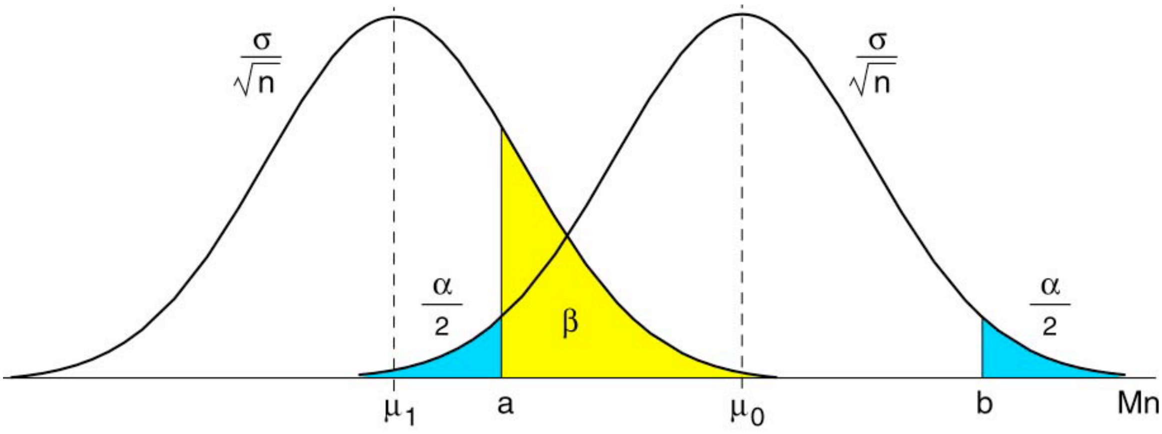
$$\beta = \text{Prob}\{M_n \in [a, b] / \mu = \mu_1\}.$$

2.3.5. Choix de la taille de l'échantillon à prélever

Il peut dès lors s'avérer intéressant, au lieu de fixer au départ n et α, de se fixer α et β, et d'en déduire la règle de contrôle, c'est-à-dire n et $[a, b]$, de telle sorte que la courbe d'efficacité passe par les deux points $\{\mu_0, 1 - \alpha\}$ et $\{\mu_1, \beta\}$.

La figure (3.9) illustre les deux relations qui permettent de mener facilement les calculs :

$$1-\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}^{\frac{b-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du, \quad \text{et} \qquad \beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}}^{\frac{b-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$



(3.9)

Le calcul pratique peut être notablement simplifié en tenant compte du fait que la probabilité :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{b-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

est presque toujours négligeable et que l'on peut écrire, par conséquent :

$$\beta \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

2.4. Contrôle progressif

Les règles de contrôle que nous venons d'envisager consistaient, dans le cas qualitatif par exemple, à :

- prélever dans le lot un échantillon de n pièces que l'on examine une à une,

- accepter le lot si on trouve c ou moins de c pièces défectueuses, sinon le refuser.

Il peut être judicieux d'envisager d'autres types de règles de contrôle, telles que l'on accepte le lot si le résultat d'un premier échantillon est bon, qu'on le refuse si ce résultat est mauvais, et qu'on examine un deuxième échantillon si ce résultat est moyen, de manière à confirmer d'une façon ou d'une autre la première opinion qu'on avait pu former. Une telle règle peut s'énoncer ainsi :

- prélever un échantillon de n_1 pièces,

- si on trouve c_1 ou moins de c_1 pièces défectueuses, accepter le lot ; si on en trouve c_2 ou plus de c_2, refuser le lot ; si on en trouve entre c_1 et c_2, prélever un nouvel échantillon de n_2 pièces;

- si le nombre total de pièces défectueuses trouvées dans les deux échantillons est inférieur ou égal à c_3, accepter le lot ; le refuser dans le cas contraire.

Il s'agit là de ce qu'on appelle un *plan d'échantillonnage double*. On peut utiliser aussi des plans d'échantillonnage multiples où l'on prélève plus de deux échantillons. L'avantage des plans multiples réside dans le fait que, pour une efficacité donnée, ils conduisent à un nombre moyen de pièces prélevées inférieur au nombre de pièces prélevées dans le plan simple équivalent.

Les plans multiples conduisent, à la limite, aux *plans progressifs*. Dans ce cas, l'effectif de l'échantillon n'est pas précisé à l'avance. On prélève les pièces une à une et, à chaque stade, on calcule le nombre total k_n de pièces défectueuses. Suivant la valeur de k_n, on accepte le lot, ou on le refuse, ou bien on prélève une $(n + 1)$ ème pièce.

Exercices du chapitre 3

Exercice 1

Pour contrôler un lot important d'articles, on adopte la règle suivante :

- on prélève un article au hasard; s'il est mauvais on refuse le lot ; s'il est bon, on prélève un deuxième article.

- si le deuxième article est mauvais, on refuse le lot ; s'il est bon, on prélève un troisième article.

- si le troisième article est mauvais, on refuse le lot ; s'il est bon, on accepte le lot.

a) Calculer la probabilité de refuser le lot et l'espérance du nombre d'articles prélevés, en fonction de la proportion ϖ d'articles défectueux dans le lot.

b) Comparer ces résultats à ceux que l'on aurait obtenus en prélevant directement trois articles, et en refusant le lot si l'un d'eux au moins est mauvais.

Exercice 2

Une entreprise réceptionne périodiquement des lots de pièces d'un certain type destinées à entrer dans des assemblages. On suppose que les conditions d'utilisation de ces pièces rendent souhaitable le rejet d'un lot contenant une proportion de déchets supérieure à 8 %.

a) On décide d'adopter la règle suivante : on prélève 100 pièces que l'on examine une à une, et on compte le nombre k de pièces défectueuses ; si $k \leq 3$, on accepte le lot ; si $k > 3$ on le refuse. En admettant l'approximation de Poisson, quelle est la limite supérieure du risque d'accepter un lot contenant plus de 8 % de déchets ?

b) Le fournisseur souhaiterait ne pas se voir refuser des lots qu'il estime éminemment convenables lorsqu'ils contiennent moins de 3% de déchets. Quel risque maximum encoure-t-il avec la règle précédente ?

c) Que deviennent les risques précédents si l'on prélève 200 pièces et que l'on fixe comme limite d'acceptation $k \leq 9$?

d) On adopte un plan d'échantillonnage multiple défini de la façon suivante :

- on prélève 100 pièces. Si $k_1 \leq 3$, on accepte le lot; si $k_1 > 9$, on le refuse ;

- si $3 < k_1 \leq 9$, on prélève à nouveau 100 pièces. Si $k_1 + k_2 \leq 9$, on accepte le lot ; sinon on le refuse.

Comparer son efficacité au précédent. Quelle est l'espérance mathématique du nombre de pièces prélevées ?

Exercice 3

Un fabricant produit des axes cylindriques dont le diamètre est distribué suivant une loi normale d'écart-type égal à 8. Les limites de tolérance pour le diamètre sont [90, 130]. Pour réceptionner un lot important de ces pièces, on décide d'adopter soit un procédé quantitatif A, soit un procédé qualitatif B. Comparer les deux procédés.

Procédé A : On prélève n pièces, on mesure leurs diamètres et on calcule la moyenne m des n diamètres, puis on adopte la règle suivante :

- si $a < m < b$, on accepte le lot.

- si $m < a$ ou $m > b$, on le refuse.

On détermine n, a et b en s'imposant les conditions :

- si la proportion de pièces défectueuses dans le lot (diamètre extérieur à l'intervalle [90, 130]) est supérieure à 5 %, on veut avoir 96 % de chance au moins de refuser le lot ;

- si cette proportion est inférieure à 2 %, on veut avoir 15 % de chance au plus de refuser le lot.

Procédé B : On prélève 300 pièces, on les passe au calibre et on compte le nombre k de pièces défectueuses, puis on adopte la règle suivante :

- si $k \leq 8$, on accepte le lot ;

- si $k > 8$, on le refuse.

Exercice 4

Dans un atelier de peinture, l'air est analysé toutes les heures. Le seuil maximal admissible pour un certain polluant est fixé à 7,7 ppm. Si la teneur du polluant est distribuée suivant une loi normale de moyenne 7,6 et d'écart-type 0,04 et si l'erreur de mesure suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 0,03 calculer les probabilités pour que :

a) Une mesure dépasse 7,7.

b) La moyenne de 2 mesures dépasse 7,7.

Exercice 5

Pour réceptionner un lot d'acier, on se propose d'examiner sa résistance à la traction. Pour cela, on prélève dans le lot des éprouvettes cylindriques qui sont soumises à un effort de traction jusqu'à rupture. En admettant que l'ensemble des éprouvettes que l'on pourrait extraire donnerait lieu, en ce qui concerne leur résistance, à une distribution normale d'écart-type égal à $20\,\mathrm{kg/mm^2}$, on se propose d'élaborer une règle de contrôle satisfaisant aux conditions suivantes. On prélèvera un nombre fixé n d'éprouvettes et on déterminera la moyenne m de leurs résistances. Le lot sera accepté (ou refusé) selon que m sera supérieure (ou inférieure) à une certaine valeur x.

Déterminer n et x de telle façon que :

- si la résistance moyenne du lot est égale (ou inférieure) à $80\,\mathrm{kg/mm^2}$, la probabilité α qu'il soit accepté est égale (ou inférieure) à 0.001 ;

- si la résistance moyenne du lot est égale (ou supérieure) à $100\,\mathrm{kg/mm^2}$, la probabilité β qu'il soit refusé est égale (ou inférieure) à 0.01.

Quelle est, en fonction de la résistance moyenne du lot, la probabilité pour que le lot soit accepté après un tel jugement sur échantillon ? Quelle signification concrète peut-on donner à α et β du point de vue de l'acheteur et de celui du fournisseur ?

Exercice 6

Un lot d'un certain type de fusées a été stocké pendant deux ans. Les spécifications de ce lot indiquent une portée en moyenne égale à 2000 mètres avec un écart-type de 100 mètres. On veut contrôler si le lot est encore en état. On fixe pour cela que :

- la probabilité de réformer le lot si la portée moyenne a diminué de 100 mètres doit être égale à 90%,

- la probabilité de le réformer si elle n'a pas changé doit être égale à 5% seulement.

a) Combien de fusées faut-il contrôler ?

b) Si la moyenne de l'échantillon contrôlé est trouvée égale à 1930 mètres, doit-on réformer le lot ?